Math. A.
49 f

Bresson, G.

/ Figuren-Tafeln. 61 f in 4° /

Mechanik

fester Körper

von

G. Bresson.

Deutsch herausgegeben

von

Dr. C. H. Schnuse.

Mit 18 Figuren-Tafeln in Folio.

Darmstadt.

Druck und Verlag von C. W. Leske.

1843.

Staats-Bibliothek
München

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorwort.

Der Verfasser beabsichtigt bei der Herausgabe des vorliegenden Werkes zunächst: denjenigen, welche bei ihrem künftigen Berufe Anwendungen von der Mechanik zu machen haben, die wichtigsten Lehren dieser Wissenschaft in einer leichten elementaren und ausführlichern Darstellung vorzutragen und damit zugleich die vorzüglichsten praktischen Anwendungen zu verbinden.

Der vorliegende erste Band enthält die Mechanik der festen Körper. Der zweite Band wird die Mechanik der flüssigen Körper oder die Hydrostatik und Hydrodynamik, der dritte Band die Experimentalmechanik oder die Lehre von der Construction der Maschinen, von der Festigkeit der Materialien, ꝛc. und der vierte Band endlich die Dampfmaschinenlehre enthalten.

Ferner wird der Uebersetzer in einem besondern Supplementbande die etwa nöthig scheinenden weitern Ausführungen einzelner Materien mittheilen.

Auf meinen Wunsch und weil es mir zweckmäßig schien, bei der großen Entfernung des Verlagsortes vom Wohnsitze des Uebersetzers, Jemanden in der Nähe zu haben, der in zweifelhaften Fällen mit Rath und That beistehen könne, war Herr Dr. Edm. Külp bereit, bei Herausgabe des Buches mitzuwirken; da aber einestheils dessen ganze Thätigkeit durch anderweitige Arbeiten und sein Lehramt an der hiesigen höhern Gewerbschule in Anspruch genommen ist, anderntheils Herr Dr. Schnuse bei eigener sorgfältiger Arbeit jede Mitwirkung für überflüssig hielt, so erscheint das Buch auch als von Letzterm allein übersetzt, was zur Berichtigung meiner frühern Anzeige hier zu erklären ich für nöthig halte.

Der Verleger.

Inhaltsverzeichniß.

Allgemeine Bemerkungen über den Gegenstand dieses Werkes.

Seite.

Erstes Buch.

Statik.

Erstes Kapitel. — Vorläufige Erklärungen und Begriffe . . . 5

Bei einer auf einen festen Körper, welchen man als einen materiellen Punct betrachten kann, wirkenden Kraft unterscheidet man ihren Angriffspunct, ihre Richtung und ihre Intensität oder das Maaß der Wirkung, welche sie hervorbringen kann 6

Eine Kraft kann durch ein Gewicht gemessen werden, welches dieselbe Wirkung hervorbringt, als sie 7

Gewöhnlich drückt man die Kräfte durch gerade Linien aus, welche ihnen proportional sind . . . . . —

Zweites Kapitel. — Zusammensetzung und Zerlegung der auf denselben materiellen Punct wirkenden Kräfte 8

Für zwei oder mehrere auf einen materiellen Punct wirkende Kräfte kann man eine einzige Kraft setzen, welche auf diesen Punct dieselbe Wirkung ausübt, und welche die Resultante oder Mittelkraft der einzelnen Kräfte, welche die Componenten heißen, genannt wird 8 u. 9

Geometrische Construction der Resultante mehrerer Kräfte . . . 15 u. 16

Zusammensetzung der nach geraden Linien, welche eine beliebige Richtung im Raume haben, wirkenden Kräfte . . . . . —

Drittes Kapitel. — Zusammensetzung der auf einen festen Körper wirkenden Kräfte 19

Wenn zwei Kräfte und ihre Resultante, welche nach in einer Ebene liegenden geraden Linien wirken, gegeben sind, und man fällt von einem beliebigen Puncte der Richtung der Resultante Perpendikel auf die Richtungen der Componenten, so verhalten sich die Intensitäten dieser Kräfte umgekehrt, wie diese Perpendikel 20

Anwendung dieses Lehrsatzes zur Bestimmung der Resultante zweier paralleler Kräfte 21

Seite.

Besonderer Fall der Zusammensetzung zweier gleicher, paralleler und nach entgegengesetztem Sinne wirkender Kräfte, welche aber einander nicht direct entgegengesetzt sind 22

In jedem Systeme paralleller Kräfte gibt es einen Punct, dnrch welchen die Richtung ihrer Resultante beständig geht und welcher daher der Mittelpunct dieser parallelen Kräfte genannt wird . . 28

Wenn man aus einem beliebigen in der Ebene eines Systemes von Kräften genommenen Puncte Perpendikel auf die Richtungen dieser Kräfte fällt, so wird das Product aus jeder Kraft und dem ihr entsprechenden Perpendikel das Moment dieser Kraft genannt, und der Punct, von welchem die Perpendikel ausgehen, heißt der Mittelpunct der Momente 32

Das Moment der Resultante eines Systemes von Kräften ist gleich der Summe der Momente aller Componenten . . . . . —

Viertes Kapitel. — Vom Schwerpuncte 39

Allgemeine Begriffe über die Schwere und die Wirkung, welche diese Kraft auf die Körper ausübt. Die Schwere wirkt nach verticalen Richtungen, welche man als parallel betrachten kann . . . . —

Man muß die Schwere nicht mit dem Gewichte verwechseln. Relation zwischen der Dichtigkeit, Masse und dem Gewichte eines Körpers . . . . . 41 u. 42

Unter dem Schwerpuncte eines Körpers versteht man denjenigen Punct desselben, welcher so beschaffen ist, daß, wenn er als fest angenommen wird, der Körper in allen Lagen um diesen Punct im Gleichgewichte bleibt, und folglich die Resultante aus allen Einwirkungen der Schwere auf die materiellen Theilchen des Körpers beständig durch diesen festen Punct gehet 43

Regeln zur Bestimmung des Schwerpunctes 44

Schwerpunct der Linien . . . . . —

Schwerpunct der Flächen 49

Schwerpunct der Körper 55

Allgemeine Formeln zur Bestimmung des Schwerpunctes . . . 61

Barycentrische Methode 70

Fünftes Kapitel. — Von den Maschinen 76

Es gibt unendlich viele Maschinen; aber sie sind alle Combinationen der sieben einfachen Maschinen, welche den Hauptgegenstand dieses Kapitels bilden 77

I. Seilmaschine . . . . . —

Diese Maschine besteht aus Seilen und die Aufhängung der Straßenlaternen bietet eine Anwendung davon dar 80

Seilpolygon . . . . . —

Ein Seil oder eine Kette kann nur geradlinig gespannt werden, wenn seine Richtung vertical ist 84

Von der Kettenlinie 85

Geometrische Verfahrungsarten zur Beschreibung der Kettenlinie und zur Construction einer Tangente in einem ihrer Puncte . . . 86

Gleichung der Kettenlinie 89

II. Vom Hebel 95

Hebel der ersten, zweiten und dritten Art 96

Seite.

Bei einem beliebigen Hebel findet zwischen der Kraft und dem Widerstande oder der Last das Gleichgewicht statt, wenn ihre Momente in Beziehung auf den Unterstützungspunct einander gleich sind . . 97
Instrumente, welche auf dem Principe des Hebels beruhen . . . 105
Die gewöhnliche Wage . . . . . —
Die Schnellwage 109
Die Brückenwage 111
III. Von der Rolle 115
Bedingung des Gleichgewichtes der einfachen Rolle 119
Bei den Flaschenzügen, welche häufig zum Heben von Lasten angewandt werden, verhält sich die Kraft zu dem Gewichte der Last, wie die Einheit zu der Anzahl der über die Rollen gehenden Seilstücke 123
IV. Von der Radwelle und einigen andern Maschinen derselben Art 126
Die theoretische Bedingung des Gleichgewichtes der Radwelle, wenn die Kraft nach der Tangente an dem Rade und der Widerstand oder die Last nach der Tangente an der Welle wirkt, besteht darin, daß sich die Kraft zu der Last, wie der Halbmesser der Welle zu dem Halbmesser des Rades verhalten muß, was im Grunde auf das Princip des Hebels hinausläuft 127
Bestimmung des Druckes, welchen die Radwelle auf ihre Unterlagen ausübt 128
Die Erd- oder Schiffswinde ist eine Radwelle, deren Axe vertical steht, und folglich sind die Bedingungen des Gleichgewichtes dieselben, als die für die Radwelle 131
Beschreibung der Erdwinde. Anwendungsart derselben . . . . —
Wenn man mehrere Radwellen mit einander verbindet, so ist, wenn die Kraft an dem Rade der ersten Welle und die Last an einem sich auf die letzte Welle wickelnden Seile wirkt, zum Gleichgewichte erforderlich, daß sich die Kraft zu der Last wie das Product aus den Halbmessern aller Wellen zu dem Producte aus den Halbmessern aller Räder verhält 138
Von den Zahnrädern 139
Die Proportion, welche für das Gleichgewicht eines Systemes mehrerer Radwellen stattfindet, ist auch auf ein aus mehreren Zahnrädern bestehendes Räderwerk anwendbar 140
Die Berechnung der Zahnräderwerke wird vereinfacht, wenn man für die Längen der mittlern Halbmesser der Zahnräder die Anzahlen der Zähne anf ihren Umfängen subftituirt 141
Zahlenbeispiele . . . . . —
Andere Beispiele der Berechnung der Räderwerke 142
Zu den Anwendungen der Zahnräder gehört auch die gewöhnliche Winde, welche aus einer geraden Zahnstange, einem Zahnrade, zwei Getrieben und einer Kurbel besteht 145
Die einfache Winde ist die, welche nur ein Getriebe hat, welches in die Zahnstange eingreift 146
Beschreibung eines Krahnes in der Gießerei von Charenton . . 147
Anwendung der Zahnräder zur Uebertragung der Rotationsbewegung der stehenden Welle eines Pferdegöpels auf andere Wellen . . 149
Von den wichtigsten Maschinen, welche bei Bauten zum Heben und Transportiren der Baumaterialien angewandt werden 152

Seite.

Das Hebezeug ist eine tragbare Radwelle 152

Die Krahne sind nicht mehr im Gebrauch, und man bedient sich statt dieser schweren und kostspieligen Maschinen tannener Masten, woran Flaschenverbindungen angebracht werden, und die Bewegung wird durch Radwellen oder Göpel hervorgebracht 154

Beschreibung der Maschine, welcher man sich zum Heben der Steine der Colonaden der St. Magdalenenkirche zu Paris bedient hat . —

Spillrad oder Steinbruchrad 157

Tragbare Radwelle mit Zahnrädern 158

Von den in den Häfen angewandten Krahnen 160

Gleichgewicht eines auf einer Horizontalebene ruhenden Körpers . 166

Wenn der Körper die Ebene nur in zwei Puncten berührt, so findet man den Druck in diesen Puncten durch den Lehrsatz der Momente —

Geometrische Methode zur Bestimmung des Druckes, welchen ein Körper auf eine Horizontalebene ausübt, wenn er dieselbe in drei nicht in derselben geraden Linie liegenden Puncten berührt 167

Aus diesem Verfahren ergibt sich ein Instrument, womit man sehr schwere Körper wiegen kann 168

V. Von der geneigten Ebene 169

Wenn ein schwerer Körper auf eine geneigte Ebene gelegt wird, so wird ein Theil seines Gewichtes von dieser Ebene getragen, und die Kraft, welche erfordert wird, um den Körper auf der schiefen Ebene im Gleichgewichte zu erhalten, ist kleiner, als sein Gewicht —

Wenn auf einen auf einer schiefen Ebene liegenden Körper eine Kraft wirkt, so ist die zu dieser Ebene parallele Richtung der Kraft die vortheilhafteste, und damit das Gleichgewicht stattfindet, muß sich die Kraft zu dem Gewichte des Körpers verhalten, wie die Höhe der schiefen Ebene zu ihrer Länge 172

Bedingung des Gleichgewichtes zweier auf zwei gegen einander gestellten schiefen Ebenen von derselben Höhe liegender und durch eine vollkommen biegsame und unausdehnbare Schnur mit einander verbundener Körper 174

Bedingungen des Gleichgewichtes eines zwischen zwei schiefen Ebenen liegenden Körpers 175

VI. Von der Schraube 176

Die Schraube ist ein Cylinder, woran man einen vorspringenden Schraubengang geschnitten hat . . . . . —

Eine Schraube mit einem quadratischen Gewinde ist die, bei welcher der Durchschnitt dieses Gewindes ein Quadrat ist, und der Abstand zweier auf einander folgender oberer Flächen des Schraubengewindes wird die Höhe oder Weite des Schraubenganges genannt 176 u. 177

Eine dreikantige Schraube wird diejenige genannt, deren Schraubengewinde ein Dreieck zum Durchschnitte hat . . . . . —

Die Schraubenmutter ist ein Stück, in welches eine schraubenförmige Vertiefung oder Nute geschnitten ist, so daß die Schraubenspindel genau hineinpaßt . . . . . —

Das bewegliche Stück des Systemes einer Schraube und einer Schraubenmutter wird vermittelst eines Hebels gedreht und durchläuft bei jeder Umdrehung in der Richtung der Axe der Schraube einen Weg, welcher der Schraubenweite gleich ist . . . . . —

Das Gleichgewicht findet statt, wenn die an dem auf der Axe der Schraube senkrechten Hebel wirkende Kraft sich zu dem Widerstande

Seite.

oder zu dem Gewichte der zu hebenden Last, wie die Schraubenweite zu dem Umfange des von dem Angriffspuncte der Kraft beschriebenen Kreises verhält, es mag sich die Schraube, oder die Schraubenmutter bewegen 178

Schraube ohne Ende 179

Diese Maschine ist eine Verbindung einer Radwelle und einer Schraube, indem das Rad gezahnt ist und in die Schraube, welche blos drei oder vier quadratische Schraubengänge hat, eingreift —

Gleichgewichtsbedingungen der Schraube ohne Ende 180

Anwendung der Schraubenvorrichtungen zum Heben eines eisernen Dampfschiffes, um dasselbe auf eine geneigte Ebene zu bringen, auf welcher es in die Seine gleitet 181

Beschreibung der Hauptbestandtheile einer Stanhope'schen Buchdruckerpresse 182

VII. Vom Keile 185

Der Keil ist ein dreiseitiges Prisma, wovon eine Kante, welche die Schärfe genannt wird, in einen Körper getrieben wird, welchen man spalten oder in zwei Theile theilen will, indem die wirkende Kraft in dem Schlage eines Hammers auf den Rücken des Keiles oder die der Schärfe gegenüberliegende Fläche desselben besteht 186

Zum Gleichgewichte des Keiles ist erforderlich, daß sich die in normaler Richtung auf den Rücken des Keiles wirkende Kraft zu dem Widerstande wie der Rücken des Keiles zu einer seiner Seiten verhält 187

Nach diesem theoretischen Resultate wird der mechanische Vortheil der auf den Keil wirkenden Kraft desto größer, je kleiner der Rücken des Keiles wird 187

Princip der virtuellen Geschwindigkeiten 188

Die virtuelle Geschwindigkeit eines Körpers oder einer Maschine ist die Geschwindigkeit, welche diese Maschine anzunehmen strebt, und welche sie in dem ersten Augenblicke, wo das Gleichgewicht gestört würde, annehmen würde 189

Das Priucip der virtuellen Geschwindigkeiten besteht darin, daß in einer Maschine das Gleichgewicht stattfindet, wenn sich die Kraft und der Widerstand umgekehrt wie ihre nach ihren Richtungen geschätzten virtuellen Geschwindigkeiten verhalten . . . . . —

Anwendungsbeispiele des Principes der virtuellen Geschwindigkeiten zur Bestimmung der Bedingungen des Gleichgewichtes des Hebels und mehrerer anderer einfacher Maschinen 190

Zweites Buch.

Dynamik.

Erstes Kapitel. — Vorläufige Begriffe 197

Die Dynamik ist die Wissenschaft, welche sich mit den Gesetzen der Bewegung der Körper beschäftigt, wenn das Gleichgewicht durch irgend welche Ursachen gestört wird. Man könnte auch das Gleichgewicht als ein Aufhören der Bewegung betrachten und die Dynamik zuerst abhandeln. Vortheile der neuern Methode . . . . 197 u. 198

Seite.

Die Zeit ist eine Größe, welche bei statischen Untersuchungen nicht in Betracht kommt; aber sie muß bei dynamischen Untersuchungen nothwendig in Betracht gezogen werden, um die Dauer der durch die Bewegung der Körper hervorgebrachten Erscheinungen bestimmen zu können 198

Ueber den wahren und mittleren Sonnentag . . . . . —

Sternzeit 199

Die Kräfte sind den von ihnen hervorgebrachten Wirkungen proportional. Man unterscheidet die Kräfte in der Mechanik in zwei Arten, nämlich in augenblicklich wirkende und in stetig wirkende 200

Ein Körper kann den Zustand seiner Ruhe oder Bewegung nicht von selbst ändern. Unter Trägheit oder Kraft der Trägheit versteht man die Eigenschaft aller Körper, vermöge welcher sie in dem einmal angenommenen Zustande verharren würden, wenn keine fremdartigen Ursachen dieses verhinderten . . . . . 200 u. 201

Zweites Kapitel. — Von der gleichförmigen Bewegung . . . 202

Die Bewegung eines Körpers ist gleichförmig, wenn derselbe in gleichen Zeiten gleiche Räume durchläuft, wie klein diese Zeiten auch sein mögen, und seine Geschwindigkeit wird durch den in der Zeiteinheit durchlaufenen Raum gemessen . . . . . —

Beispiele der gleichförmigen Bewegung mehrerer einander begegnender Körper 203–206

Drittes Kapitel. — Von der veränderlichen Bewegung überhaupt 206

Gleichförmig veränderliche Bewegung 207

Es ist eine stetig wirkende Kraft, wie die Schwere, welche den Körpern diese Bewegung ertheilt, wenn sie der Wirkung dieser Kraft überlassen werden. Die Bewegung ist eine gleichförmig beschleunigte, wenn sich der Körper von oben nach unten bewegt. Wenn dagegen ein Körper durch irgend eine andere momentan von oben nach unten wirkende Kraft in Bewegung gesetzt wird, so wirkt die Schwere auf diesen Körper, wie eine stetig verzögernde Kraft, und seine Bewegung wird gleichförmig verzögert, bis die Wirkung der ersten momentanen Kraft ganz aufgehoben ist, und wenn die Bewegung alsdann noch länger fortdauert, so wird sie eine gleichförmig beschleunigte, indem sich der Körper wieder von oben nach unten bewegt . . . . . —

Die Schwere ertheilt allen Körpern bei ihrem verticalen Falle dieselbe Geschwindigkeit, und der Unterschied, welchen man an den Fallgeschwindigkeiten verschiedener Körper beobachtet, rührt von dem ungleichen Widerstande der Luft her . . . . . —

Bei dem verticalen Falle der Körper sind besonders drei Dinge zu bemerken, nämlich die Fallzeit, die am Ende dieser Zeit erlangte Geschwindigkeit, und der von dem fallenden Körper durchlaufene Raum 208

Ausdruck der Geschwindigkeit, welche die Schwere einem Körper in der ersten Secunde seines verticalen Falles ertheilt. Zahlenwerth dieser Größe 209

Relationen zwischen der Zeit, der Geschwindigkeit und dem Raume, welchen ein Körper unter der Wirkung der Schwere beschreibt . 210

Formel zur Berechnung der einer gegebenen Fallhöhe entsprechenden Geschwindigkeit . . . . . —

Seite.

Um die Gesetze der gleichförmig veränderlichen Bewegung allgemein auszudrücken, muß in die Formeln dieser Bewegung eine anfängliche Geschwindigkeit eingeführt werden 213

Bewegung auf schiefen Ebenen 215

Die Körper, welche unter der alleinigen Wirkung der Schwere schiefe Ebenen hinabgleiten, nehmen eine Bewegung von derselben Natur, wie bei dem freien verticalen Falle an, und es wird durch die schiefe Ebene nur die Geschwindigkeit dieser Bewegung vermindert 216

Um die Formeln für die Bewegung bei dem freien verticalen Falle auf die Bewegung auf schiefen Ebenen anzuwenden, braucht man nur die beschleunigende Kraft der Schwere durch den Bruch zu multipliciren, dessen Zähler und Nenner resp. die Höhe und Länge der schiefen Ebene ist . . . . . 216—217

Beispiele der Bewegung auf schiefen Ebenen. Kurzer Ueberblick der Galiläischen Entdeckungen und Versuche über die Bewegung, welche die Schwere den Körpern ertheilt . . . . . 217—224

Von dem Maaße der Kräfte 224

Bemerkungen über die Zusammensetzung der Körper 225

Die successive auf denselben Körper wirkenden momentanen Kräfte verhalten sich wie die Geschwindigkeiten, welche sie diesem Körper ertheilen 227

Wenn zwei Kräfte auf zwei Körper von verschiedenen Massen wirken, so verhalten sich diese Kräfte wie die Producte aus den Massen dieser Körper und den ihnen ertheilten Geschwindigkeiten . . . —

Das Product aus der Masse eines Körpers und der demselben von einer Kraft ertheilten Geschwindigkeit wird die Quantität oder Größe der Bewegung genannt und ist das Maaß der Intensität dieser Kraft 228

Das Product aus der Masse eines Körpers und einer beschleunigenden Kraft wird die bewegende Kraft desselben genannt . . —

Eine Kraft, welche ein Gewicht auf eine gewisse Höhe hebt, ist eine bewegende Kraft und ihre Intensität wird durch das Product aus diesem Gewichte und der Höhe, auf welche dasselbe gehoben ist, gemessen und die Quantität oder Größe der Wirkung genannt —

Das Product aus der Masse eines Körpers und dem Quadrate seiner Geschwindigkeit wird die lebendige Kraft desselben genannt 229

Zusammensetzung der Geschwindigkeiten . . . . . —

Allgemeine Formeln für die veränderliche Bewegung 230

Bestimmung der Zeit, der Geschwindigkeit und des Raumes, welchen ein Körper bei seinem verticalen Falle durchläuft, wenn der Widerstand der Luft in Rechnung gebracht wird 233

Ueber den verticalen Fall der Körper, wenn die Schwere als eine Kraft betrachtet wird, welche sich im umgekehrten Verhältnisse des Quadrates der Entfernungen ändert 240

Viertes Kapitel. — Allgemeines Princip der Bewegung oder D'Alembertsches Princip, vermittelst dessen die Aufgaben der Dynamik auf statische Aufgaben zurückgeführt werden 243

Ausdruck des D'Alembertschen Principes . . . . . 243—244

Anderer Ausdruck desselben 245

Erste Anwendung. — Die Geschwindigkeit zweier Körper zu finden, welche sich auf zwei gegen einander gestellten schiefen Ebenen von derselben Höhe bewegen . . . . . —

Seite.

Zweite Anwendung. — Bestimmung der Bewegung zweier Körper, welche durch einen über eine feste Rolle gehenden Faden mit einander verbunden sind 246

Diese letzte Aufgabe enthält das Grundprincip der Atwoodschen Fallmaschine. Nähere Beschreibung dieser Maschine uud des Gebrauches, welchen man davon zur Versinnlichung der Gesetze der Bewegung des freien Falles der Körper macht 248

Fünftes Kapitel. — Vom Stoße der Körper. Man theilt die festen Körper in zwei Klassen, nämlich in weiche und harte Körper, welche man auch unelastische Körper nennt, und in elastische Körper 252

Wenn zwei vollkommen harte Körper mit gleichen Quantitäten der Bewegung in entgegengesetztem Sinne zusammenstoßen, so halten sie einander das Gleichgewicht 253

Allgemeines Gesetz der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung —

Stoß vollkommen harter Körper . . . . . —

Geschwindigkeit zweier unelastischer Kugeln nach dem Zusammenstoßen 254

Mariottesche Maschine zur Prüfung der Formeln der Theorie des Stoßes der Körper 256

Von der Percussions- oder Stoßkraft 257

Stoß elastischer Körper 258

Geschwindigkeiten zweier elastischer Kugeln nach dem Zusammenstoßen, wenn sie sich nach derselben Richtung bewegen 259

Geschwindigkeiten zweier elastischer Kugeln nach dem Stoße, wenn sie sich nach entgegengesetzten Richtungen bewegen 261

Stoß unvollkommen elastischer Körper 262

Wenn ein Körper gegen eine vollkommen harte Ebene stößt, so verhält sich der Einfallswinkel zu dem Zurückwerfungswinkel, wie die Einheit zu der Elasticität des Körpers 263

Diese beiden Winkel würden einander gleich sein, wenn diese Körper vollkommen elastisch wären 264

Das Billard beruht auf den Gesetzen des Stoßes elastischer Körper —

Die Formeln für die Mittheilung der Bewegung können durch bloße Transformationen zur Bestätigung des Principes der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunctes und des Principes der Erhaltung der lebendigen Kräfte dienen . . . . 265—267

Lehrsatz von Carnot, welcher als eine Ergänzung dieses zweiten Principes betrachtet werden kann 270

Princip der kleinsten Wirkung 271

Sechstes Kapitel. — Von dem Widerstande der Flüssigkeiten oder der Mittel 273

Formeln für den Widerstand, welcher auf die vordere Fläche eines Körpers ausgeübt wird, wenn sich derselbe in einer Flüssigkeit bewegt 275

Widerstand, welchen ein beliebiger Rotationskörper erfährt, wenn er sich in einer Flüssigkeit bewegt 276

Anwendung der allgemeinen Formel auf den besondern Fall, wo der bewegte Körper eine Kugel ist . . . . . —

Siebentes Kapitel. — Von der krummlinigen Bewegung . . 277

Seite.

Betrachtung des Falles, wo auf einen materiellen Punct successive bekannte Kräfte wirken, so daß derselbe ein Stück eines Vieleckes beschreibt, dessen Seiten geometrisch construirt werden können . 278

Verfahren zur Vertauschung dieser graphischen Methode mit der Methode der Coordinaten . . . . . —

Im Raume beschreibt der materielle Punct im Allgemeinen ein windschiefes Vieleck oder eine Curve von doppelter Krümmung, welche auf drei rechtwinklige Axen bezogen wird, und wenn der Körper eine ebene Curve beschreibt, so fällt die eine dieser Axen hinweg 281

Differentialgleichungen für die krummlinige Bewegung 282

Princip der Erhaltung der Flächen 283

Allgemeinerer Ausdruck des Principes der Erhaltung der lebendigen Kräfte, als der aus dem Stoße elastischer Körper abgeleitete 287

Achtes Kapitel. — Von der Wurfbewegung 288

Die Curve, welche ein in dem leeren Raume geworfener Körper (Projectil) beschreibt, ist eine Parabel. Aus der Gleichung dieser Curve ergibt sich der Ausdruck für die Wurfweite und Wurfhöhe 290

Ein Geschütz kann unter zwei verschiedenen Winkeln gerichtet sein, um eine Kugel nach einem durch seine Coordinaten gegebenen Ziele zu schießen 292

Die größte Schuß- oder Wurfweite findet statt, wenn der Lauf der Kanone einen Winkel von 45° mit dem Horizonte bildet . . . 293

D. Bernouilli's ballistisches Instrument zur Anstellung der Versuche über die Wurfbewegung 294

Bewegung der Projectile in der Luft . . . . . —

Anwendung der Infinitesimalrechnung auf die Auflösung des Problemes der Wurfbewegung in der Luft 295

Formeln, welche sich hieraus ergeben 299

Anwendungsbeispiele dieser Formeln auf die Construction der Curve, welche ein Projectil in der Luft beschreibt, wenn die anfängliche Geschwindigkeit als bekannt vorausgesetzt wird 300

Ballistisches Pendel von Robins zur Bestimmung der anfänglichen Geschwindigkeit der Projectile 302

Neuntes Kapitel. — Von den Centralkräften im Kreise und in den von dem Kreise verschiedenen Curven . . . . . —

Die Centralkraft bei der Bewegung im Kreise zieht den materiellen Punct gegen den Mittelpunct zu und die Centrifugalkraft strebt, denselben nach der Richtung der Tangente zu entfernen, und jede dieser beiden Kräfte ist gleich dem Quotienten aus dem Quadrate der Geschwindigkeit und dem Halbmesser des Kreises 304

Die Central- und Centrtfugalkräfte stehen im directen Verhältnisse der Halbmesser oder der Umfänge der beschriebenen Kreise und im umgekehrten Verhältnisse der Quadrate der dazu gebrauchten Zeiten —

Unter dem Aequator ist die Centrifugalkraft der Schwerkraft direct entgegengesetzt. Verhältniß dieser beiden Kräfte. Durch die Wirkung der Centrifugalkraft und der Schwere beschreibt der Mond eine fast kreisförmige Bahn bei seiner Bewegung um die Erde 306—308

Wenn ein Körper oder materieller Punct unter der Wirkung einer gegen einen festen Mittelpunct gerichteten Centralkraft eine von dem

Seite.

Kreise verschiedene Curve beschreibt, so ist diese Kraft nicht constant, sondern die Sectoren, welche der von dem festen Mittelpuncte nach dem beweglichen materiellen Puncte gezogene Radiusvector beschreibt, verhalten sich wie die Zeiten 308

Durch diese Ausdehnung der Centralkräfte auf die Bewegungen in Kegelschnitten hat Newton, gestützt auf die Arbeiten seiner Vorgänger, das wahre Weltsystem entdeckt 309

Keplersche Gesetze . . . . . —

Polargleichung der Ellipse 312

Die Erde beschreibt ihre Bahn um die Sonne unter der Wirkung einer beschleunigenden Kraft, deren Intentesität sich im umgekehrten Verhältnisse des Quadrates der Entfernung des Mittelpunctes der Sonne von dem der Erde ändert 314

Diese Kraft, welche Newton Attraction, Gravitation oder allgemeine Schwere genannt hat, ist für alle Planeten des Sonnensystemes dieselbe 315

Berechnung der Geschwindigkeit der Erde im Perihel und Aphel ihrer Bahn. Vergleichung ihrer Bewegung mit der gleichförmigen Bewegung eines fingirten Planeten 316

Zehntes Kapitel. — Von dem Trägheitsmomente 318

Erklärung des Trägheitsmomentes . . . . . —

Bestimmung der Trägheitsmomente eines rechtwinkligen Parallelepipedums und eines verticalen Cylinders 319

Trägheitsmomente der Rotationskörper 320

Wenn man zuerst das Trägheitsmoment eines Körpers in Beziehung auf eine durch seinen Schwerpunct gehende Axe bestimmt, so kann man alsdann leicht des Trägheitsmoment desselben in Beziehung auf jede andere zu der ersten parallele Axe finden 322

Elftes Kapitel. — Von der Rotationsbewegung eines Körpers um eine feste Axe 323

Gleichförmige Rotationsbewegung . . . . . —

Die Winkelgeschwindigkeit ist diejenige, welche durch einen Kreisbogen gemessen wird, dessen Halbmesser = 1 ist . . . . . —

Formel für die Winkelgeschwindigkeit, welche einem ruhenden Körper durch den Stoß eines bewegten Körpers ertheilt wird 325

Bedingungen, welche erfüllt werden müssen, damit durch den Stoß auf die feste Rotationsaxe keine Wirkung ausgeübt wird. Mittelpunct des Stoßes . . . . . 326—328

Veränderliche Bewegung eines festen Körpers um eine feste Axe 328

Bewegung eines materiellen Punctes durch die Seiten eines in einer Verticalebene liegenden Vieleckes. Der Fall, wo dieses Vieleck in eine Curve übergeht 330

Die Geschwindigkeit, welche ein Körper oder materieller Punct unter der Wirkung der Schwere erlangt, indem er längs eines Curvenbogens herabfällt, ist der Geschwindigkeit gleich, welche derselbe bei dem verticalen Falle durch eine Höhe, die der dieses Curvenbogens gleich ist, erlangt 332

Zwölftes Kapitel. — Allgemeine Formeln für die schwingende Bewegung des Pendels 333

Seite.

Die Dauer einer halben Pendelschwingung oder die Zeit, während welcher sich das Pendel durch einen Kreisbogen bewegt, ist kleiner, als die Zeit, welche ein materieller Punct gebraucht, um sich auf der Sehne dieses Bogens herabzubewegen. Erklärung des Isochronismus . . . . . 335—336

Correction der von dem Pendel beschriebenen Kreisbogen, um seine Schwingungen auf die zu reduciren, welche stattfinden würden, wenn das Pendel unendlich kleine Bogen beschriebe 336

Zusammengesetztes Pendel 341

Abstand des Aufhängungspunctes vom Schwingungsmittelpuncte des zusammengesetzten Pendels 343

Dieser Abstand ist die Länge des mit dem zusammengesetzten Pendel synchronischen einfachen Pendels 344

Dreizehntes Kapitel. — Ueber die Bestimmung der Länge des Secundenpendels, und die Mittel, welche dasselbe zur Erklärung verschiedener physikalischer Erscheinungen an die Hand gibt . . 345

Borda's Apparat zur Bestimmung der Länge des Secundenpendels für Paris . . . . . —

Die Länge des beobachteten Pendels betrug ungefähr zwölf Fuß . 347

Borda's erster Versuch. Tafel der Resultate dieses Versuches . —

Correction der Amplitude zur Bestimmung der Anzahl unendlich kleiner Schwingungen 348

Länge des mit dem beobachteten Pendel synchronischen einfachen Pendels 349

Länge des Pendels, welches in der Luft Secunden schlägt . . . 351

Reductionen, welche an dieser Länge vorgenommen werden müssen, um daraus die Länge des Secundenpendels im leeren Raume und am Niveau den Meeres abzuleiten 352

Anwendung des Pendels zur Bestimmung der Intensität der Schwere oder des Raumes, welchen die Körper in der ersten Secunde ihres freien Falles unter der geographischen Breite von Paris durchlaufen 353

Die Länge des Secundenpendels nimmt dem Quadrate des Sinus der geographischen Breite proportional zu, wenn man von dem Aequator gegen den Pol zu geht 356

Apparat, welchen der Capitain Kater in England zur Bestimmung der Länge des Secundenpendels angewandt hat 359

Bei diesem Apparate ist die Eigenschaft der Reciprocität des Mittelpunctes der Aufhängung und der Schwingung des Pendels in Anwendung gebracht 360

Cycloidenpendel. Die Cycloide ist eine tautochronische Curve im leeren Raume und zugleich eine Brachystochrone oder eine Curve des schnellsten Falles 363

Vierzehntes Kapitel. — Anwendung des Pendels auf die Uhren 364

Galiläi hat sich in den letzten Jahren seines Lebens mit dieser Anwendung beschäftigt, welche von geometrischen Sätzen abhängt, die damals noch unbekannt waren, nnd man verdankt diese Entdeckung Huyghens . . . . . —

Wenn man das Pendel nach Huyghens in einer Cycloide schwingen läßt, so werden seine Schwingungen ungeachtet ihrer ungleichen Amplituden isochronisch gemacht und durch die Entdeckung der neuen Echappements, wobei das Pendel nur kleine Kreisbogen beschreiben

Seite.

kann, welche nahezu mit den Bogen der Cycloide zusammenfallen, ist die Anwendung dieser Curve in den Uhrwerken überflüssig gemacht 366

Beschreibung einer Secundenuhr von Breguet zur Messung der Zeit mit der Genauigkeit, welche die astronomischen Beobachtungen erfordern . . . . . —

Mittel zur Compensation der durch die Temperaturveränderungen hervorgebrachten Veränderungen in der Länge des Pendels . . . 373

Eine genau regulirte astronomische Uhr entfernt sich innerhalb eines Jahres von der mittleren Zeit kaum um $^3/_4$ Minuten 375

Fünfzehntes Kapitel. — Von den schwingenden Saiten . . 376

Formel, welche die Anzahl der Schwingungen ausdrückt, die eine gespannte Saite in einer Secunde macht. Folgerungen, welche sich aus dieser Formel ergeben . . . . . —

Beschreibung des Monochordes, welches bei den Versuchen angewandt ist, wodurch die Spannungen der Saiten eines Pianoforte bestimmt sind 378

Tafel der Resultate dieser Versuche . . . . . 379 u. 380

Anwendung der allgemeinen Formel für die Bewegung schwingender Saiten auf einige Zahlenbeispiele 380

Beschreibung des neuen Mechanismus des von Sebastian Erard erfundenen Pianoforte 383

Der Hauptvortheil dieses Mechanismus besteht in dem Echappement, vermittelst dessen man einen Ton leicht wiederholen kann, indem man den Hammer gegen die Saiten zurückführt, ohne denselben anf den Ruhepunct oder auf seine Unterlage zurückfallen zu lassen 384

Ausführliches

Elementarlehrbuch

der

Mechanik.

Mechanik fester Körper.

Allgemeine Bemerkungen über den Gegenstand dieses Werkes.

Bei fast allen Erfindungen ist die Praxis der Theorie vorangegangen und die meisten Menschen, welche sich durch ihre Entdeckungen ausgezeichnet haben, hatten nur einige sehr oberflächliche Kenntnisse von den mathematischen Wissenschaften, welche die Grundlage der Theorie der physikalischen Wissenschaften und der Künste bilden; allein diese Erfinder waren geniale Menschen, welche sich ihre Theorie durch Ausdauer und Fleiß bei ihren Anwendungen selbst geschaffen haben.

Obgleich die Theorie das Genie nicht ersetzen kann, so liefert sie demselben doch Regeln, welche nur sehr unvollkommen durch lange, mühsame und kostspielige Versuche ersetzt werden könnten.

Die Mechanik ist es, welche den Haupttheil dieser Theorie bildet; sie setzt die Kenntniß der arithmetischen und algebraischen Rechnungen, der Elemente der Geometrie und der Trigonometrie voraus und außerdem werden auch noch einige Kenntnisse aus der analytischen Geometrie, sowie aus den Elementen der Differential- und Integralrechnung zum Verständniß der in diesem Lehrbuche vorgetragenen Lehren der Mechanik erfordert.

Die Beweise der verschiedenen in diesem Werke vorkommenden Sätze haben wir in der gehörigen Vollständigkeit auseinander gesetzt, und die sich aus diesen Sätzen ergebenden Regeln zur leichtern Anwendung mitgetheilt. Diese Regeln, welche wir immer durch Zahlenbeispiele erläutert haben, müssen allen Lesern verständlich sein, welche auch nur die ersten Elemente der Rechnung und Geometrie kennen, und zur Anwendung dieser Regeln ist weiter nichts erforderlich, als daß man in eine algebraische Formel für die darin vorkommenden

Buchstaben die Zahlen setzt, welche diese Buchstaben in dem betrachteten besondern Falle bezeichnen, und dann die angedeuteten Rechnungen entweder mit Hilfe der Logarithmentafeln, oder nach den gewöhnlichen Regeln der Arithmetik wirklich verrichtet. —

Die Mechanik ist die Wissenschaft, welche die Gesetze des Gleichgewichtes und der Bewegung der von gewissen Kräften sollicitirten Körper kennen lehrt, und da die Körper bei einer ersten allgemeinen Eintheilung in zwei große Abtheilungen zerfallen, wovon die eine die festen und die andere die flüssigen Körper umfaßt; so theilt man auch die Mechanik in zwei Abtheilungen, nämlich in die Mechanik der festen Körper und in die der flüssigen Körper, und jede dieser beiden Abtheilungen zerfällt wieder in zwei Theile, wovon sich der eine mit den Gesetzen des Gleichgewichtes der Körper beschäftigt und die Statik genannt wird, während sich der zweite mit der Bestimmung der Gesetze der Bewegung der Körper beschäftigt und Dynamik heißt. Die Statik fester Körper nennt man auch wohl Geostatik und die der flüssigen Körper Hydrostatik, und ebenso wird die Dynamik der festen Körper Geodynamik und die der flüssigen Körper Hydrodynamik genannt.

Zunächst werden wir uns mit der Statik und Dynamik der festen Körper beschäftigen.

Erstes Buch.

Statik fester Körper.

Erstes Kapitel.

Vorläufige Erklärungen und Begriffe.

§. 1. Die Statik fester Körper beschäftigt sich, wie bereits bemerkt worden, mit der Bestimmung der Gleichgewichtsgesetze der auf feste Körper wirkenden Kräfte. Feste Körper werden aber die genannt, deren Bestandtheile fest zusammenhängen und nicht ohne merkliche Kräfte von einander getrennt oder aneinander verschoben werden können. Die Dimensionen der Körper werden nach der Beschaffenheit der Gegenstände bestimmt, wozu sie angewandt werden sollen. Vorläufig nehmen wir zur Erleichterung des Verständnisses der Beweise an, daß die Körper sich auf bloße materielle Puncte ohne Schwere reduciren, indem wir von dem Volumen und dem Gewichte der Körper abstrahiren. Wie man sieht, ist dieser Gang dem analog, welchen man in den Elementen der Geometrie befolgt, wo man zuerst nur die gerade Linie, dann die Ebene und endlich das Volumen oder den körperlichen Inhalt betrachtet. Nachdem wir die ersten Principien der Statik vermittelst der zu einem leichtern Verständnisse derselben erforderlichen Betrachtungen aufgestellt haben, werden wir verschiedene Anwendungen davon zu machen suchen.

§. 2. Ein Körper befindet sich in Ruhe, wenn er an demselben Orte bleibt und er ist in Bewegung, wenn er successive verschiedene Oerter einnimmt. Kein Körper auf der Erde befindet sich in einer absoluten Ruhe; denn sie nehmen alle an der doppelten Bewegung der Erde, welche in dem Zeitraume eines Jahres ihre Bahn um die Sonne durchläuft und sich jeden Tag einmal um ihre Axe drehet, theil. Die Ruhe, welche wir bei den uns umgebenden Körpern beobachten, ist also blos eine relative, wie die der Körper, welche sich auf einem Schiffe befinden, das sich auf dem Meere fortbewegt. Aber abgesehen von dieser gemeinschaftlichen Bewegung, können die Körper in dem Schiffe sich in einer relativen Ruhe befinden, wenn sie an der Stelle in dem Schiffe bleiben, wo sie sich einmal befinden, und sie können auch eine relative Bewegung in dem Schiffe annehmen, wenn sie sich einander gegenseitig nähern, oder von einander entfernen.

§. 3. Ein in Ruhe befindlicher Körper kann nur durch die Wirkung einer fremden Ursache, welche Kraft genannt wird, in Bewegung gesetzt werden, und wenn sich ein Körper einmal in Bewegung befindet, so setzt er dieselbe so lange fort, bis eine Kraft nach entgegengesetztem Sinne auf ihn wirkt und seine Bewegung aufhebt.

Wir haben keine Mittel in Händen, durch welche wir die Natur der Kräfte kennen lernen könnten; allein wir kennen die Wirkungen oder Effecte, welche sie hervorbringen, wenn sie auf die Körper wirken, und mehr ist zur Auflösung aller Aufgaben der Mechanik, welche für uns von Interesse sein können, auch nicht erforderlich.

Wenn auf einen Körper keine Kraft wirkt, so bleibt er in Ruhe, und wenn mehrere Kräfte auf einen in Ruhe befindlichen Körper wirken und die Intensitäten oder Wirkungen derselben auf diesen Körper heben sich gegenseitig auf; so wird die Ruhe des Körpers nicht gestört und er bekommt bloß ein Bestreben, aus diesem Zustande der Ruhe in den der Bewegung überzugehen.

§. 4. Man sagt, ein Körper sei im Gleichgewichte, wenn sich die auf ihn wirkenden Kräfte gegenseitig aufheben, und folglich unterscheiden sich der Ruhe- und Gleichgewichtszustand eines Körpers nur dadurch von einander, daß derselbe in dem letzten Zustande ein Streben zur Bewegung hat.

Unter einem Systeme versteht man einen Inbegriff von mehreren Körpern, welche so mit einander verbunden sind, daß, wenn das System unveränderlich ist, die einem seiner Bestandtheile mitgetheilte Bewegung unmittelbar auf alle übrigen übertragen wird. So ist z. B. eine Maschine nichts anders, als ein System, dessen sämmtliche Theile so eingerichtet sind, daß die beabsichtigte Wirkung hervorgebracht wird.

Wenn ein Körper oder ein System in Bewegung gesetzt werden soll, so kann man darauf zunächst die Kräfte wirken lassen, welche erforderlich sind, um den Körper oder das System im Gleichgewichte zu erhalten, oder ein bloßes Bestreben zur Bewegung hervorzubringen. Die Statik gibt die Regeln an die Hand, welche man bei der Wahl und Anordnung dieser Kräfte befolgen muß, und um die Bewegung hervorzubringen, braucht man alsdann bloß ihre Intensitäten zu vergrößern oder neue Kräfte hinzuzufügen.

Aus diesen allgemeinen Betrachtungen geht hervor, daß man das Studium der Mechanik nach der Natur der Sache mit dem der Statik beginnen muß, welche den ersten Theil derselben bildet und außerdem viele Sätze enthält, welche man ihrer häufigen Anwendung wegen kennen muß, wenn man sich von der Wirkung, welche die Maschinen hervorbringen müssen, Rechenschaft geben will.

§. 5. Bei jeder auf einen Körper oder auf ein System wirkenden Kraft hat man dreierlei in Betracht zu ziehen, nämlich 1) ihren Angriffspunct, 2) ihre Richtung und 3) ihr Maaß, d. h. die Größe der Wirkung, welche sie hervorbringt, oder welche sie hervorzubringen strebt, wenn das System im Gleichgewichte ist.

Wenn eine Kraft auf einen Körper wirkt, so ist ihr Angriffspunct der Punct dieses Körpers, auf welchen die Kraft unmittelbar wirkt und ihre Richtung ist die durch diesen Angriffspunct gehende

gerade Linie, nach welcher die Kraft den Körper fortzuziehen oder fortzuschieben strebt.

§. 6. Der Angriffspunct einer Kraft kann in einen beliebigen Punct der geraden Linie verlegt werden, nach welcher diese Kraft ihre Wirkung ausübt. Wenn z. B. eine Kraft an dem festen Körper *M* (Fig. 1) angebracht ist, und denselben nach der geraden Linie *AB* fortzieht; so kann der Punct *A* oder jeder andere Punct der geraden Linie *AB* zum Angriffspuncte dieser Kraft genommen werden und wenn die gerade Linie *AB* nach entgegengesetztem Sinne *AB'* verlängert wird, so kann der Angriffspunct dieser Kraft auch in einen beliebigen Punct *A'* dieser Verlängerung verlegt werden; aber alsdann muß die Richtungslinie eine unbiegsame Stange sein, vermittelst welcher die Kraft den Körper fortzuschieben strebt.

Wenn man in dem Puncte *A'* zwei gleiche Kräfte anbringt, welche nach der geraden Linie *BB'* in entgegengesetztem Sinne wirken; so halten diese beiden Kräfte einander das Gleichgewicht, und wenn jede derselben der im Puncte *A* angebrachten und nach *AB* wirkenden Kraft gleich ist; so wird diese letzte Kraft durch die in *A'* nach entgegengesetzter Richtung *A'B'* wirkende Kraft aufgehoben, und es bleibt nur noch die in demselben Puncte *A'* nach der Richtung *A'B* wirkende Kraft übrig, so daß auf den Körper immer noch die ursprüngliche Kraft, deren Angriffspunct aber aus dem Puncte *A* in den Punct *A'* verlegt ist, wirkt.

§. 7. Um die Intensität oder Stärke irgend einer Kraft bestimmen zu können, muß man ihr Verhältniß zu einer bestimmten Einheit kennen, zu welcher Einheit sich die Gewichtseinheit am besten in der Praxis eignet.

Wenn man die Größe der auf einen festen Körper *M* wirkenden Kraft, welche denselben fortschiebt oder zieht, kennen lernen will; so läßt man eine mit dem einem Ende an dem Körper befestigte Schnur *AB* nach der Richtung der Kraft über eine in einem Puncte *B* dieser Richtung angebrachte feste Rolle gehn, und befestigt an dem andern Ende dieser Schnur ein Gewicht *P*, welches dieselbe Wirkung ausübt als die Kraft, und folglich das Maaß ihrer Intensität ist. Eine 2, 3, 4, ... *n* größere Kraft, würde auch durch ein 2, 3, 4, ... *n* mal größeres Gewicht als *P* gemessen, wo der Buchstabe *n* eine beliebige ganze oder gebrochene Zahl ausdrückt.

Zum Beweise der Sätze, worauf die Theorie des Gleichgewichtes beruht, braucht man nicht den absoluten Werth der Kräfte zu kennen, sondern blos ihre Verhältnisse, welche man auf eine sehr einfache Weise erhält, wenn man die Kräfte durch gerade Linien ausdrückt, welche ihnen proportional sind. Man pflegt daher eine beliebige Kraft durch eine auf der geraden Linie, nach welcher sie wirkt, von ihrem Angriffspuncte aus genommene Länge auszudrücken und vereinfacht diese Bezeichnung noch dadurch, daß man die Kraft durch einen einzigen Buchstaben bezeichnet, welchen man auf der Richtung dieser Kraft auf die Buchstaben folgen läßt, welche die Länge der geraden Linie bezeichnen, wodurch die Intensität dieser Kraft ausgedrückt wird.

Wenn die gerade Linie *AB* die Längeneinheit so vielmal enthält als die Gewichtseinheit in dem Gewichte *P* enthalten ist; so kann die

auf den festen Köper *M* wirkende Kraft, welche nach der Annahme dem Gewichte *P* gleich ist, durch die gerade Linie *AB* oder durch den auf die Verlängerung von *AB* gesetzten Buchstaben *P* ausgedrückt werden.

Zweites Kapitel.

Zusammensetzung und Zerlegung der auf einen Punct wirkenden Kräfte.

§. 8. Zwei Kräfte sind einander gleich, wenn sie an demselben Puncte angebracht und nach derselben geraden Linie in entgegengesetztem Sinne wirkend, einander das Gleichgewicht halten. Wenn eine dieser Kräfte ihre Richtung verändert, daß sie auf denselben Punct nach der Richtung der andern Kraft wirkt, so wird der materielle Punct durch eine doppelt so große Kraft getrieben, und wenn man nach derselben Richtung und in demselben Sinne auf denselben materiellen Punct eine dritte Kraft wirken läßt, welche jeder der beiden ersten gleich ist, so wird dieser materielle Punct durch die dreifache Kraft sollicitirt u. s. f. bis zu der *n*fachen Kraft, indem die ursprüngliche Kraft als Einheit betrachtet wird, und wenn man alsdann diese Einheit auf die gerade Linie, nach welcher die gleichen Kräfte wirken, von ihrem Angriffspuncte aus so vielmal trägt, als man gleiche Kräfte hat, so wird die Summe dieser Kräfte durch die gerade Linie ausgedrückt, welche von der Summe dieser Linieneinheiten gebildet wird.

Wenn auf einen materiellen Punct nach derselben geraden Linie eine beliebige Anzahl von Kräften wirken, welche zum Theil nach dem einen und zum Theil nach dem entgegengesetzten Sinne gerichtet sind, und man betrachtet die nach dem ersten Sinne wirkenden Kräfte als positiv; so müssen die nach dem andern Sinne wirkenden als negativ angesehen werden, und ihre Summe ist der Differenz zwischen der Summe der ersten und der der zweiten Gruppe von Kräften gleich. Wenn z. B. die Einheit der Kraft durch *p* bezeichnet wird, und die erste Gruppe enthält diese Einheit *m*mal, während sie in der zweiten Gruppe *n*mal enthalten ist; so wird die Summe aus allen diesen Kräften durch folgende Formel ausgedrückt:

$$mp - np = (m - n)\,p.$$

Diese Summe kann positiv, Null oder negativ sein, je nachdem die Zahl *m* größer, gleich, oder kleiner als die Zahl *n* ist. Im ersten Falle wird der materielle Punct nach dem Sinne der positiven Kräfte fortbewegt, im zweiten Falle heben sich die auf ihn wirkenden Kräfte gegenseitig auf und er bleibt im Gleichgewichte, und endlich im dritten Falle bewegt er sich nach der Richtung der negativen Kräfte.

§. 9. Die positiven Kräfte können durch eine einzige Kraft, welche ihrer Summe gleich ist und in demselben Sinne wirkt, ersetzt werden. Diese einzige Kraft wird die Resultante oder Mittelkraft der ein-

zelnen Kräfte genannt, und diese heißen in Beziehung auf jene die Componenten oder Seitenkräfte. Für die negativen Kräfte kann man ebenfalls ihre Resultante substituiren, wodurch in der Wirkung der Kräfte nichts geändert wird, und überhaupt kann man in einem beliebigen Systeme von Kräften die Resultante für die einzelnen Kräfte, welche die Componenten derselben sind, setzen.

Die Zusammensetzung der Kräfte hat zum Zweck, die Resultante mehrerer Kräfte, deren Richtungen und Größen gegeben sind, zu finden, und wenn eine einzige bekannte Kraft in mehrere andere nach bestimmten Richtungen wirkende Kräfte zerlegt werden soll, so betrachtet man die gegebene Kraft als eine Resultante und sucht die Componenten. Diese Untersuchung ist der Gegenstand der Aufgabe, welche man die Zerlegung der Kräfte nennt.

Wie haben vorhin gesehen, daß mehrere nach derselben geraden Linie auf einen materiellen Punct wirkende Kräfte auf eine einzige Kraft zurückgeführt werden können, welche die Resultante genannt wird, und dieselbe Wirkung hervorbringt, als die Componenten oder die einzelnen Kräfte zusammengenommen. Um das Gleichgewicht herzustellen, muß die Wirkung der Resultante aufgehoben werden, was darauf hinaus läuft, ihr eine gleich große Kraft direct entgegenwirken zu lassen.

Aus diesen Betrachtungen erhellet, daß zur Herstellung des Gleichgewichtes eines Systemes, worauf Kräfte von gegebenen Richtungen und Intensitäten wirken, zunächst die Resultante dieser Kräfte bestimmt werden muß. Und umgekehrt, wenn man eine gegebene Kraft nach mehreren Richtungen soll wirken lassen, so findet man ihre Componenten durch die Zerlegung der Kräfte. Wir wollen uns nun mit diesen beiden wichtigen Aufgaben beschäftigen, indem wir mit dem einfachsten Falle den Anfang machen, wo zwei Kräfte auf einen im Durchschnittspuncte der geraden Linien, nach welchen diese beiden Kräfte wirken, liegenden materiellen Punct wirken, wo alsdann die Resultante nach einer in der Ebene der Componenten liegenden geraden Linie wirkt. Diese gerade Linie liegt innerhalb des Winkels, welchen die Richtungen der beiden Componenten mit einander bilden, und wenn diese beiden letzten Kräfte einander gleich sind, so wird der Winkel, welchen sie mit einander bilden, d. h. der Winkel, welchen die beiden geraden Linien mit einander bilden, nach welchen sie wirken, durch die Richtung ihrer Resultante in zwei gleiche Theile getheilt.

§. 10. Die Resultante aus zwei ungleichen Kräften P, Q, welche nach zwei einen Winkel PAQ (Fig. 2) mit einander bildenden Richtungen AP, AQ auf den materiellen Punct A wirken, ist nach einer geraden Linie AR gerichtet, welche den Winkel PAQ in zwei ungleiche Winkel theilt, wovon der kleinste an der größten Kraft liegt.

Es seien AB, AC die geraden Linien, welche die Kräfte P, Q ausdrücken, wovon Q größer sein soll als P und AR sei die Richtung der Resultante dieser beiden Kräfte, so ist der Winkel RAQ zwischen der geraden Linie AR und der Richtung der größten Kraft kleiner, als der Winkel RAP zwischen AR und der Richtung der kleinsten Kraft. Denn wir wollen auf AC die Länge $AC' = AB$ nehmen, so ist die Resultante R' der durch diese beiden gleichen geraden Linien ausgedrückten gleichen Kräfte nach der geraden Linie AR' gerichtet, welche den

Winkel BAC' in zwei gleiche Theile theilt. Setzt man nun diese Resultante mit dem noch übrigen Theile $Q - P$ der Kraft Q zusammen, so ist die Resultante aus diesen beiden Kräften, welche zugleich die der beiden ursprünglichen Kräfte P, Q ist, nach einer in dem Winkel $R'AQ$ liegenden geraden Linie AR gerichtet; woraus folgt, daß der Winkel $RAQ < RAP$ ist, d. h. die Richtung der Resultante zweier ungleicher Kräfte entfernt sich weniger von der Richtung der größten, als von der der kleinsten Kraft.

§. 11. Wenn zwei Kräfte P, Q nach den Richtungen AP, AQ (Fig. 3) auf den materiellen Punct A wirken und man nimmt auf diesen geraden Linien die Längen AB, AC den Kräften P, Q proportional, und vollendet endlich das Parallelogramm $ABFC$; so ist die Resultante aus den beiden Kräften P, Q nach der Diagonale AF dieses Parallelogrammes gerichtet.

Wir wollen auf den Richtungen der Kräfte P, Q von ihrem Angriffspuncte A aus die der Einheit gleichen Längen Ab, bb', $b'b''$, ꝛc. Ac, cc', $c'c''$, ꝛc. nehmen, wo jede dieser Längeneinheiten die Krafteinheit ausdrückt. Bilden wir alsdann die Raute $Abfc$, so ist die Resultante der durch Ab, Ac ausgedrückten gleichen Kräfte nach der Diagonale Af gerichtet, welche den Winkel bAc in zwei gleiche Theile theilt; diese Resultante kann im Puncte f angebracht werden. Nehmen wir an, daß sie in ihre Componenten zerlegt sei, wovon die eine nach ff' und die andere nach fg gerichtet ist; so kann diese letztere im Puncte b angebracht werden, indem der Angriffspunct der erstern in f bleibt.

Die Resultante der beiden durch bb', bf ausgedrückten und auf den Punct b wirkenden gleichen Kräfte ist nach der Diagonale bf' der Raute $bb'f'f$ gerichtet, und wir können uns diese Resultante im Endpuncte f' der Diagonale Af' angebracht denken. Alsdann sind die auf diesen Punct wirkenden drei Kräfte, nämlich ff' oder Ab, bb' und bf oder Ac den beiden durch Ab' und Ac ausgedrückten Kräften gleich. Folglich geht die Resultante dieser beiden Kräfte durch den Punct f'; sie geht aber auch durch den Punct A. Mithin ist die Resultante aus den beiden durch die geraden Linien Ab' und Ac, welche sich wie 2 zu 1 verhalten, ausgedrückten Kräften nach der Diagonale Af' des aus diesen Linien construirten Parallelogrammes $Ab'f'c$ gerichtet.

Ebenso beweist man, daß die Resultante der durch die geraden Linien Ab'', Ac, welche sich wie 3 zu 1 verhalten, dargestellten Kräfte nach der Diagonale Af'' des aus diesen geraden Linien construirten Parallelogrammes $Ab''f''c$ gerichtet ist, u. s. f. Wenn sich also zwei Kräfte wie m zu 1 verhalten und man construirt aus den diese Kräfte darstellenden geraden Linien ein Parallelogramm, so ist ihre Resultante nach der Diagonale dieses Parallelogrammes gerichtet.

Betrachten wir nun zwei Kräfte, welche durch die geraden Linien AB, Ac' ausgedrückt werden, die sich wie m zu 2 verhalten. Vorhin haben wir gesehn, daß wenn sich die durch die geraden Linien AB, Ac ausgedrückten Kräfte wie m zu 1 verhalten, ihre Resultante nach der Diagonale Ad des Parallelogrammes $ABdc$ gerichtet ist. Wir wollen uns nun diese Resultante im Puncte d in ihre Componenten zerlegt denken, wovon die eine nach dh und die andere nach dd' gerichtet ist; so kann die letzte im Puncte d' angebracht werden, während die erste,

im Puncte c angebrachte, durch $cd = AB$ ausgedrückt wird. Die Resultante der durch cd und cc' ausgedrückten Kräfte ist nach der Diagonale cd' des Parallelogrammes $cdd'c'$ gerichtet, folglich können die drei durch die geraden Linien $dd' = Ac$, cc' und $cd = AB$ ausgedrückten Kräfte im Puncte d' angebracht werden. Diese drei Kräfte sind aber den durch die geraden Linien AB, Ac' ausgedrückten beiden Kräften gleich, und folglich geht die Resultante dieser beiden letzten Kräfte, welche sich wie $m : 2$ verhalten, durch den Punct d'. Da diese Resultante aber auch durch den Punct A geht, so muß sie nach der Diagonale Ad' des Parallelogrammes $ABd'c'$ gerichtet sein.

Ebenso beweist man, daß, wenn sich zwei Kräfte wie $m : 3$, wie $m : 4$, ..., wie $m : n$ verhalten, ihre Resultante nach der Diagonale des Parallelogrammes gerichtet ist, welches aus den auf den Richtungen dieser Kräfte von ihrem Angriffspuncte aus genommenen und diesen Kräften proportionalen Längen construirt ist. Wenn sich also irgend zwei Kräfte P, Q wie zwei rationale Zahlen m, n verhalten und man nimmt auf den Richtungen dieser Kräfte die Längen AB, AC, welche sich ebenfalls wie $m : n$ verhalten und construirt das Parallelogramm $ABFC$; so ist die Resultante aus diesen Kräften P, Q nach der Diagonale AF gerichtet.

§. 12. Nachdem der Satz für zwei Kräfte bewiesen ist, deren Verhältniß durch gerade Linien ausgedrückt wird, die sich wie zwei rationale Zahlen verhalten, kann man denselben auch noch für den Fall beweisen, wo die beiden Kräfte in einem irrationalen Verhältnisse zu einander stehen, was z. B. der Fall wäre, wenn die Intensitäten dieser Kräfte resp. durch die Länge der Seite und der Diagonale eines Quadrates ausgedrückt würden.

Wir wollen die beiden Kräfte P, Q durch die geraden Linien AB, AC (Fig. 4) darstellen, so ist die Resultante derselben nach der Diagonale AF des Parallelogrammes $ABFC$ gerichtet. Denn wenn dieses nicht der Fall wäre, so sei AG ihre Richtung und wir wollen AB in gleiche Theile theilen, welche kleiner sind als FG, und einen dieser Theile so oft als möglich auf BF tragen; so fällt wenigstens ein Theilungspunct D zwischen G und F. Durch diesen Punct wollen wir die gerade Linie DE parallel zu AB und dann AD ziehen; so ist die Resultante der durch die geraden Linien AB und $BD = AE$ ausgedrückten Kräfte, welche in einem rationalen Verhältnisse zu einander stehen, nach der Diagonale AD des Parallelogrammes $ABDE$ gerichtet. Aber nach der Voraussetzung ist die Resultante der durch AB, AC ausgedrückten Kräfte P, Q nach AG gerichtet, was unmöglich ist; denn die Resultante dieser beiden Kräfte muß weniger von AC entfernt sein, als die Resultante der durch AB, AE ausgedrückten Kräfte, weil $AC > AE$ ist. Derselbe Schluß ist auf jede andere nicht mit AF zusammenfallende gerade Linie anwendbar, und folglich ist die Resultante aus zwei beliebigen Kräften P, Q in was für einem Verhältnisse sie auch zu einander stehn mögen, nach der Diagonale AF des Parallelogrammes gerichtet, dessen Seiten AB, AC diesen Kräften proportional sind.

§. 13. Wenn zwei auf den Punct A wirkende Kräfte P, Q durch die geraden Linien AB, AC (Fig. 5) ausgedrückt werden und man

construirt über diesen geraden Linien das Parallelogramm $ABFC$; so wird die Größe oder Intensität der Resultante der Kräfte P, Q durch die Diagonale AF dieses Parallelogrammes ausgedrückt.

Im Vorhergehenden haben wir bewiesen, daß die Resultante zweier auf einen Punct nach verschiedenen Richtungen wirkender Kräfte nach der Diagonale des Parallelogrammes gerichtet ist, welches aus den diese Kräfte ausdrückenden geraden Linien construirt ist, und wir wollen nun beweisen, daß die Größe dieser Diagonale auch die Größe oder Intensität der Resultante der beiden Kräfte ausdrückt.

Es sei R die unbekannte Größe der Resultante der Kräfte P, Q, so ist diese Resultante vermöge des vorhergehenden Satzes nach der Diagonale AF gerichtet und wenn man auf den Punct A in der Richtung der Verlängerung der Diagonale FA eine Kraft R' wirken läßt, welche der Resultante R der Kräfte P, Q gleich und entgegengesetzt ist; so sind die drei Kräfte P, Q, R' im Gleichgewichte. Aber wenn drei auf einen Punct wirkende Kräfte im Gleichgewichte sind, so ist jede beliebige derselben der Resultante aus den beiden andern gleich und entgegengesetzt. Die Kraft Q ist also der Resultante der Kräfte P und R' gleich und entgegengesetzt.

Verlängert man daher CA, nimmt auf dieser Verlängerung ein Stück $AC' = AC$, und zieht durch den Punct C' die Linie $C'F'$ parallel zu AB, so ist BF gleich und parallel zu AC oder AC'; folglich BC' parallel zu AF' und die Figur $ABC'F'$ ein Parallelogramm, dessen Seite AF' die Größe der Kraft R' ausdrückt. Denn die durch AC' ausgedrückte Kraft Q' ist die Resultante der Kräfte P, R', und wenn die Kraft R' durch eine gerade Linie AD, welche kleiner als AF ist, ausgedrückt würde, und man zöge DE parallel zu AB; so hätten die Kräfte P und R' eine nach der Diagonale AE des Parallelogrammes $ABED$ gerichtete Resultante, was unmöglich ist, weil diese Resultante nach der Verlängerung AC' von CA gerichtet sein muß.

Durch ähnliche Schlüsse ergibt sich, daß die Größe der Kraft R' nicht durch eine größere gerade Linie als AF' ausgedrückt werden kann, und folglich drückt diese gerade Linie die Kraft R' aus.

Diese Kraft R' ist der Resultante R der Kräfte P, Q gleich und entgegengesetzt und wird durch die gerade Linie $AF' = BC' = AF$ ausgedrückt, weil die Figuren $BC'F'A$, $BC'AF$ zwei Parallelogramme zwischen denselben Parallelen sind, welche die gemeinschaftliche Grundlinie BC' haben. Folglich wird die Größe der Resultante R durch die Diagonale AF des Parallelogrammes $ABFC$ ausgedrückt.

§. 14. Das im Vorhergehenden bewiesene Princip der Zusammensetzung der Kräfte wird der Lehrsatz des Parallelogrammes der Kräfte genannt, und auf demselben beruhet die Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte. Diesen Lehrsatz wendet man auch bei der Bestimmung des Gleichgewichtes der einfachen Maschinen an, und außerdem wird derselbe nicht bloß in der Lehre vom Gleichgewichte, sondern auch in der von der Bewegung häufig angewandt, weshalb man diesen Satz sehr genau aufgefaßt haben und wohl im Gedächtnisse behalten muß.

Es gibt wenige mechanische Lehrsätze, welche so fruchtbar sind, als der Lehrsatz des Parallelogrammes der Kräfte, und wir wollen daher noch einige sich unmittelbar daraus ergebende Folgerungen hier anführen.

Zunächst wollen wir bemerken, daß in jedem Parallelogramme die gegenüberliegenden Seiten einander gleich sind, so daß man, statt der Seite AC die ihr gleiche Seite BF als Ausdruck der Kraft Q nehmen kann, und alsdann werden die beiden Kräfte P, Q und ihre Resultante R durch die drei Seiten des Dreieckes ABF ausgedrückt, d. h. man hat:

$$P : Q : R = AB : BF : AF.$$

In diesen Proportionen können für die Seiten des Dreieckes ABF die Seiten jedes andern ihm ähnlichen Dreieckes gesetzt werden.

Wenn eine der Kräfte P, Q Null würde, so wäre ihre Resultante der andern Kraft gleich; aber die Resultante selbst kann nur dann Null sein, wenn beide Kräfte zu gleicher Zeit Null sind. Die Resultante zweier Kräfte, welche nicht Null sind, kann nur Null werden, wenn diese beiden Kräfte einander gleich sind, und nach derselben geraden Linie in entgegengesetztem Sinne wirken.

In jedem geradlinigen Dreiecke verhalten sich die Seiten wie die Sinus der ihnen gegenüberliegenden Winkel. Wenn man also bemerkt, daß der Sinus des Winkels ABF in dem Dreiecke ABF dem Sinus seines Supplementes $PBF = BAC$ und daß $AFB = CAF$ ist; so hat man:

$$AB : BF : AF = \sin. CAF : \sin. BAF : \sin. BAC;$$

und wenn man die Verhältnisse der Sinus der Winkel für die der ihnen gegenüberliegenden Seiten des Dreieckes substituirt; so bekommt man:

$$P : Q : R = \sin. CAF : \sin. BAF : \sin. BAC.$$

Diese drei gleichen Verhältnisse zeigen, daß die beiden Kräfte P, Q und ihre Resultante R resp. durch die Sinus der Winkel des Dreieckes ABF ausgedrückt werden, so daß jede dieser drei Kräfte dem Sinus des Winkels proportional ist, welchen die Richtungen der beiden andern Kräfte mit einander bilden.

§. 15. Wenn zwei auf einen materiellen Punct nach verschiedenen Richtungen wirkende Kräfte und der Winkel, welchen diese beiden Richtungen mit einander bilden, gegeben sind; so kann man den Werth ihrer Resultante unmittelbar berechnen.

Es seien P und Q die beiden Kräfte, welche durch die auf ihren Richtungen genommenen Längen AB, AC (Fig. 6) ausgedrückt werden, so drückt die Diagonale AF des aus diesen Linien construirten Parallelogrammes $ABFC$ die Resultante R der Kräfte P und Q aus; allein statt dieser Construction kann man den Werth der Resultante durch eine Formel berechnen, worin bloß die Intensitäten der Kräfte P und Q und der von ihren Richtungen gebildete Winkel vorkommen.

Vom Puncte F wollen wir auf die Richtung AB der Kraft P das Perpendikel FG fällen, so haben wir:

$$\overline{AG}^2 = (AB + BG)^2 = \overline{AF}^2 - \overline{FG}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BG}^2 + 2\overline{AB} \times \overline{BG},$$

$$\overline{AF}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BG}^2 + \overline{FG}^2 + 2\overline{AB} \times \overline{BG},$$

und wenn wir bemerken, daß vermöge der Eigenschaft des rechtwinkligen Dreieckes

$\overline{BG}^2 + \overline{FG}^2 = \overline{BF}^2 = \overline{AC}^2$, und $BG = BF \cos. GBF = AC \cos. BAC$

ist, so kommt:

$$\overline{AF}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + 2\overline{AB} \times \overline{AC} \cos. BAC;$$

und wenn für die geraden Linien die durch sie dargestellten Kräfte substituirt werden, so verwandelt sich die letzte Formel in:

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ \cos. BAC,$$

woraus sich der Werth der Resultante

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ \cos. BAC}$$ ergibt.

Die in dieser Formel enthaltene Regel läßt sich folgendermaßen ausdrücken: Man erhebe die Zahlen, welche die Werthe der Kräfte P und Q ausdrücken, einzeln zum Quadrate und addire zu der Summe dieser Quadrate das doppelte Product aus den beiden Kräften und dem Cosinus des von ihren Richtungen gebildeten Winkels und ziehe endlich aus dieser Totalsumme die Quadratwurzel, so erhält man den Werth der Resultante R der beiden Kräfte P und Q.

Wenn der Winkel $BAC = 0$, folglich sein Cosinus $= 1$ ist, so wird die Größe unter dem Wurzelzeichen das vollständige Quadrat von $P + Q$ und in diesem Falle wirken die beiden Kräfte P, Q nach derselben geraden Linie und in demselben Sinne, so daß ihre Resultante ihrer Summe gleich ist, d. h. $R = P + Q$.

Wenn die beiden Kräfte P, Q einander gleich sind, so theilt die Richtung AF ihrer Resultante den Winkel BAC in zwei gleiche Theile und die allgemeine Formel verwandelt sich in:

$R^2 = 2P^2 + 2P^2 \cos. BAC = 2P^2 (1 + \cos. 2BAF) = 4P^2 \cos.^2 BAF$;

und folglich, wenn man aus beiden Theilen die Quadratwurzel auszieht, so hat man:

$$R = 2P \cos. BAF,$$

d. h. der Werth der Resultante zweier gleicher Kräfte wird ausgedrückt durch das doppelte Product aus einer dieser Kräfte und dem Cosinus der Hälfte des von ihren Richtungen gebildeten Winkels.

Wenn der Winkel $BAF = 90°$, mithin der Cosinus desselben $= 0$ ist, so verschwindet die Resultante R, wie es auch nothwendig sein muß, weil dann die beiden Kräfte einander gleich sind und nach derselben geraden Linie in entgegengesetztem Sinne wirken, also einander das Gleichgewicht halten.

§. 16. Wenn eine auf einen materiellen Punct A (Fig. 6) wirkende Kraft R gegeben ist, so kann man diese Kraft in zwei andere auf denselben Punct und nach gegebenen geraden Linien AP, AQ wirkende Kräfte P und Q zerlegen. Denn nimmt man auf der Richtung AR der gegebenen Kraft R eine Länge AF, welche diese Kraft ausdrückt, und zieht durch den Punct F die Linien FC, FB resp. zu AP, AQ parallel; so werden die gesuchten Kräfte P und Q durch die Seiten AB, AC des Parallelogrammes $ABFC$ ausgedrückt.

Wenn die Kraft R der Größe und Richtung nach, aber die Componenten derselben P und Q bloß der Richtung nach gegeben sind; so kann man die Größe der letztern auch leicht durch Rechnung finden, welche den geometrischen Constructionen oft vorzuziehen ist, weil die Fehler dieser Constructionen nicht immer zwischen bestimmte Grenzen eingeschlossen werden können, die Rechnungsresultate aber sich immer mit einem hinreichenden Grade von Annäherung erhalten lassen.

Die Proportionen zwischen den Intensitäten der Kräfte und den Sinus der von ihren Richtungen gebildeten Winkel geben:

$$P : Q : R = \sin. CAF : \sin. BAF : \sin. BAC,$$

woraus folgt:

$$\sin. BAC : \sin. CAF = R : P = \frac{R \sin. CAF}{\sin. BAC}$$

$$\sin. BAC : \sin. BAF = R : Q = \frac{R \sin. BAF}{\sin. BAC}.$$

Diese Formeln zeigen, daß man den Werth jeder Componente erhält, wenn man die Kraft R durch einen Bruch multiplicirt, dessen Zähler der Sinus des nicht an dieser Componente liegenden Winkels und dessen Nenner der Sinus des von den Richtungen der beiden Componenten gebildeten Winkels ist.

Wenn der Winkel BAC (Fig. 7), welchen die Richtungen der Componenten P und Q mit einander bilden, ein rechter ist und der Halbmesser $= 1$ gesetzt wird; so hat man:

$$\sin. BAC = 1, \sin. CAF = \cos. BAF$$
$$\sin. BAF = \cos. CAF,$$

und die vorhergehenden Proportionen verwandeln sich alsdann in:

$$P : Q : R = \cos. BAF : \cos. CAF : 1$$
$$1 : \cos. BAF = R : P = R \cos. BAF$$
$$1 : \cos. CAF = R : Q = R \cos. CAF;$$

woraus erhellet, daß, wenn die Kraft R in zwei andere P und Q zerlegt wird, deren Richtungen auf einander senkrecht sind, jede Componente durch das Product aus der Kraft R und dem Cosinus des Winkels ausgedrückt wird, welchen die Richtung dieser Kraft R und die der Componente mit einander bilden.

Auch sieht man aus dem Rechtecke $ABFC$, daß jede der beiden Componenten P, Q der Kraft R durch die Projection dieser letztern auf die Richtung der entsprechenden Componente ausgedrückt wird. So wird z. B. die Componente P durch die Projection AB der Kraft R auf die Richtung der Kraft P ausgedrückt, und hierauf gründet sich die sogenannte Schätzung der Kraft R nach einer gewissen Richtung.

Da der Lehrsatz des Parallelogrammes der Kräfte die Regel enthält, welche man zur Bestimmung der Resultante zweier gegebener auf denselben Punct nach verschiedenen geraden Linien wirkender Kräfte anwenden muß; so kann man vermittelst dieser Regel auch die Resultante aus einer beliebigen Anzahl nach verschiedenen Richtungen auf denselben Punct wirkender Kräfte finden, wie wir sogleich an einem Beispiele zeigen wollen.

§. 17. Aufg. Man soll die Resultante aus einer beliebigen Anzahl auf denselben materiellen Punct wirkender und in derselben Ebene liegender Kräfte bestimmen.

Aufl. Es seien mA, mA', mA'', mA''', mA^{IV}, ... (Fig. 8) die Richtungen und Werthe der gegebenen Kräfte. Wir wollen zu-

nächst das Parallelogramm $mABA'$ construiren und die Diagonale mB desselben ziehen, welche die Resultante der beiden Kräfte mA, mA' ist. Hierauf wollen wir das Parallelogramm $mBCA''$ construiren, so ist die Diagonale mC desselben die Resultante der beiden Kräfte mB, mA'' oder der drei Kräfte mA, mA', mA'', und wenn man die Construction auf dieselbe Weise fortsetzt, so ist die Diagonale mD des dritten Parallelogrammes $mCDA'''$ die Resultante aus den vier Kräften mA, mA', mA'', mA''' und die Diagonale mE des vierten Parallelogrammes $mDEA^{iv}$ ist die Resultante aus den fünf Kräften mA, mA', mA'', mA''' und mA^{iv}; u. s. f.

Es ist leicht einzusehen, daß sich diese Construction abkürzen läßt; denn man braucht nur die geraden Linien AB, BC, CD, DE, ... resp. gleich und parallel mA', mA'', mA''', mA^{iv}, ... zu ziehen, so ist die gerade Linie mE, welche die äußersten Spitzen des Polygontheiles $mABCDE$ verbindet, die Resultante R aus den fünf auf den Punct m wirkenden Kräften.

Um also z B. den fünf Kräften mA, mA', mA'', mA''', mA^{iv} das Gleichgewicht zu halten, muß man auf den Punct m eine Kraft S wirken lassen, welche der Resultante R aus diesen Kräften gleich und entgegengesetzt ist.

§. 18. Das Verfahren, durch welches man eine auf einen materiellen Punct wirkende Kraft in zwei andere nach zwei auf einander senkrechten Richtungen auf denselben Punct wirkende Kräfte zerlegt, kann auch auf drei Dimensionen angewandt werden, d. h. eine Kraft, deren Angriffspunct, Richtung und Größe gegeben ist, kann in drei andere und nach drei aufeinander senkrechten Axen auf denselben Punct wirkende Kräfte zerlegt werden.

Es sei m (Fig. 9) der Angriffspunct der gegebenen Kraft und mC die gerade Linie, welche die Richtung und Größe dieser Kraft ausdrückt, so wollen wir durch den Punct m die drei aufeinander senkrechten Axen mX, mY, mZ legen, welche die Lage jeder der drei Ebenen XmY, XmZ, YmZ bestimmen und durch den Punct C wollen wir drei andere Ebenen legen, welche resp. zu den drei ersten parallel sind, so bilden diese sechs Ebenen das rechtwinklige Parallelepipedum $mA'C'ADA''EC$, dessen Diagonale die gerade Linie mC ist, und die gegebene Kraft R ist in drei andere zerlegt, deren Richtungen und Größen resp. durch die drei Kanten mA, mA', mA'' des Parallelepipedums $mA'C'ADA''EC$ ausgedrückt werden. Denn die Figur $mC'CA''$ ist ein Rechteck, dessen Diagonale mC die gegebene Kraft ausdrückt, deren Componenten durch die Seiten mA'' und mC' ausgedrückt werden; aber die Linie mC' ist die Diagonale des Rechteckes $AmA'C'$ und drückt die Kraft aus, deren Componenten durch die Seiten mA, mA' dieses letzten Rechteckes ausgedrückt werden.

Wenn man bemerkt, daß $CC' = mA''$ ist, so gibt das rechtwinklige Dreieck $mC'C$:

$$\overline{mC}^2 = \overline{mA''}^2 + \overline{mC'}^2,$$

während das rechtwinklige Dreieck mAC' die Relation:

$$\overline{mC'}^2 = \overline{mA}^2 + \overline{AC'}^2 = \overline{mA'}^2$$

und wenn dieser Werth von $(mC)^2$ in die erste Gleichung substituirt wird; so erhält man:

$$(mC)^2 = (mA)^2 + (mA')^2 + (mA'')^2.$$

Wenn die gegebene Kraft durch R und ihre drei rechtwinkligen Componenten durch X, Y, Z bezeichnet werden, so hat man die allgemeine Formel:

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2, \; R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

welche den Werth der gegebenen Kraft als Function ihrer drei Componenten ausdrückt.

§. 19. Wir wollen nun den Werth jeder dieser Componenten als Function der gegebenen Kraft oder der Resultante suchen.

Durch a, b, c wollen wir die Winkel bezeichnen, welche die Richtung der gegebenen Kraft mit den drei rechtwinkligen Axen bildet, d. h. wir wollen der Kürze wegen $CmA = a$, $CmA' = b$, $CmA'' = c$ setzen; so geben die rechtwinkligen Dreiecke mAC, $mA'C$, $mA''C$ die Proportionen:

$$\begin{aligned} 1 : cos.\, a &= mC : mA = R : X = R\, cos.\, a \\ 1 : cos.\, b &= mC : mA' = R : Y = R\, cos.\, b \\ 1 : cos.\, c &= mC : mA'' = R : Z = R\, cos.\, c. \end{aligned}$$

Wenn von den in diesen Gleichungen vorkommenden drei Größen zwei gegeben sind, so ergibt sich daraus leicht der Werth der dritten und man kann z. B. die Werthe der Componenten berechnen, wenn man die Kraft R und die Winkel kennt, welche ihre Richtung mit den drei rechtwinkligen Axen bildet.

Wenn man die Quadrate der einander entsprechenden Theile der drei letzten Gleichungen zusammenaddirt, so erhält man:

$$R^2 (cos.^2 a + cos.^2 b + cos.^2 c) = X^2 + Y^2 + Z^2;$$

aber der erste Theil dieser Gleichung muß sich nach der Formel in §. 18 auf den ersten Factor R^2 reduciren, wozu erfordert wird, daß $cos.^2 a + cos.^2 b + cos.^2 c = 1$ ist, und diese Relation muß in der That zwischen den Quadraten der Cosinus der Winkel stattfinden, welche eine durch den Anfangspunct m gehende gerade Linie mit den drei rechtwinkligen Axen bildet.

Wenn die Richtung der Kraft R in der Ebene zweier Axen, z. B. in der Ebene der XY liegt, so hat man $Z = 0$, $cos.\, c = cos.\, 90^\circ = 0$, und die vorhergehenden Gleichungen verwandeln sich alsdann in:

$$R^2 = X^2 + Y^2, \; X = R\, cos.\, a, \; Y = R\, cos.\, b.$$

Diese Gleichungen erhält man direct, wenn man die nach den Seiten des Rechteckes $mAC'A$ wirkenden Kräfte und ihre durch die Diagonale dieses Rechteckes ausgedrückte Resultante betrachtet.

§. 20. Wir wollen nun die Resultante mehrerer auf denselben Punct wirkender Kräfte, deren Richtungen bekannte Winkel mit den drei rechtwinkligen Axen bilden, indem der Angriffspunct der gegebenen Kräfte zum Anfangspuncte genommen wird, suchen.

Die drei Kräfte P, P', P'' (Fig. 10) seien an dem Puncte m angebracht und wir wollen die Winkel DmX, DmY, DmZ, welche die Richtung der Kraft P mit den drei rechtwinkligen Axen mX, mY, mZ

bildet, mit α, β, γ und die analogen Winkel für die beiden andern Kräfte P', P'' resp. mit α', β', γ' und α'', β'', γ'' bezeichnen.

Jede dieser Kräfte P, P', P'' wollen wir in drei andere, nach den drei Axen mX, mY und mZ gerichtete zerlegen, so werden die Componenten dieser drei Kräfte P, P', P'' resp. durch folgende Producte ausgedrückt:

$$P\ cos.\ \alpha,\ P\ cos.\ \beta,\ P\ cos.\ \gamma,$$
$$P'\ cos.\ \alpha',\ P'\ cos.\ \beta',\ P'\ cos.\ \gamma',$$
$$P''\ cos.\ \alpha'',\ P''\ cos.\ \beta'',\ P''\ cos.\ \gamma''.$$

Diese Componenten können positiv oder negativ sein; im ersten Falle wirken sie nach den Axen und im zweiten Falle nach ihren Verlängerungen und in entgegengesetztem Sinne. Da z. B. die Richtung mD der Kraft P über der Ebene XmY liegt, und die Componente $md'' = P\ cos.\ \gamma$, welche nach mZ wirkt, den Punct m zu heben strebt; so ist $\gamma < 90°$ und das Product $P\ cos.\ \gamma$ positiv. Wenn die Richtung der Kraft P unter die Ebene XmY fiele, so wirkte die Componente $P\ cos.\ \gamma$ nach der Verlängerung mz der Axe und strebte, den Punct m niederwärts zu bewegen; es wäre $\gamma > 90°$ und diese Componente negativ. Hieraus sieht man, daß sich alle nach derselben Axe gerichteten Componenten auf eine einzige Kraft reduciren, welche die algebraische Summe aller dieser Componenten ist.

Wenn man die Summen der nach den drei aufeinander senkrechten Axen wirkenden Componenten der Kräfte P, P', P'' resp. durch X, Y, Z bezeichnet, so hat man:

$$X = P\ cos.\ \alpha + P'\ cos.\ \alpha' + P''\ cos.\ \alpha'',$$
$$Y = P\ cos.\ \beta + P'\ cos.\ \beta' + P''\ cos.\ \beta'',$$
$$Z = P\ cos.\ \gamma + P'\ cos.\ \gamma' + P''\ cos.\ \gamma''.$$

Diese Werthe von X, Y, Z können positiv oder negativ sein. Wenn die Kraft X positiv ist, so wirkt sie nach der Axe mX in dem Sinne der positiven Componenten, und wenn sie negativ ist, so wirkt sie nach der Verlängerung dieser Axe in dem Sinne der negativen Componenten.

Es bezeichne R die Resultante der drei Kräfte X, Y, Z oder der gegebenen Kräfte P, P', P''; so hat man, wenn man die Winkel, welche die unbekannte Richtung dieser Resultante mit den Axen mX, mY, mZ bildet, resp. mit a, b, c bezeichnet, die folgenden Gleichungen:

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2,\ R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

$$R\ cos.\ a = X,\ cos.\ a = \frac{X}{R},$$

$$R\ cos.\ b = Y,\ cos.\ b = \frac{Y}{R},$$

$$R\ cos.\ c = Z,\ cos.\ c = \frac{Z}{R}.$$

Die erste dieser Gleichungen gibt den Werth der Resultante und die drei andern dienen zur Bestimmung der Richtung der geraden Linie, nach welcher sie wirkt.

Wenn die Kräfte P, P', P'' im Gleichgewichte sind, so hat man die Gleichung:

$$\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = 0,$$

welche nur insofern stattfinden kann, als einzeln

$$X = 0,\ Y = 0,\ Z = 0$$

ist, weil die drei unter dem Wurzelzeichen vorkommenden Größen als Quadrate positiv sind und die Summe dreier positiver Größen nur dann $= 0$ sein kann, wenn jede dieser Größen für sich $= 0$ ist. Alsdann hat man:

$$\begin{aligned} P\cos.\alpha + P'\cos.\alpha' + P''\cos.\alpha'' &= 0,\\ P\cos.\beta + P'\cos.\beta' + P''\cos.\beta'' &= 0,\\ P\cos.\gamma + P'\cos.\gamma' + P''\cos.\gamma'' &= 0. \end{aligned}$$

Dieses sind die Gleichungen des Gleichgewichtes der Kräfte P, P', P'', welche auf einen freien materiellen Punct wirken, und sie drücken aus, daß die Summe der nach jeder Axe gerichteten Componenten $= 0$ sein muß, wenn das Gleichgewicht stattfinden soll.

Wenn zwischen den Kräften P, P', P'' das Gleichgewicht stattfindet, so ist jede derselben der Resultante aus den übrigen gleich und direct entgegengesetzt; denn wenn man für die Kräfte P', P'' ihre Resultante R' setzt, so hat man die beiden Kräfte P und R', welche einander das Gleichgewicht halten und folglich müssen diese beiden Kräfte einander gleich und direct entgegengesetzt sein.

Wenn alle Kräfte in derselben Ebene liegen, z. B. in der Ebene XmY, so liegt ihre Resultante auch in dieser Ebene, die mit γ, γ', γ'' bezeichneten Winkel sind rechte, und man hat folglich:

$$\begin{aligned} Z = 0,\ \cos.\gamma = 0,\ \cos.\gamma' = 0,\ \cos.\gamma'' &= 0,\\ X = P\cos.\alpha + P'\cos.\alpha' + P''\cos.\alpha'',&\\ Y = P\cos.\beta + P'\cos.\beta' + P''\cos.\beta''.& \end{aligned}$$

Diese Gleichungen erhielte man direct, wenn man jede der in der Ebene XmY liegenden Kräfte P, P', P'' in zwei andere nach den auf einander senkrechten Axen mX, mY zerlegte.

Wenn alle diese Kräfte im Gleichgewichte sind, so hat man:

$$\begin{aligned} P\cos.\alpha + P'\cos.\alpha' + P''\cos.\alpha'' &= 0,\\ P\cos.\beta + P'\cos.\beta' + P''\cos.\beta'' &= 0. \end{aligned}$$

Diese beiden Gleichungen drücken aus, daß die nach jeder Axe gerichteten Componenten einander gegenseitig aufheben.

Drittes Kapitel.

Zusammensetzung der an einem festen Körper angebrachten Kräfte.

§. 21. In dem vorhergehenden Kapitel haben wir uns mit dem Lehrsatze des Parallelogrammes der Kräfte beschäftigt und gesehen, daß derselbe die zur Zusammensetzung und Zerlegung der auf denselben Punct

wirkenden Kräfte die nöthigen Mittel an die Hand gibt. Vermittelst dieses Satzes und der Folgerungen, welche sich daraus ergeben, kann man die Gesetze des Gleichgewichtes eines materiellen Punctes bestimmen, wenn die auf denselben wirkenden Kräfte der Größe und Richtung nach bekannt sind. Wir wollen uns nun mit den Gleichgewichtsgesetzen eines festen Körpers von beliebiger Form, in dessen verschiedenen Puncten Kräfte angebracht sind, beschäftigen, und zunächst annehmen, daß die Richtungen aller dieser Kräfte in derselben Ebene liegen.

I. Von den parallelen Kräften.

Es seien P und Q (Fig. 11) zwei an den Enden E und F der unbiegsamen geraden Linie EF angebrachte Kräfte, deren Größen oder Intensitäten durch die auf ihren Richtungen genommenen Längen EA, FB ausgedrückt werden; so können zwei Fälle stattfinden, je nachdem die Richtungen der beiden Kräfte P und Q gegen die gerade Linie EF schief oder darauf senkrecht sind. Wir wollen zunächst den ersten Fall betrachten und dann zeigen, daß sich der zweite daraus ableiten läßt.

Wenn die Richtungen der Kräfte P und Q gegen die gerade Linie EF schief sind, so daß die Summe der Winkel, welche sie über dieser geraden Linie mit derselben bilden, kleiner ist, als zwei rechte Winkel; so können sie bis zu ihrem Durchschneiden im Puncte O verlängert werden und man kann den Angriffspunct jeder der beiden Kräfte P und Q in diesen Punct O verlegen (§. 6).

Wir wollen $Oa = EA$, $Ob = FB$ nehmen und das Parallelogramm $Oacb$ construiren, so ist die Diagonale Oc desselben die Resultante R der beiden Kräfte P und Q, und wenn man diese Diagonale verlängert, so schneidet sie die gerade Linie EF im Puncte I, welchen man für den Angriffspunct der Resultante R nehmen kann, deren Größe oder Intensität durch $IC = Oc$ ausgedrückt wird.

In dem Dreiecke Oac ist die Seite $ac = Ob$, der Winkel $acO = BOC$ und die Seiten sind den Sinus der ihnen gegenüberliegenden Winkel proportional, so daß man die Proportion hat:

$$P : Q = Oa : ac = \sin. BOC : \sin. AOC.$$

Wenn man von einem Puncte I in der Richtung der Resultante auf die Richtungen OA, OB der Kräfte P und Q die Perpendikel IG, IH fällt; so hat man:

$$OI : IG = 1 : \sin. AOC = \frac{IG}{OI},$$

$$OI : IH = 1 : \sin. BOC = \frac{IH}{OI},$$

und wenn man diese Werthe von $\sin. BOC$, $\sin. AOC$ substituirt, so verwandelt sich die erste Proportion in:

$$P : Q = IH : IG;$$

d. h. die Kräfte P, Q verhalten sich umgekehrt, wie die von irgend einem Puncte der Richtung ihrer Resultante auf ihre eigenen Richtungen gefällten Perpendikel.

Vergleicht man die Resultante mit einer der Componenten, so hat man die Proportion:

$$R : Q = sin.\, AOB : sin.\, AOC,$$

und wenn man von einem beliebigen Puncte h der Richtung der Kraft P auf die Richtungen der Resultante R und der Kraft Q die Perpendikel he, hf fällt; so hat man:

$$Oh : hf = 1 : sin.\, AOB = \frac{hf}{Oh},$$

$$Oh : he = 1 : sin.\, AOC = \frac{he}{Oh},$$

nnd wenn man endlich diese Werthe für $sin.\, AOB$, $sin.\, AOC$ substituirt, so kommt:

$$R : Q = hf : he.$$

Wenn man also zwei Kräfte und ihre Resultante hat, und man fällt von irgend einem in der Richtung einer dieser drei Kräfte genommenen Puncte Perpendikel auf die Richtungen der beiden andern Kräfte; so verhalten sich diese beiden letzten Kräfte umgekehrt, wie diese Perpendikel.

§. 22. Der eben bewiesene Lehrsatz findet statt, wie klein der von den Richtungen der Kräfte P und Q gebildete Winkel AOB auch sein mag, also auch an der Grenze dieses Winkels, d. h. wenn derselbe ganz verschwindet, was stattfindet, wenn man annimmt, daß sich die Richtung FB der Kraft Q um den Angriffspunct F dieser Kraft so lange drehet, bis sie die zu EA parallele Richtung FB annimmt; wo alsdann die Perpendikel IG, IH in derselben Richtung liegen und nur eine und dieselbe gerade Linie $H'G$ bilden. Die Richtung der Resultante R theilt diese gerade Linie in zwei Theile, welche sich umgekehrt, wie die Kräfte P, Q verhalten und man hat:

$$P : Q = IH' : IG,$$

$$P + Q : P = IH' + IG \text{ oder } GH' : IH' = \frac{GH' \times P}{P + Q}.$$

Dieser Werth von IH drückt die gegenseitige Entfernung der Richtung der Resultante und der Richtung FB' der Kraft Q aus, und zwar ist diese Entfernung immer dieselbe, welche Lage der Punct I auf OC auch haben mag, weil die Größen GH', P und Q constant sind. Die Richtung IC' der Resultante ist also zu denen der Componenten parallel.

Es ist nun noch der Werth oder die Größe der Resultante zu bestimmen, wenn die Richtungen der Componenten parallel sind. Betrachtet man $H'I$, $H'G$ als zwei von einem Puncte H' der Richtung der Kraft Q auf die Richtungen der Resultante R nnd der Kraft P gefällte Perpendikel, so verhalten sich diese beiden Kräfte umgekehrt, wie diese Perpendikel, so daß man hat:

$$R : P = H'G : H'I = \frac{H'G \times P}{R};$$

und wenn man diesen Werth von $H'I$ dem bereits früher gefundenen Werthe gleich setzt, so erhält man:

$$\frac{GH' \times P}{P+Q} = \frac{H'G \times P}{R}, \quad R = P + Q.$$

Wenn also zwei parallele Kräfte nach demselben Sinne wirken, so theilt 1) die Richtung der Resultante dieser Kräfte die gerade Linie, welche die gegenseitige Entfernung ihrer Richtungen mißt, in zwei Theile, welche sich umgekehrt, wie die beiden Componenten verhalten, und 2) ist die Richtung dieser Resultante zu denen der Componenten parallel und 3) ist der Werth oder die Größe der Resultante der Summe der beiden Componenten gleich.

§. 23. Aus diesem letzten Satze sieht man, daß die Zusammensetzung der parallelen Kräfte als ein specieller Fall der Zusammensetzung solcher Kräfte betrachtet werden kann, deren Richtungen sich in einem Puncte schneiden, wenn man annimmt, daß dieser Durchschnittspunct in unendlicher Entfernung liegt. Diese Allgemeinheit des Lehrsatzes vom Parallelogramm der Kräfte verdient wohl bemerkt zu werden; allein das Princip für die Zusammensetzung paralleler Kräfte läßt sich auch ohne Anwendung des Begriffes des Unendlichen beweisen.

Es seien P und Q (Fig. 12) zwei Kräfte, welche an den Enden der unbiegsamen geraden Linie MN nach demselben Sinne wirken, und durch die parallelen geraden Linien MA, NB der Größe und Richtung nach ausgedrückt werden; so kommt es darauf an, die Resultante dieser beiden Kräfte zu finden.

Ohne an dem Systeme etwas zu ändern, können wir in den Endpuncten der geraden Linie MN zwei gleiche und entgegengesetzte Kräfte p, q anbringen, welche durch die gleichen geraden Linien MM', NN' ausgedrückt werden, dann die Parallelogramme $MAA'M'$, $NBB'N'$ construiren und die Diagonalen MA', NB' ziehen, welche wir bis zu ihrem Durchschneiden in O verlängern wollen.

Die Resultante P' der Kräfte P und p wird der Größe und Richtung nach durch die Diagonale MA' und die Resultante Q' der Kräfte Q und q durch die Diagonale NB' ausgedrückt, und wenn wir diese beiden Resultanten im Puncte O anbringen, so wird die erste durch $Oa' = MA'$ und die zweite durch $Ob' = NB'$ ausgedrückt. Durch den Punct O wollen wir die beiden geraden Linien $M''N''$, OC ziehen, welche resp. zu MN, MA parallel sind, dann $OM'' = MM'$, $ON'' = NN'$ nehmen und die Parallelogramme $OM''a'a$, $ON''b'b$ construiren; so können wir für die beiden Resultanten P', Q' ihre Componenten p, P, q, Q, welche an dem Puncte O angebracht sind, substituiren. Die beiden gleichen und entgegengesetzten Kräfte p, q heben einander gegenseitig auf, und die beiden andern Kräfte P, Q, welche nach derselben Richtung OC wirken, bilden die gesuchte Resultante, so daß man hat:

$$P + Q = R.$$

Die Resultante R zweier in demselben Sinne wirkender paralleler Kräfte P und Q ist also ihrer Summe gleich und ihre Richtung zu denen der Componenten parallel.

§. 24. Um den Punct L zu bestimmen, wo die Richtung der Resultante R der Kräfte P und Q die gerade Linie MN trifft, wollen wir bemerken, daß die Kräfte P und p durch die geraden Linien Oa, aa' ausgedrückt werden, und daß die ähnlichen Dreiecke Oaa', OLM die Proportion geben:

$$P : p = OL : LM,$$

während die Kräfte Q und q durch die geraden Linien Ob, bb' ausgedrückt werden, und die ähnlichen Dreiecke Obb', OLN folgende Proportion geben:

$$q : Q = LN : OL.$$

Multiplicirt man nun die correspondirenden Glieder dieser beiden Proportionen in einander und läßt die gemeinschaftlichen Factoren in den beiden Gliedern jedes Verhältnisses hinweg, so erhält man:

$$P : Q = LN : LM,$$

d. h. die Richtung der Resultante der beiden Kräfte P und Q theilt die zwischen ihren Richtungen liegende gerade Linie MN in zwei Theile, welche diesen Kräften umgekehrt proportional sind.

Der eben bewiesene Satz ist unabhängig von dem Winkel, welchen die gerade Linie MN mit der Richtung jeder Componente bildet, und folglich findet dieser Satz statt, welche Lage die gerade Linie MN zwischen diesen Richtungen auch haben mag.

Die letzte Proportion gibt:

$$P : P + Q = LN : LN + LM,$$
$$Q : P + Q = LM : LN + LM,$$

und wenn man diese beiden Proportionen mit einander verbindet, indem man bemerkt, daß $P + Q = R$ und $LN + LM = MN$ ist, so erhält man:

$$P : Q : R = LN : LM : MN,$$

woraus hervorgeht, daß jede der Kräfte P, Q und R dem zwischen den Richtungen der beiden andern Kräfte liegenden Theile der geraden Linie MN proportional ist.

Um also zwei parallelen Kräften P, Q, welche in demselben Sinne wirken und an den Enden einer unbiegsamen geraden Linie MN angebracht sind, das Gleichgewicht zu halten, muß man diese gerade Linie in zwei Theile LM, LN theilen, welche sich umgekehrt wie die gegebenen Kräfte P und Q verhalten und an dem Theilungspuncte L eine ihrer Summe $P + Q$ oder ihrer Resultante R gleiche und entgegengesetzte Kraft anbringen.

Wenn in einem freien Systeme die Kräfte gegenseitig einander nicht aufheben, so wird das Gleichgewicht hergestellt, wenn man noch eine Kraft hinzufügt, welche der Resultante gleich und entgegengesetzt ist. Wenn das System nicht frei wäre und sich in dem Puncte L, wo die Resultante angebracht werden muß, ein Hinderniß befände, welches die Wirkung der Kräfte P und Q aufheben könnte; so würde das Gleichgewicht stattfinden, ohne daß man noch eine Kraft hinzuzufügen brauchte.

Der Angriffspunct L oder die Entfernung NL ist leicht zu finden; denn man hat:

$$P + Q : P = MN : NL = \frac{MN \times P}{P + Q}.$$

§. 25. Man kann der gefundenen allgemeinen Proportion eine für die Rechnung bequemere Form geben; denn bezeichnet man die Länge der zwischen den Richtungen der parallelen Kräfte P und Q liegenden geraden Linie MN mit n und die zwischen jeder dieser Kräfte und ihrer Resultante R liegenden Theile LM, LN dieser geraden Linie mit p, q; so hat man:

$$P : Q : R = q : p : n,$$

folglich:

$$Pp = Qq.$$

Diese Gleichung und die in §. 23 geben das Mittel an die Hand, zwei der sechs Größen P, Q, R, p, q, n zu finden, wenn die vier übrigen bekannt sind, wie man bei der Auflösung der folgenden Aufgaben sehn wird.

§. 26. Aufgabe. Man soll eine Kraft R in zwei andere P und Q zerlegen, welche an zwei gegebenen Puncten angebracht sind und nach geraden Linien wirken, die zu der Richtung der gegebenen Kraft parallel laufen.

Auflösung. Die Kräfte P und Q sind in diesem Falle die in den Gleichungen:

$$P + Q = R,\ Pp = Qq$$

vorkommenden unbekannten Größen, welche durch diese Gleichungen bestimmt werden. Die erste Gleichung gibt $Q = R - P$, und wenn dieser Werth von Q in die zweite Gleichung substituirt wird, so erhält man:

$$Pp = Rq - Pq,$$

folglich:

$$P = \frac{Rq}{p + q},$$

und wenn man endlich diesen Werth von P in die erste Gleichung substituirt, so gibt sie:

$$Q = R - \frac{Rq}{p+q} = \frac{Rp + Rq - Rq}{p+q} = \frac{Rp}{p+q}.$$

Die Längen der geraden Linien, welche die Werthe der Kräfte P und Q ausdrücken, werden gefunden, wenn man vierte Proportionalen sucht; denn die eben gefundenen Resultate enthalten die folgenden Proportionen, worin die drei ersten Glieder bekannt sind:

$$p + q : q = R : P,\ p + q : p = R : Q.$$

Aufgabe. Wenn man die Resultante R und eine der Componenten der beiden parallelen Kräfte, nämlich P kennt, die andere Componente Q und ihren Angriffspunct zu finden.

Auflösung. In diesem Falle sind die Größen R, P und p gegeben und es kommen in den beiden Gleichungen:

$$P + Q = R,\ Pp = Qq$$

nur die beiden unbekannten Größen Q, q vor. Durch dasselbe Substitutionsverfahren wie im vorhergehenden Falle, erhält man:

$$Q = R - P,\ Pp = (R - P)\,q,\ q = \frac{Pp}{R - P}.$$

Die Zerlegung einer Kraft in zwei andere zu ihr parallele Kräfte findet bei der Bestimmung der von einem schweren Körper auf zwei bestimmte Puncte ausgeübten Druckkräfte ihre Anwendung, und in der Folge werden wir sehen, welche Anwendung man von dieser Zerlegung der Kräfte bei der Berechnung der auf Unterlager ausgeübten Druckkräfte überhaupt machen kann, damit die Unterlager oder Träger die erforderliche Stärke bekommen.

§. 27. Aufg. Man soll die Resultante zweier paralleler nach entgegengesetztem Sinne wirkender Kräfte, so wie den Angriffspunct dieser Resultante bestimmen.

Aufl. Es seien P und Q (Fig. 13) zwei an den Puncten M und N der starren geraden Linie MN angebrachte parallele und nach entgegengesetztem Sinne wirkende Kräfte. Die größte Q dieser beiden Kräfte wollen wir in zwei andere P' und R zerlegen, wovon die erste P' der Kraft P gleich und direct entgegengesetzt ist, und es kommt darauf an, auf der Verlängerung der geraden Linie MN den Punct O zu finden, worin die Kraft $R = Q - P'$ angebracht werden muß.

Jede der drei Kräfte P', Q und $R = Q - P'$ ist dem zwischen den Richtungen der beiden andern Kräfte liegenden Theile der geraden Linie MNO proportional, so daß man die Proportion hat:

$$R : P' = MN : NO,$$

worin die drei ersten Glieder bekannt sind, und um das vierte zu finden, trage man auf die Richtung der Kraft P' die Längen Mc, cb, die den geraden Linien gleich sind, welche die Werthe der Kräfte R und P ausdrücken, ziehe dann die Linie cN und durch den Punct b eine Parallele zu der geraden Linie cN; so ist der Durchschnittspunct O dieser Parallele mit der Verlängerung von MN der Punct, wodurch das vierte Glied NO der obigen Proportion bestimmt wird, und man kennt folglich den Punct O, worin die zweite Componente der Kraft Q angebracht werden muß.

Substituirt man nun für die Kraft Q ihre beiden Componenten P' und $R = Q - P'$, so hebt die erste die Kraft P auf, weil sie ihr gleich und direct entgegengesetzt ist, und es bleibt nur noch die Kraft R übrig, welche folglich die Resultante aus den beiden gegebenen Kräften P und Q ist.

Die Resultante zweier paralleler und nach entgegengesetztem Sinne wirkender Kräfte ist also dem Unterschiede dieser Kräfte gleich, wirkt in dem Sinne der größern und hat eine zu den Richtungen der Componenten parallele Richtung.

§. 28. Wenn die nach entgegengesetztem Sinne wirkenden parallelen Kräfte P und Q einander gleich sind und man substituirt den Werth von $R = Q - P$ in die Proportion:

$$R : P = MN : NO,$$

so kommt: $$NO = \frac{MN \times P}{Q - P} = \frac{MN \times P}{0}.$$

Diese Formel zeigt, daß die Resultante eine Kraft $= 0$ sei, deren Angriffspunct in einer unendlichen Entfernung liegen würde. In der That können zwei gleiche und parallele Kräfte, welche nach entgegengesetztem Sinne wirken und einander nicht direct entgegengesetzt sind, keine Resultante haben; denn wenn sie eine solche hätten, so wäre kein Grund vorhanden, weshalb diese Resultante eher in dem Sinne der einen, als in dem Sinne der andern Componente wirken sollte. Die Kräfte P und Q hätten also zwei gleiche und direct entgegengesetzte Resultanten, so daß die Endresultante Null wäre, und ihr Angriffspunct müßte im Endpuncte der geraden Linie NO liegen, deren Länge durch einen Bruch ausgedrückt wird, dessen Nenner Null ist, welches der Ausdruck einer unendlich großen Größe ist.

Obgleich zwei gleiche, parallele und nach entgegengesetztem Sinne wirkende Kräfte nicht in eine einzige zusammengesetzt werden können, welche ihnen an Wirkung gleich ist, so führt die Betrachtung dieses besondern Falles doch auf höchst interessante Resultate. Poinsot nennt ein solches System von Kräften ein Kräftepaar und aus der Verbindung mehrerer solcher Kräftepaare hat er eine Theorie des Gleichgewichts abgeleitet, welche einen der Haupttheile seiner Elemente der Statik bildet, auf welches classische Werk wir diejenigen Leser verweisen, welche diesen neuen Zweig der Mechanik studiren wollen.

Ueber die vorhin bewiesenen Sätze sind mehrere Bemerkungen zu machen.

Zwei parallele Kräfte wirken in einer Ebene, deren Lage durch die Richtungen dieser Kräfte bestimmt wird, und die Richtung ihrer Resultante liegt in derselben Ebene; denn wenn sie außerhalb dieser Ebene auf einer Seite derselben läge, so wäre kein Grund vorhanden, weswegen sie nicht eben sowohl auf der entgegengesetzten Seite liegen sollte. Nach dieser Annahme könnte es also zwei Resultanten geben; aber da es doch nur eine einzige geben kann, so muß sie nach einer in der Ebene der Componenten liegenden geraden Linie gerichtet sein.

Zwei parallele Kräfte P, Q und ihre Resultante R sind immer so beschaffen, daß die größte dieser drei Kräfte nach einer geraden Linie wirkt, welche zwischen den Richtungen der beiden andern liegt.

Wenn die beiden parallelen Kräfte P und Q in demselben Sinne wirken, so ist $R = P + Q$ und die Richtung dieser Resultante liegt zwischen denen der Componenten. Wenn die Kräfte P und Q nach entgegengesetztem Sinne wirken, so liegt die Richtung der größten zwischen der Richtung der Resultante und der der anderen Kraft.

Die Proportion $P : Q = q : p$ gibt $Pp = Qq$, und diese Gleichung ist unabhängig von dem Winkel, welchen die Richtungen der parallelen Kräfte P und Q mit der zwischen diesen Richtungen liegenden geraden Linie $MN = p + q$ bildet.

Wenn MN eine unbiegsame gerade Linie ist, welche auf einem Unterstützungspuncte ruht, der sie in zwei Theile p und q theilt, und man hängt an den Enden dieser geraden Linie zwei Gewichte P und Q auf, welche sich umgekehrt, wie die Linien p und q verhalten, so daß man die Gleichung $Pp = Qq$ hat, welche sich aus der obigen Proportion ergibt; so sind diese beiden Gewichte im Gleichgewichte. Diese Gleichung drückt das Princip des Gleichgewichtes des Hebels

und aller davon abhängigen Maschinen aus und ist von Archimedes entdeckt.

§. 29. Aufg. Man soll die Resultante mehrerer auf einen festen Körper wirkender paralleler Kräfte finden.

Aufl. Es seien die drei parallelen Kräfte P, P', P'' (Fig. 14) gegeben, welche an den Puncten A, A', A'' des Durchschnittes MN eines festen Körpers angebracht sind und durch die auf ihren Richtungen genommenen Längen AB, $A'B'$, $A''B''$ ausgedrückt werden.

Die Resultante der beiden parallelen Kräfte P, P' ist ihrer Summe gleich, und um ihren Angriffspunct zu finden, wollen wir zunächst die gerade Linie AA' ziehen, welche die Angriffspuncte der Kräfte P, P' verbindet, so gibt das vierte Glied der Proportion:

$$P + P' : P = AA' : x$$

den Punct der geraden Linie AA', worin die Resultante angebracht werden muß.

Auf der nöthigenfalls verlängerten Richtung der Kraft P' wollen wir die Längen $A'e = AB = P$, $ef = A'B' = P'$ nehmen, die Puncte f und A miteinander verbinden und durch den Punct e eine Parallele zu fA ziehen, so bestimmt der Punct E, wo diese Parallele die gerade Linie AA' trifft, den Werth von $x = A'E$ und ist der Angriffspunct der Resultante der beiden Kräfte P und P'. Diese Resultante wirkt nach einer zu den Componenten parallelen Richtung und ist ihrer Summe gleich. Um also die Construction zu vollenden, muß man durch den Punct E zu den Richtungen der Kräfte P, P' eine parallele gerade Linie ziehen und EC gleich der Summe der geraden Linie nehmen, welche diese beiden Kräfte ausdrücken.

Verbindet man den Angriffspunct der Resultante der beiden ersten Kräfte mit dem der dritten durch die gerade Linie EA'' und wiederholt dieselben Constructionen; so findet man, daß die beiden Kräfte Q und P'' oder die drei Kräfte P, P', P'' eine Kraft R zur Resultante haben, welche durch die gerade Linie FD ausgedrückt wird.

Wenn außer den drei Kräften, welche wir eben zusammengesetzt haben, noch andere parallele Kräfte an den festen Körper angebracht wären, wovon MN einen Durchschnitt darstellt; so fände man die Resultante aller dieser Kräfte durch dasselbe Verfahren; denn wenn man die Resultante der drei ersten Kräfte mit der vierten zusammensetzte, so erhielte man die Resultante dieser vier Kräfte. Um ferner die Resultante von fünf Kräften zu erhalten, müßte man die der vier ersten mit der fünften Kraft zusammensetzen u. s. f.

Die Angriffspuncte der drei Kräfte P, P', P'' liegen in derselben Ebene, weil die Lage einer Ebene durch drei nicht in derselben geraden Linie liegenden Puncte vollständig bestimmt wird; und in dieser Ebene liegt auch der Angriffspunct F der Resultante der drei gegebenen Kräfte. Allgemein, wenn an derselben Ebene eine beliebige Anzahl von Kräften angebracht ist, so liegt der Angriffspunct ihrer Resultante auch in dieser Ebene, und wenn mehrere parallele Kräfte an verschiedenen Puncten derselben geraden Linie angebracht sind, so liegt der Angriffspunct ihrer Resultante auch in dieser geraden Linie.

Die drei vorhin zusammengesetzten Kräfte P, P', P'' können durch ihre Resultante R ersetzt werden, und wenn man noch eine

Kraft S hinzufügt, welche dieser Resultante gleich und entgegengesetzt ist, so bleibt das System im Gleichgewichte.

Wenn die von einem festen Körper angebrachten parallelen Kräfte nicht alle in demselben Sinne wirken, so sucht man nach dem angegebenen Verfahren die Resultante aus allen in demselben Sinne wirkenden Kräften und dann die Resultante der nach entgegengesetztem Sinne wirkenden Kräfte, wodurch das ganze System von Kräften auf zwei nach entgegengesetztem Sinne wirkende Kräfte zurückgeführt wird, und wenn diese beiden Kräfte ungleich sind, so setzt man sie in eine einzige zusammen (§. 27), welche die Resultante aller Kräfte des Systemes ist. Diese Resultante ist der Differenz zwischen der Summe der nach einem Sinne wirkenden Kräfte und der Summe der nach entgegengesetztem Sinne wirkenden Kräfte gleich.

Wenn die nach entgegengesetztem Sinne wirkenden beiden parallelen Resultanten einander gleich und nicht direct entgegengesetzt sind, so lassen sie sich nicht in eine einzige zusammensetzen, d. h. das System kann nicht durch eine einzige Kraft im Gleichgewichte gehalten werden (§. 28).

Wenn sich die an dem festen Körper MN angebrachten Kräfte P, P', P'' gleichzeitig um ihre Angriffspuncte A, A', A'' drehen, indem sie zu einander parallel bleiben und dieselben Werthe behalten; so werden die in dieser neuen Richtung mit p, p', p'' bezeichneten Kräfte noch ganz auf dieselbe Weise zusammengesetzt. Denn die Resultante q der beiden parallelen Kräfte p, p' ist ihrer Summe gleich und wirkt nach einer geraden Linie, welche zu ihren Richtungen parallel ist und die gerade Linie AA' in zwei Theile theilt, die sich umgekehrt wie die Kräfte p und p' verhalten. Man kann also diesen Durchschnittspunct zum Angriffspuncte dieser Resultante nehmen und derselbe fällt mit dem Puncte E zusammen. Ebenso beweist man, daß die Resultante r der drei Kräfte p, p', p'', welche ihrer Summe gleich ist, denselben Punct F der geraden Linie EA'' als die Resultante R der drei Kräfte P, P', P'' zum Angriffspuncte hat, und wenn man eine größere Anzahl paralleler Kräfte betrachtete, so würde der Angriffspunct ihrer Resultante bei allen gleichzeitigen und gleichgroßen Veränderungen ihrer Richtung derselbe bleiben. Wenn alle diese Kräfte in demselben Verhältnisse vergrößert oder verkleinert würden, so würde dadurch zwar die Größe der Resultante, aber nicht die Lage ihres Angriffspunctes verändert. Dieser merkwürdige Punct wird der Mittelpunct der parallelen Kräfte genannt, und wir werden später eine Anwendung desselben bei den der Wirkung der Schwere unterworfenen Körpern kennen lernen.

Wenn auf einen festen Körper eine beliebige Anzahl paralleler Kräfte wirken, deren Mittelpunct man bestimmt, so bleibt der Körper, wenn man diesen Punct fixirt, in allen Lagen um denselben im Gleichgewichte, wofern die Angriffspuncte dieser Kräfte dieselben und die Richtungen derselben zu einander parallel bleiben; denn die Resultante dieser Kräfte wird aufgehoben, weil sie beständig durch denselben festen Punct geht.

§. 30. Der Mittelpunct eines Systemes paralleler Kräfte läßt sich sehr leicht durch Rechnung bestimmen, wie groß die Anzahl dieser

Kräfte auch sein mag, und wir wollen nun die allgemeinen Formeln abzuleiten suchen, welche zur Auflösung dieser Aufgabe dienen.

Es seien M, M', M'' (Fig. 14ª) die Angriffspuncte der drei parallelen Kräfte P, P', P'' und wir wollen drei aufeinander senkrechte Axen OX, OY, OZ so annehmen, daß die Axe OZ zu den Richtungen der Kräfte parallel ist, und wenn diese Richtungen verlängert werden, so treffen sie die Ebene der Axen OX, OY oder die Ebene der x, y in den Puncten E, E', E''. Wir wollen die gerade Linnie MM' ziehen und die beiden Kräfte P, P' in eine zusammensetzen, so haben wir die Proportion:

$$P + P' : P'' = MM' : MN,$$

welche den Angriffspunct N der Resultante Q der beiden Kräfte P und P' gibt, indem diese Resultante nach der geraden Linie NF wirkt, welche zu den Richtungen der Componenten parallel ist und die Ebene der x, y in dem Puncte F trifft.

Die Projectionen der Angriffspuncte M, N und M' auf die Ebene der x, y liegen in derselben geraden Linie EFE'. Durch den Punct M wollen wir MH parallel zu EE' ziehen, so ist $ME = GF = HE'$ und das rechtwinklige Dreieck MHM' gibt:

$$MM' : MN = M'H : NG.$$

Wenn man das zweite Verhältniß dieser Proportion für das der vorhergehenden substituirt, so erhält man die Gleichung:

$$(P + P') \times NG = P' \times M'H,$$

und wenn man zu derselben die identische Gleichung:

$$(P + P') \times (GF) = P \times (ME) + P' \times HE'$$

addirt, indem man bemerkt, daß $ME = z$ und $M'H + HE' = M'E' = z'$ ist; so erhält man:

$$(P + P') \times (NF) = Pz + P'z'.$$

Wenn man die Angriffspuncte N und M'' durch die gerade Linie NM'' verbindet, so findet man den auf dieser Linie liegenden Angriffspunct der Resultante aus den Kräften $Q = P + P'$ und P'' durch folgende Proportion:

$$P + P' + P'' : P'' = M''N : NN',$$

und die Resultante aus diesen drei Kräften ist nach der durch den Punct N' zu den Componenten parallel gezogenen geraden Linie gerichtet, welche die Ebene der x, y im Puncte F' trifft, also auf der geraden Linie FE'' liegt. Durch den Punct N wollen wir NH' zu dieser geraden Linie parallel ziehen, so haben wir:

$$M''N : NN' = M''H' : N'G',$$

und diese beiden Proportionen geben:

$$(P + P' + P'') \times (N'G') = P'' \times (M''H').$$

Addirt man diese Gleichung zu der identischen Gleichung:

$$(P + P' + P'') \times (G'F') = (P + P') \times (NF) + P'' \times (H'E''),$$

so erhält man:

$$(P + P' + P'') \times N'F' = (P + P') \times (NF) + P'' \times (M''E'')$$
$$= Pz + P'z' + P''z''.$$

Ebenso könnte man eine vierte Kraft mit den drei ersten, eine fünfte mit den vier ersten u. s. w. zusammensetzen.

Es sei R die Resultante aus allen gegebenen parallelen Kräften, so hat man, wenn Z die Ordinate des Angriffspunctes dieser Resultante bezeichnet:

$$R = P + P' + P'' + etc.,$$
$$RZ = Pz + P'z' + P''z'' + etc.$$

Die erste dieser Gleichungen drückt aus, daß die Resultante aus einer beliebigen Anzahl paralleler und in demselben Sinne wirkender Kräfte der Summe der Componenten gleich ist, und die zweite Gleichung gibt die Entfernung des Mittelpunctes der parallelen Kräfte von der Ebene der x, y, wenn man die Intensitäten dieser Kräfte und die von ihren Angriffspuncten auf diese Ebene gefällten Perpendikel kennt.

Wir haben vorausgesetzt, daß alle Kräfte in demselben Sinne wirken und daß ihre Angriffspuncte sämmtlich über der Ebene der x, y liegen, so daß alle Glieder der vorhergehenden Gleichung positiv sind. Wenn die Kräfte nicht alle in demselben Sinne wirkten, so müßte man den Sinn ihrer Wirkung in Betracht ziehen, und wenn man die in dem einen Sinne wirkenden Kräfte als positiv betrachtet, so müssen die nach dem entgegengesetzten Sinne wirkenden als negativ betrachtet und mit dem Zeichen — genommen werden. Dasselbe gilt in Beziehung auf die Angriffspuncte, so daß die Ordinaten der über und unter der Ebene der x, y liegenden resp. positiv und negativ genommen werden müßten.

Das Product aus einer Kraft und der Entfernung ihres Angriffspunctes von einer festen Ebene ist eine Größe, welche bei den Untersuchungen über das Gleichgewicht der Kräfte oft in Betracht kommt, und man hat dasselbe daher mit einem besondern Namen bezeichnet und Moment der Kraft in Beziehung auf die Ebene genannt. So ist z. B. das Product $R.Z$ das Moment der Resultante R der Kräfte P, P', P'', *etc.* in Beziehung auf die Ebene der x, y, und die Producte Pz, $P'z'$, $P''z''$, *etc.* sind die Momente der Componenten in Beziehung auf dieselbe Ebene, und die zuletzt erhaltene Gleichung zeigt, daß das Moment der Resultante aus einer beliebigen Anzahl paralleler Kräfte in Beziehung auf eine Ebene der Summe der Momente dieser Kräfte in Beziehung auf dieselbe Ebene gleich ist.

Das Moment einer Kraft ist positiv, wenn diese Kraft und das von ihrem Angriffspuncte auf die betrachtete Ebene gefällte Perpendikel dasselbe Zeichen haben, und es ist im Gegentheile negativ, wenn diese beiden Größen entgegengesetzte Zeichen haben.

Wenn man die Momente der Kräfte P, P', P'', *etc.* successive auch in Beziehung auf die Ebenen der y, z und der x, z nimmt, so erhält man noch die beiden folgenden Gleichungen:

$$RX = Px + P'x' + P''x'' + etc.,$$
$$RY = Py + P'y' + P''y'' + etc.$$

Man hat also zur Bestimmung der Lage des Mittelpunctes einer beliebigen Anzahl paralleler Kräfte drei Gleichungen und die, welche wir direct in Beziehung auf die Ebene der x, y erhalten haben, gibt:

$$Z = \frac{Pz + P'z' + P''z'' + etc.}{R}.$$

Dieser Werth von Z ist zur Bestimmung der Lage des Mittelpunctes der parallelen Kräfte nicht hinreichend; denn derselbe drückt bloß aus, daß dieser Punct in einer Ebene liegt, welche zu der der x, y parallel und um Z davon entfernt ist. Aber die beiden andern Gleichungen drücken aus, daß dieser Mittelpunct der parallelen Kräfte sich auch in zwei andern Ebenen befindet, wovon die eine in der Entfernung X zu der Ebene der y, z und die andere in der Entfenung Y zu der Ebene der x, z parallel ist. Der Mittelpunct der parallelen Kräfte liegt also in dem gemeinschaftlichen Durchschnittspuncte dieser drei Ebenen.

Die Resultante aus den parallelen Kräften P, P', P'', *etc.* ist nach einer zu ihrer gemeinschaftlichen Richtung durch ihren Mittelpunct gezogenen parallelen geraden Linie gerichtet und der Summe dieser Kräfte gleich, wenn sie alle nach demselben Sinne wirken, und wenn dieses nicht der Fall ist, so wird die Größe dieser Resultante durch die Differenz zwischen der Summe der nach einem Sinne und der Summe der nach entgegengesetztem Sinne wirkenden Kräfte ausgedrückt und wirkt nach dem Sinne der größern Summe.

Die Summe der Momente der parallelen Kräfte P, P', P'', *etc.* ist in Beziehung auf jede durch den Mittelpunct dieser Kräfte gehende Ebene $= 0$. Denn wenn z. B. der Mittelpunct der parallelen Kräfte in der Ebene der x, y oder in einer dazu parallelen Ebene liegt und man nimmt die Momente in Beziehung auf diese Ebene, so hat man:

$$Z = 0, \quad Pz + P'z' + P''z'' + etc. = 0.$$

Wenn sich die parallelen Kräfte auf zwei gleiche nach entgegengesetztem Sinne wirkende, aber einander nicht direct entgegengesetzte reduciren, so haben sie keinen Mittelpunct; denn ihre Resultante R ist $= 0$ und die Coordinaten X, Y, Z dieses Mittelpunctes sind unendlich groß, weil ihre aus den vorhergehenden Gleichungen abgeleiteten Werthe unter der Form eines Bruches erscheinen, dessen Nenner Null ist.

Wenn die Angriffspuncte M, M', M'', *etc.* der parallelen Kräfte in einer gegebenen Ebene, z. B. in der Ebene der x, y liegen; so liegt der Mittelpunct dieser Kräfte, wenn er existirt, auch in dieser Ebene, und man hat alsdann $z = 0$, $z' = 0$, $z'' = 0$, *etc.*, und folglich $Z = 0$. Die Lage dieses Mittelpunctes ist alsdann nur noch von zwei Coordinaten X und Y abhängig, welche durch die beiden Gleichungen:

$$RX = Px + P'x' + P''x'' + etc.,$$
$$RY = Py + P'y' + P''y'' + etc.$$

bestimmt werden.

Wenn die Angriffspuncte M, M', M'', *etc.* der parallelen Kräfte in derselben geraden Linie liegen, so liegt auch ihr Mittelpunct in dieser geraden Linie, und um denselben zu finden, braucht man nur seine Entfernung von einem auf dieser Linie genommenen beliebigen festen Puncte zu bestimmen.

Wenn man die gerade Linie, worauf sich die Angriffspuncte der Kräfte befinden, zur Axe der x nimmt; so hat man:

$$z = 0,\ z' = 0,\ etc.\ \text{und}\ Z = 0$$
$$y = 0,\ y' = 0,\ etc.\ \text{und}\ Y = 0.$$

Die Entfernung **X** des Anfangspunctes *O* vom Mittelpuncte der parallelen Kräfte wird durch folgende Gleichung bestimmt:

$$X = \frac{Px + P'x' + P''x'' + etc.}{R}.$$

Wenn die Angriffspuncte der Kräfte zu beiden Seiten des für den Anfangspunct der Entfernungen genommenen Punctes *O* liegen, und die Werthe dieser Entfernungen oder der Abscissen x, x', x'', *etc.* werden in der Richtung *OX* als positiv betrachtet; so müssen sie in der entgegengesetzten Richtung als negativ angesehen werden.

II. Von den Momenten.

§. 31. Moment einer Kraft in Beziehung auf einen Punct nennt man das Product aus dieser Kraft und den von diesem Puncte auf ihre Richtung gefällten Perpendikel, und der Punct, aus welchem auf die Richtungen mehrerer Kräfte die Perpendikel gefällt werden, wird der Mittelpunct der Momente dieser Kräfte genannt.

Das Moment der Mittelkraft aus zwei Kräften, deren Richtungen einen Winkel mit einander bilden in Beziehung auf einen außerhalb dieses Winkels genommenen Punct ihrer Ebene, ist gleich der Summe der Momente dieser Kräfte, und wenn der Mittelpunct der Momente innerhalb des erwähnten Winkels genommen wird, so ist das Moment der Resultante gleich der Differenz der Momente der betrachteten Kräfte.

Erster Fall. — Es seien P, P' (Fig. 15) zwei Kräfte, welche durch die geraden Linien mA, mA' ausgedrückt werden, und R sei ihre durch mB dargestellte Resultante. Wir wollen zunächst den Mittelpunct C der Momente außerhalb des von den Richtungen der Kräfte **P**, **P'** gebildeten Winkels AmA' annehmen, die gerade Linie Cm ziehen und durch den Punct m die Linie KL senkrecht auf Cm ziehen.

Jede der gegebenen Kräfte **P**, **P'** wollen wir in zwei andere, auf einander senkrechte Kräfte zerlegen, wovon die eine nach KL und die andere nach mC gerichtet ist. Betrachtet man die nach KL gerichteten Componenten, so hat man:

$$R\ cos.\ BmL = P\ cos.\ AmL + P'\ cos.\ A'mL,$$

und da der Winkel BmL das Complement von BmC ist, so hat man:

$$cos.\ BmL = sin.\ BmC,$$

und das rechtwinklige Dreieck mbC gibt:

$$mC : Cb = 1 : sin.\ BmC = \frac{Cb}{mC}.$$

Ebenso ergibt sich:

$$cos.\ AmL = sin.\ AmC = \frac{Ca}{mC},$$

$$cos.\ A'mL = sin.\ A'mC = \frac{Ca'}{mC}.$$

Diese Werthe in die vorhergehende Gleichung subſtituirt, ſo erhält man:

$$R \times \frac{Cb}{mC} = P \times \frac{Ca}{mC} + P' \times \frac{Ca'}{mC}.$$

Läßt man den allen Gliedern dieſer Gleichung gemeinſchaftlichen Nenner mC hinweg und ſetzt der Kürze wegen:

$$Cb = q,\ Ca = p,\ Ca' = p',$$

ſo kommt:

$$Rq = Pp + P'p'.$$

Zweiter Fall. — Wenn der Mittelpunct C der Momente innerhalb des von den Richtungen der beiden Kräfte P, P' (Fig. 16) gebildeten Winkels AmA' liegt, ſo hat man wieder die allgemeine Formel:

$$R \cos. BmL = P \cos. AmL + P' \cos. A'mL;$$

aber aus der Figur ſieht man, daß die beiden Winkel BmL, AmL ſtumpfe ſind, gleiche Coſinus haben, deren Zeichen denen der Coſinus der Winkel BmK, AmK, welche die Supplemente der erſten ſind, entgegengeſetzt ſind, ſo daß ſich die vorhergehende Formel in folgende verwandelt:

$$R \cos. BmK = P \cos. AmK - P' \cos. A'mL$$

Ferner hat man, wie im erſten Falle:

$$\cos. BmK = \sin. BmC = \frac{Cb}{mC} = \frac{q}{mC'},$$

$$\cos. AmK = \sin. AmC = \frac{Ca}{mC} = \frac{p}{mC'},$$

$$\cos. A'mL = \sin. A'mC = \frac{Ca'}{mC} = \frac{p'}{mC'},$$

und wenn man dieſe Werthe in die letzte Gleichung subſtituirt und den gemeinſchaftlichen Nenner mC hinweg läßt, ſo erhält man:

$$Rq = Pp - P'p'.$$

Dieſe beiden Fälle ſind in folgender Formel:

$$Rq = Pp \pm P'p'$$

enthalten, welche ausdrückt, daß das Moment der Reſultante zweier Kräfte der Summe oder Differenz der Momente dieſer Kräfte gleich iſt, und zwar der Summe, wenn der Mittelpunct der Momente außerhalb, und der Differenz, wenn derſelbe innerhalb des von den Richtungen der beiden Kräfte gebildeten Winkels liegt.

§. 32. Der eben bewieſene Lehrſatz läßt ſich nach den folgenden Betrachtungen auch noch auf eine andere Weiſe ausdrücken.

Wenn der Mittelpunct C ein feſter Punct iſt, und die Perpendikel Ca, Ca', Cb unbiegſame gerade Linien ſind; ſo kann man die Kräfte P, P' und ihre Reſultante R ſo anſehn, als ſuchten ſie die Puncte a, a', b um den Mittelpunct C zu drehen. Wenn dieſer Mittelpunct außerhalb des von den Richtungen der Kräfte gebildeten Winkels liegt (Fig. 15), ſo ſieht man, daß dieſe Kräfte die Puncte a, a', b

in demselben Sinne um C zu drehen streben. Wenn dagegen der Mittelpunct C der Momente innerhalb des von den Richtungen der Kräfte gebildeten Winkels AmA' (Fig. 16) liegt, so streben die Kräfte P und P', die Puncte a, a' nach entgegengesetztem Sinne zu drehen und die Resultante R sucht den Punct b in demselben Sinne zu drehen, als die größte Componente. Aus diesen Bemerkungen folgt, daß sich der Lehrsatz der Momente auf folgende Weise ausdrücken läßt.

Das Moment der Resultante zweier Kräfte in Beziehung auf einen in ihrer Ebene liegenden Punct ist gleich der Summe oder der Differenz der Momente dieser Kräfte, je nachdem sie ihre Angriffspuncte um den als fest betrachteten Mittelpunct der Momente nach demselben, oder nach entgegengesetztem Sinne zu drehen streben.

Wenn man eine beliebige Anzahl von Kräften P, P', P'', P''', *etc.* betrachtet, deren Resultante durch R ausgedrückt wird, und welche auf denselben Punct nach in derselben Ebene liegenden Richtungen wirken und man fällt von einem außerhalb des von den Richtungen der Kräfte gebildeten Winkels genommenen Puncte dieser Ebene die Perpendikel p, p', p'', p''', *etc.* r auf die Richtungen dieser Kräfte und auf die der Resultante; so hat man:

$$Rr = Pp + P'p' + P''p'' + P'''p''' + etc.$$

Wir wollen zunächst die Resultante Q aus den beiden Kräften P, P' suchen und mit q das von dem Mittelpuncte der Momente auf die Richtung dieser Resultante gefällte Perpendikel bezeichnen; so haben wir:

$$Qq = Pp + P'p'.$$

Wird die Kraft Q mit P'' zusammengesetzt, so findet man eine zweite Partialresultante Q', auf welche man das Perpendikel q' fällt, und alsdann erhält man:

$$Q'q' = Qq + P''p'' = Pp + P'p' + P''p''.$$

Wiederholt man dasselbe Verfahren für jede der übrigen Kräfte P''', *etc.*; so erhält man die Formel, welche ausdrückt, daß das Moment der Resultante gleich der Summe der Momente aller Componenten ist.

Wenn der Mittelpunct der Momente innerhalb des von den Richtungen der Kräfte gebildeten Winkels liegt, so findet man, daß das Moment der Resultante der Differenz zwischen der Summe der Momente der Kräfte, welche das System nach einem gewissen Sinne zu drehen streben, und der Summe der Momente der Kräfte, welche dasselbe nach entgegengesetztem Sinne zu drehen suchen, gleich ist.

Da dieser Lehrsatz für jeden Werth des von den Richtungen der Kräfte gebildeten Winkels AmA' stattfindet, so könnte man daraus schließen, daß derselbe auch noch wahr bleibt, wenn dieser Winkel $= 0$ ist, oder die Richtungen der Kräfte zu einander parallel sind; allein der Beweis eines so wichtigen Satzes, als der der Momente für die parallelen Kräfte ist, muß niemals auf eine bloße Induction gestützt werden, zumal, wenn der directe Beweis leicht und einfach ist, wie man in dem folgenden §. sehen wird.

§. 33. Wenn man auf die Richtungen zweier nach demselben Sinne wirkender paralleler Kräfte eine senkrechte gerade Linie zieht und auf derselben einen beliebigen Punct zum Mittelpuncte der Momente nimmt; so ist das Moment der Resultante der Summe oder Differenz der Momente dieser beiden parallelen Kräfte gleich, je nachdem der Mittelpunct der Momente außerhalb des zwischen ihren Richtungen liegenden Streifens ihrer Ebene, oder innerhalb dieses Streifens, d. h. zwischen den parallelen Richtungen der Kräfte liegt.

Es seien P, P' (Fig. 17) zwei parallele Kräfte, welche durch die geraden Linien mA, $m'A'$ ausgedrückt worden und R sei die durch die gerade Linie nB ausgedrückte Resultante derselben. Durch einen nicht zwischen den Richtungen der Kräfte P, P', R liegenden Punct C ihrer Ebene wollen wir eine gerade Linie ziehen, welche die Richtungen der Kräfte in den Puncten a, a', b rechtwinklig durchschneidet; so haben wir:

$$R = P + P',$$
$$Cb = Ca + ab = Ca' - a'b;$$

und wenn wir die correspondirenden Glieder dieser beiden Gleichungen in einander multipliciren, so erhalten wir:

$$R \times Cb = P \times (Ca + ab) + P' \times (Ca' - a'b)$$
$$= P \times Ca + P \times ab + P' \times Ca' - P' \times a'b.$$

Bemerken wir ferner, daß $P \times ab = P' \times a'b$ ist (§. 25) und setzen der Kürze wegen $Cb = r$, $Ca = p$, $Ca' = p'$, so kommt:

$$Rr = Pp + P'p';$$

d. h. das Moment der Resultante ist gleich der Summe der Momente der Componenten.

Wenn der Mittelpunct C der Momente zwischen den Richtungen der Kräfte P, P' läge, so bewiese man auf dieselbe Weise, daß das Moment der Resultante R der Differenz der Momente der Componenten gleich ist.

III. Zusammensetzung der an verschiedenen Puncten eines festen Körpers angebrachten Kräfte, welche in derselben Ebene nach beliebigen Richtungen wirken.

§. 34. Aufgabe. Man soll die Resultante einer beliebigen Anzahl von Kräften finden, welche an verschiedenen in derselben Ebene, die man als einen Durchschnitt des festen Körpers betrachten kann, liegenden Puncten angebracht sind.

Erste Auflösung (durch das Parallelogramm der Kräfte). — Es seien P, P', P'', P''' vier Kräfte (Fig. 18), welche an den Puncten m, m', m'', m''' angebracht sind und durch die in derselben Ebene liegenden geraden Linien mA, $m'A'$, $m''A''$, $m'''A'''$ ausgedrückt werden. Man verlängere Am, $A'm'$ bis zu ihrem Durchschneiden im Puncte n, nehme $nA = mA$, $n'A' = m'A'$ und vollende das Parallelogramm $naba'$; so drückt die Diagonale nb desselben

die Resultante der beiden Kräfte P, P' aus. Hierauf verlängere man diese Diagonale und die Richtung $A''m''$ der Kraft P'' bis zu ihrem Durchschneiden im Puncte n', nehme dann $n'c = nb$, $n'A'' = m''A''$, construire das Parallelogramm $n'cb'a''$ und ziehe die Diagonale $n'b'$, welche die Resultante der drei Kräfte P, P', P'' ausdrückt. Setzt man diese zweite Partialresultante mit der Kraft P''' zusammen, so bildet man das Parallelogramm $n''c'Ba'''$, dessen Diagonale $n''B$ die Resultante R der vier Kräfte P, P', P'', P''' der Größe und Richtung nach ausdrückt.

Sollen diese Kräfte ins Gleichgewicht gebracht werden, so muß die Wirkung ihrer Resultante durch eine ihr gleiche und direct entgegengesetzte Kraft S aufgehoben werden.

Das eben angegebene Verfahren kann zur Bestimmung der Resultante einer beliebigen Anzahl in derselben Ebene liegender Kräfte angewandt werden, und man kann für alle diese Kräfte zusammengenommen ihre Resultante substituiren, welche immer denselben Werth und dieselbe Richtung hat, in welcher Ordnung man die gegebenen Kräfte auch zusammensetzen mag.

Wenn die Resultante aus allen gegebenen Kräften, weniger einer, dieser letztern gleich und entgegengesetzt wäre, aber nicht direct; so wäre die Resultante aus diesen beiden letzten Kräften und folglich die aus allen Kräften des Systemes zusammengenommen $= 0$, und ihr Angriffspunct läge in unendlicher Entfernung (§. 28), d. h. die gegebenen Kräfte ließen sich nicht in eine einzige Resultante zusammensetzen, und man würde folglich auch dieses System von Kräften nicht durch eine Kraft im Gleichgewichte halten können.

§. 35. Zweite Auflösung (durch Rechnung). — Es seien P, P', P'' (Fig. 19) drei Kräfte, welche an den Puncten m, m', m'' angebracht sind und durch die in derselben Ebene liegenden geraden Linien mD, $m'D'$, $m''D''$ ausgedrückt werden, so wollen wir in dieser Ebene zwei rechtwinklige Axen OX, OY annehmen und jede der Kräfte P, P', P'' in zwei auf einander senkrechte Kräfte zerlegen, wovon die eine zu der Axe OX und die andere zu der Axe OY parallel ist.

Wenn man die Winkel BmD, $B'm'D'$, $B''m''D''$ und die Winkel DmC, $D'm'C'$, $D''m''C''$, welche die Richtungen der Kräfte resp. mit den Axen OX, OY bilden, mit α, α', α'' und β, β', β'' bezeichnet; so werden die Componenten der Kraft P durch $P\cos.\alpha$, $P\cos.\beta$, die der Kraft P' durch $P'\cos.\alpha'$, $P'\cos.\beta'$, *etc.* ausgedrückt, und wenn man die Summe der resp. parallel zu den Axen OX, OY wirkenden Componenten, oder ihre resp. Resultanten mit L und M bezeichnet; so hat man:

$$L = P\cos.\alpha + P'\cos.\alpha' + P''\cos.\alpha'',$$
$$M = P\cos.\beta + P'\cos.\beta' + P''\cos.\beta''.$$

Wenn man die Richtungen der zu der Axe der x parallelen Componenten bis zum Durchschneiden mit der Axe der y verlängert, so kann man die Durchschnittspuncte für die Angriffspuncte der Kräfte nehmen. Wenn der Punct O der Anfangspunct ist, so sind die Entfernungen Oy, Oy', Oy'' oder die Ordinaten y, y', y'' gegeben, und wenn

man die unbekannte Ordinate des Angriffspunctes der Resultante L mit Y bezeichnet, so hat man nach dem Lehrsatze der Momente:

$$LY = yP\cos.\alpha + y'P'\cos.\alpha' + y''P''\cos.\alpha''.$$

Bezeichnet man ebenso durch X die Entfernung des Anfangspunctes O von dem Puncte, worin die Resultante M der zur Axe der y parallelen Kräfte die Axe der x trifft; so hat man nach demselben Lehrsatze:

$$MX = xP\cos.\beta + x'P'\cos.\beta' + x''P''\cos.\beta''.$$

Die Werthe der Coordinaten X, Y werden also durch diese beiden Gleichungen bestimmt. Es sei $X = Of$, $Y = Oe$, und durch die Puncte e, f wollen wir zwei gerade Linien eE, fF ziehen, wovon die eine zu der Axe der x und die andere zu der Axe der y parallel ist, so sind diese geraden Linien die Richtungen der Kräfte L, M und der Punct n, worin sie sich schneiden, kann zu ihrem gemeinschaftlichen Angriffspuncte genommen werden.

Die Größe der Resultante wird durch die Formel:

$$R = \sqrt{L^2 + M^2}$$

bestimmt und es bleibt bloß noch ihre Richtung zu bestimmen übrig. Es seien a, b die Winkel, welche diese Richtung mit den geraden Linien nE, nF bildet, so geben, wenn man $ne' = L$, $nf' = M$ nimmt und das Rechteck $ne'rf'$ construirt, die rechtwinkligen Dreiecke $ne'r$, $nf'r$:

$$R : L = 1 : \cos.a = \frac{L}{R},$$

$$R : M = 1 : \cos.b = \frac{M}{R}.$$

Diese beiden Gleichungen geben die Winkel, welche die Richtung der Resultante mit den zu den Axen parallelen geraden Linien nE, nF bildet, und folglich ist diese Richtung bestimmt.

Wir haben vorhin bloß die drei Kräfte P, P', P'' betrachtet und die Resultante derselben der Größe und Richtung nach bestimmt; allein man sieht leicht ein, daß dasselbe Verfahren auch auf ein aus einer beliebigen Anzahl in derselben Ebene liegender Kräfte zusammengesetztes System anwendbar ist, und man braucht nur die gefundenen Formeln zur Bestimmung der Größe und Richtung der Resultante anzuwenden.

Zur Erläuterung der allgemeinen Auflösung der zuletzt betrachteten Aufgabe wollen wir dieselbe auf ein Zahlenbeispiel anwenden, indem wir das Millimeter zur Längeneinheit und für die gegebenen Größen der Aufgabe die folgenden Werthe annehmen:

$$P = 26, \quad P' = 22,5, \quad P'' = 15,$$
$$\alpha = 26°30', \quad \alpha' = 35°, \quad \alpha'' = 124°,$$
$$\beta = 63°30', \quad \beta' = 55°, \quad \beta'' = 34°.$$

Bezeichnen wir die Summen der resp. parallel zu der Axe x und parallel zu der Axe y wirkenden Componenten mit L und M; so haben wir die beiden Gleichungen:

$$L = P\cos.\alpha + P'\cos.\alpha' + P''\cos.\alpha''$$
$$= 26\cos.26°30' + 22,5\cos.35° + 15\cos.124°$$
$$= 23,26 + 18,43 - 8,39 = 41,69 - 8,39 = 33,30,$$
$$M = P\cos.\beta + P'\cos.\beta' + P''\cos.\beta''$$
$$= 26\cos.63°30' + 22,5\cos.55° + 15\cos.34°$$
$$= 11,60 + 12,90 + 12,83 = 37,33.$$

Die Coordinaten der zu den Axen parallelen Componenten sind:

$$x = 51,\ x' = 37,5,\ x'' = 43,$$
$$y = 12,\ y' = 20,\ y'' = 40,$$

und wenn wir die Coordinaten der Kräfte L, M mit X, Y bezeichnen, so haben wir nach dem Lehrsatze der Momente:

$$LY = yP\cos.\alpha + y'P'\cos.\alpha' + y''P''\cos.\alpha''$$
$$= 12\times 23,26 + 20\times 18,43 + 40\times -8,39 = 312,12,$$
$$MX = xP\cos.\beta + x'P'\cos.\beta' + x''P''\cos.\beta''$$
$$= 51\times 11,6 + 37,5\times 12,9 + 43\times 12,83 = 1627,04;$$

$$Y = \frac{312,12}{33,30} = 9,4,\ X = \frac{1627,04}{37,33} = 43,6,$$

und die Größe der Resultante wird durch die Formel:

$$R^2 = \sqrt{L^2 + M^2} = \sqrt{(33,3)^2 + (37,33)^2} = 49,92$$

bestimmt. Wenn man die gegebenen Kräfte nach der Regel des Parallelogramms der Kräfte zusammensetzt, so findet man dieselbe Resultante.

Die geraden Linien, welche in Fig. 19 die Kräfte P, P', P'' ausdrücken, haben die in dem eben berechneten Beispiele angegebenen Zahlenwerthe, aber die Coordinaten haben wir größer angenommen, und man muß folglich bei der graphischen Auflösung der Aufgabe die Figur genau nach den angegebenen Zahlen construiren.

§. 36. Die Gleichung der geraden Linie, nach welcher die Resultante der Kräfte P, P', P'' wirkt, kann aus dem Vorhergehenden abgeleitet werden; denn diese Gleichung ist von der Form:

$$y = ax + b,$$

worin x und y die Coordinaten eines beliebigen Punctes dieser geraden Linie sind, und da sie durch den Punct n geht, dessen Coordinaten X, Y sind, so muß der Gleichung auch durch diese Coordinaten Genüge geschehen, und man hat:

$$Y = aX + b.$$

Wird diese Gleichung von der vorhergehenden abgezogen, so erhält man:

$$y - Y = a(x - X);$$

und es bleibt bloß noch die Tangente a des Winkels EnR, welchen die Richtung der Resultante mit der Axe der x bildet, zu bestimmen übrig.

Das rechtwinklige Dreieck $ne'r$ gibt aber:

$$L : M = 1 : a = \frac{M}{L};$$

und wenn man diesen Werth von a in die Gleichung der Resultante substituirt, so verwandelt sie sich in:

$$y - Y = \frac{M}{L}(x - X),$$

oder:

$$Ly - Mx = LY - MX.$$

Der zweite Theil dieser Gleichung ist aus bekannten Größen zusammengesetzt und wenn man den Werth der einen Coordinate, z. B. den der Abscisse x willkürlich annimmt, so gibt die Gleichung den Werth der zugehörigen Ordinate y, und da überdies der Punct n bekannt ist; so kennt man zwei Puncte der Richtung der Resultante, und folglich ist diese Richtung vollständig bestimmt.

Die Gleichung der Richtung der Resultante kann zur Bestimmung ihrer Lage in der Ebene der Kräfte dienen und die Zeichen von L und M geben an, in welchem Sinne sie wirkt.

Wenn die in derselben Ebene liegenden Kräfte P, P', P'', *etc.* im Gleichgewichte sind und in dem Systeme kein fester Punct vorkommt; so ist jede beliebige dieser Kräfte der Resultante aus allen übrigen gleich und direct entgegengesetzt. Denn wenn man irgend eine der gegebenen Kräfte von den übrigen absondert, z. B. die Kraft P und dann die Resultante R' aus den andern Kräften P', P'', *etc.* sucht; so wird das ganze System auf die beiden Kräfte P und R' reducirt, welche einander gegenseitig aufheben, und folglich gleich und direct entgegengesetzt sein müssen.

Wenn in dem Systeme ein fester Punct vorkommt und das Gleichgewicht soll stattfinden, so muß die Resultante aus sämmtlichen Kräften durch diesen festen Punct gehn. Wenn das Gleichgewicht nicht stattfindet und die gegebenen Kräfte eine Resultante haben, so wird dasselbe hergestellt, wenn man eine Kraft hinzufügt, welche dieser Resultante gleich und direct entgegengesetzt ist.

Viertes Kapitel.

Vom Schwerpuncte.

I. Allgemeine Begriffe über die Schwere und die Wirkung, welche diese Kraft auf die Körper ausübt. — Die Schwere wirkt nach verticalen Richtungen, welche man als parallel betrachten kann. — Erklärung des Schwerpunctes.

§. 37. Bei allen bisher bewiesenen Sätzen haben wir die Körper, auf welche die Kräfte wirken, bloß als materielle Puncte oder als geometrische Körper betrachtet, indem wir von den ihnen inhärirenden Eigenschaften, wie die Dichtigkeit, die Masse und das Gewicht abstrahirten; aber wir wollen nun die bewiesenen Sätze auf die festen

Körper anwenden, wie sie bei mechanischen Constructionen angewandt werden, und zwar wollen wir zunächst einige allgemeine Betrachtungen über die physikalischen Eigenschaften der Körper anstellen, welche man nothwendig genau kennen muß, wenn man die aus der Theorie abgeleiteten Regeln des Gleichgewichtes darauf anwenden will.

Das Wort Schwere oder Schwerkraft bezeichnet die auf die Körper wirkende Kraft, vermöge welcher sie gegen den Mittelpunct der Erde zu getrieben werden, und weshalb diese Kraft auch wohl die Erdschwere genannt wird. Die allgemeine Schwere oder die Gravitation ist eine Kraft von derselben Art, wie die Erdschwere, nur wirkt sie nicht bloß nach der verticalen Richtung, sondern nach allen Richtungen, welche man sich zwischen zwei oder mehreren Himmelskörpern denken kann, und zwar ist sie zunächst das Bestreben, vermöge dessen die Planeten und Cometen gegen den Mittelpunct der Sonne getrieben werden. Bei der Untersuchung der Bewegungsgesetze werden wir auch die der allgemeinen Gravitation, wovon die Erdschwere nur ein besonderer Fall ist, kennen lernen; allein jetzt wollen wir uns bloß mit dieser letzten Kraft beschäftigen, indem wir uns lediglich auf das beschränken, was zur Bestimmung des Schwerpunctes des Körpers erforderlich ist.

Alle Körper sind der Wirkung der Schwere unterworfen und zwar ist diese Wirkung für alle materiellen Theilchen, welche Größe und Form sie auch haben mögen, dieselbe, und wenn sie nicht unterstützt sind, so durchlaufen sie unter der Wirkung der Schwere in einer gegebenen Zeit, z. B. in einer Secunde, alle denselben Raum. Dieses Gesetz scheint durch die täglichen Beobachtungen nicht bestätigt zu werden; denn wir sehen oft, daß ein Körper schneller fällt als der andere, z. B. eine Bleikugel schneller als eine Feder, allein dieser Unterschied der Geschwindigkeit rührt bloß von dem ungleichen Widerstande der Luft her, welcher desto größer ist, je geringer die Masse des Körpers bei denselben Volumen, d. h. je geringer seine Dichtigkeit ist.

Die Schwere wirkt nach geraden Linien, welche auf der Oberfläche stillstehender Gewässer senkrecht sind, und wenn man sich diese geraden Linien hinreichend verlängert denkt; so laufen sie gegen den Mittelpunct der Erde zu zusammen, und sie würden alle in diesem Puncte zusammenlaufen, wenn die Erde eine vollkommene Kugel wäre. Diese Annahme können wir aber machen, ohne auf den Grad der Genauigkeit zu verzichten, welchen die nachfolgenden Anwendungen erfordern, weil die Gestalt der Erde, welche die eines unter den Polen abgeplatteten Sphäroides ist, sich wenig von der Kugelform entfernt. Die Richtungen der Schwere sind folglich gegeneinander geneigte gerade Linien; aber da die Längen, welche man auf denselben bei den Anwendungen der Statik nimmt, gegen die Entfernung ihres Vereinigungspunctes sehr klein sind, so kann diese schiefe Richtung unberücksichtigt bleiben und man kann die Richtungen, nach welchen die Schwere auf einen Körper oder auf ein System von mehreren Körpern wirkt, als parallele gerade Linien betrachten.

Auch läßt sich der kleine Fehler, welcher aus dieser Annahme entspringt, leicht bestimmen; denn da die Länge des vierten Theiles des Erdmeridianes 10,000,000 Meter beträgt, so findet man, wenn man diese Zahl durch $90 \times 60 \times 60 = 324{,}000$ dividirt, die Länge

des Bogens von 1 Sec. auf der Erdoberfläche = 30^m, 86. Die Richtungen, nach welchen die Schwere in den Endpuncten eines Körpers von einer horizontalen Länge von 30 Meter wirkt, bilden also einen Winkel mit einander, welcher kleiner ist, als 1 Sec. Die Spitze dieses Winkels liegt im Mittelpuncte der Erde, deren mittlere Halbmesser 6,366,198 Meter beträgt, und um so kleine Größen, als diese gegenseitige Neigung der Richtung der Schwere zu messen, müßte man ganz andere Verfahrungsarten anwenden, wie dieses bei den gewöhnlichen technischen Maschinen geschieht.

Die Intensität der Schwere ändert sich mit dem Orte auf der Erdoberfläche aus mehreren Gründen, und steht überhaupt für die außerhalb der Erdoberfläche liegenden Puncte im umgekehrten Verhältnisse des Quadrates ihrer Entfernungen vom Mittelpuncte der Erde, und für die im Innern der Erde liegenden Puncte steht diese Intensität im einfachen umgekehrten Verhältnisse der Entfernungen von demselben Puncte.

Da die Erde unter den Polen abgeplattet ist, so nimmt die Entfernung der Puncte ihrer Oberfläche vom Mittelpuncte zu, wenn man von einem der Pole gegen den Aequatur zu geht, so daß also auch eine entsprechende Verminderung der Intensität der Schwere stattfindet, welche Verminderung auch noch durch die Rotation der Erde um ihre Axe vergrößert wird; denn durch die durch diese Bewegung hervorgerufene Centrifugalkraft wird die Intensität der Schwere desto mehr vermindert, je näher der Körper, auf welchen sie wirkt, dem Aequator ist. Auch ist die Richtung, nach welcher die Centrifugalkraft wirkt, derjenigen, nach welcher die Schwere wirkt unter dem Aequator gerade entgegengesetzt, indem beide Richtungen vom Aequator gegen den Pol einen immer kleiner werdenden Winkel mit einander bilden.

Diese verschiedenen Ursachen der Veränderung in der Wirkung der Schwere sind von keinem merklichen Einflusse, wenn die Körper, auf welche diese Kraft wirkt, nur so kleine Ausdehnungen haben, wie dieses bei allen Anwendungen der Statik der Fall ist. Wir können daher die Schwere als eine constante Kraft betrachten, welche auf alle materielle Theilchen eines Körpers nach parallelen geraden Linien wirkt, deren gemeinschaftliche Richtung auf der Ebene des Horizontes des Ortes, wo sich der Körper befindet, senkrecht ist.

Die Wirkungen, welche die Schwere auf alle materielle Theilchen eines Körpers ausübt, können als gleiche parallele auf diese materiellen Theilchen wirkende Kräfte betrachtet werden. Die Resultante aus allen diesen Kräften, welche nach einer zu der Richtung der Componenten parallelen geraden Linie wirkt und ihrer Summe gleich ist, bildet das Gewicht des Körpers. Man muß sich wohl hüten, das Gewicht des Körpers mit der Schwere zu verwechseln; denn die letztere ist eine Kraft, welche auf alle Theilchen der Masse mit gleicher Stärke wirkt, und das Gewicht ist die Summe aus allen diesen einzelnen Wirkungen der Schwere oder die Kraft, welche man nach entgegengesetztem Sinne ausüben müßte, um die Resultante aus den Wirkungen der Schwere auf die einzelnen materiellen Theilchen aufzuheben und den Körper im Gleichgewichte zu erhalten.

§. 38. Die in dem Volumen eines Körpers enthaltene Quantität Materie oder die Summe der darin enthaltenen materiellen Theil-

chen wird die Masse dieses Körpers genannt. Diese Masse ist eine Größe, welche in den Rechnungen häufig vorkommt; in den meisten Fällen kann man jedoch das Gewicht des Körpers dafür substituiren, weil dieses seiner Masse proportional ist.

Die Dichtigkeit eines Körpers ist das Verhältniß seiner Masse zu seinem Volumen. Wenn also M die Masse, V das Volumen und D die Dichtigkeit eines Körpers bezeichnet; so hat man:

$$D = \frac{M}{V}.$$

Wenn man durch m, v und d resp. die Masse, das Volumen und die Dichtigkeit eines andern Körpers bezeichnet; so hat man ebenso:

$$d = \frac{m}{v},$$

und wenn man die erste Gleichung durch die zweite dividirt, so erhält man:

$$\frac{D}{d} = \frac{M}{V} \times \frac{v}{m} = \frac{M}{m} \times \frac{v}{V},$$

woraus erhellet, daß die Dichtigkeiten zweier Körper im directen Verhältnisse ihrer Massen und im umgekehrten Verhältnisse ihrer Volumina stehen.

Wenn die Volumina gleich sind, so hat man:

$$\frac{D}{d} = \frac{M}{m},$$

d. h. die Dichtigkeiten sind den Massen proportional. Wenn die Massen gleich sind, so ist:

$$\frac{D}{d} = \frac{v}{V},$$

d. h. die Dichtigkeiten stehen in umgekehrtem Verhältnisse der Volumen.

Ein homogener Körper ist ein solcher, dessen sämmtliche Theile von derselben Art sind und eine gleiche Dichtigkeit haben, was der Fall ist, wenn die Masse des Körpers in der ganzen Ausdehnung seines Volumens gleichmäßig vertheilt ist. Ein heterogener Körper dagegen ist ein solcher, welcher aus verschiedenen Bestandtheilen von ungleicher Dichtigkeit besteht.

Die Körper, womit wir uns beschäftigen wollen, insofern sie der Wirkung der Schwere unterworfen sind, werden als homogen vorausgesetzt, und wenn man die für die homogenen Körper bewiesenen Sätze auf heterogene anwenden will, so müssen diese Sätze modificirt werden, um sich so viel als möglich der Wahrheit zu nähern.

§. 39. Da die Wirkung der Schwere auf alle materiellen Theilchen der Körper von gleicher Intensität ist und nach parallelen Richtungen erfolgt, nämlich nach der von dem Bleilothe angegebenen Richtung; so können diese Wirkungen als parallele Kräfte betrachtet werden und man kann die für solche Kräfte bewiesenen Sätze darauf anwenden.

Bei der Zusammensetzung der auf einen Körper wirkenden parallelen Kräfte haben wir gefunden, daß die Resultante aus allen diesen

Kräften immer durch einen Punct von unveränderlicher Lage geht. Dieser Punct, welcher der Mittelpunct der parallelen Kräfte genannt wurde, existirt also auch in den der Wirkung der Schwere unterworfenen Körpern, und da man bei den Anwendungen der Statik häufig Gebrauch davon macht, so hat man denselben mit einem besondern Namen bezeichnet und Schwerpunct genannt.

Wenn der Schwerpunct eines Körpers fest ist, so bleibt dieser Körper in allen Lagen um diesen Punct im Gleichgewichte; denn da die Resultante aus allen von der Schwere auf die Theilchen des Körpers ausgeübten Wirkungen immer durch seinen Schwerpunct geht, so wird sie durch den Widerstand dieses festen Punctes aufgehoben. Der Schwerpunct eines festen Körpers kann demnach als der Punct definirt werden, welcher so beschaffen ist, daß, wenn er als fest angenommen wird, der Körper in allen Lagen im Gleichgewichte bleibt, welche er um diesen Punct annehmen kann.

Wenn ein Punct eines festen Körpers fest ist, so muß, wenn das Gleichgewicht stattfinden soll, die durch diesen Punct und durch den Schwerpunct gezogene gerade Linie vertical sein, wo der feste Punct über oder unter dem Schwerpuncte liegen kann. Denn das Gewicht eines Körpers kann als eine an seinem Schwerpuncte angebrachte verticale Kraft betrachtet werden, und damit diese Kraft durch den festen Punct aufgehoben werden kann, muß ihre Richtung mit der geraden Linie zusammen fallen, welche diesen festen Punct und den Schwerpunct miteinander verbindet, diese gerade Linie muß also vertical sein.

§. 40. Wenn ein fester Körper vermittelst eines Fadens *CA* (Fig. 20) an einem festen Puncte *C* aufgehangen ist, so ist dieser Faden vertical, und wenn man sich denselben durch den Körper hindurch verlängert denkt, so geht seine Verlängerung *AB* durch den Schwerpunct dieses Körpers. Hieraus ergibt sich ein Mittel zur Bestimmung des Schwerpunctes eines festen Körpers von beliebiger Form, und welcher homogen oder heterogen sein kann. Denn wenn der Körper an dem Puncte *A* aufgehangen wird, und man zieht die gerade Linie *AB*, welche die Verlängerung des Aufhängungsfadens *CA* bildet; so liegt der Schwerpunct des Körpers auf der geraden Linie *AB* und wenn man denselben Körper an einem andern Puncte *A'* seiner Oberfläche aufhängt und die gerade Linie *A'B'* zieht, welche die Verlängerung des Aufhängungsfadens bildet, so liegt der Schwerpunct des Körpers auf der geraden Linie *A'B'*; aber da derselbe auch auf der geraden Linie *AB* liegen muß, so muß er nothwendig im Durchschnittspuncte *G* dieser beiden geraden Linien liegen.

Wenn ein Körper, auf welchen bloß die Schwere wirkt, auf eine horizontale Ebene gestellt ist, und die durch seinen Schwerpunct gehende Verticale trifft diese Ebene innerhalb der Grundfläche des Körpers, d. h. der Fläche, mit welcher er auf der Ebene ruhet; so findet das Gleichgewicht statt, weil das Gewicht des Körpers oder die auf ihn wirkende Kraft durch den Widerstand der Ebene aufgehoben wird. Das Gleichgewicht würde dagegen nicht stattfinden, wenn die durch den Schwerpunct gehende Verticale die horizontale Ebene außerhalb der Basis des Körpers träfe; denn die Wirkung der Schwere würde

alsdann nicht ganz aufgehoben und der Körper müßte nach der Seite der Verticale zu auf der Ebene umschlagen.

Wenn ein Körper eine feste Lage behalten soll, so genügt es nicht, denselben ins Gleichgewicht zu bringen, sondern er muß auch so befestigt werden, daß er den Stößen und sonstigen Einwirkungen, welchen er ausgesetzt sein kann, zu widerstehen vermag. Dieses muß man bei den verschiedenen auszuführenden Constructionen, wobei die Theorie als Führer dienen kann, aber allein nicht hinreichend ist, vorher zu bestimmen suchen, indem man die Erfahrung an schon vorhandenen ähnlichen Constructionen zu Rathe zieht. In dem folgenden Beispiele sind die Schwierigkeiten durch einfache Mittel beseitigt, namentlich durch die Oeconomie des Materiales, welche bei allen guten Constructionen erfordert wird.

Die Statue Ludwigs XIV. ist von Carbonneau, einem der geschicktesten Bronzegießer unserer Zeit, gegossen und auf dem Victorienplatze zu Paris aufgestellt. Die Schwierigkeit des Gusses hat derselbe dadurch beseitigt, daß er statt des alten Verfahrens des Gusses in Wachsformen, welches noch heut zu Tage in vielen Gießereien angewandt wird, Formen in Sand angewandt hat. Die Statue ist nach diesem neuen Verfahren in mehreren Theilen gegossen, und ihr Gewicht beträgt ungefähr 3000 Kilogramm.

Diese Statue, deren Pferd bloß auf den Hinterfüßen steht, ist nicht in allen ihren Theilen von einer gleichen Dicke gegossen. Der Kopf, die Brust und die Vorderbeine des Pferdes, welche nur 750 Kilogramm wiegen, sind weit dünner gegossen, als die übrigen Theile. Als die Statue auf den Hinterfüßen des Pferdes in die Lage gebracht war, welche sie auf dem Postamente haben sollte, blieb sie im Gleichgewichte, und sie wurde in dieser Lage durch eine aus einem einzigen Stücke gegossene Armatur erhalten, welche aus zwei parallelen durch die Hinterbeine des Pferdes gehenden und in das Mauerwerk hinabreichenden Zweigen bestand, die durch ein in dem Postamente unter dem Carnieß befestigtes Querstück miteinander verbunden sind, und in dessen Mitte ein zu den beiden ersten Zweigen paralleler Stab in das Mauerwerk hinab geht. Diese gehörig eingerichtete Armatur ist hinreichend, der Statue eine Stabilität zu geben, welche nicht geringer ist, als die irgend eines andern Monumentes derselben Art.

II. Regeln zur Bestimmung des Schwerpunctes.

Schwerpunct der Linien.

§. 41. Bei der Bestimmung des Schwerpunctes betrachtet man gewöhnlich bloß solche Körper, welche sich geometrisch ausmessen lassen, und man nimmt an, daß diese Körper homogene sind oder in allen ihren Theilen eine gleichmäßige Dichtigkeit haben. Wenn man die Regeln kennt, welche man bei der Bestimmung des Schwerpunctes homogener Körper von einer geometrisch bestimmten Form anwenden muß und man will diese Regeln auf andere Körper von unregelmäßigen Formen, wie sie bei den Constructionen angewandt werden, anwenden; so nimmt man mit diesen Körpern ähnliche Transformationen

vor, wie die, welche man bei ihrer Ausmessung anwenden müßte. Man erhält auf diese Weise keine streng richtigen Resultate; allein es ist auch schon hinreichend, wenn die gefundenen Resultate nur so genau sind, daß bei Anwendung derselben kein merklicher Fehler entsteht.

Unter den geometrischen Körpern gibt es mehrere, für welche man den Schwerpunct durch sehr einfache Constructionen erhalten kann, weil man für jeden dieser Körper nur den Mittelpunct der Figur zu bestimmen braucht, welcher mit dem Schwerpuncte zusammenfällt.

Der Schwerpunct einer schweren homogenen geraden Linie von einer gleichmäßigen Dicke liegt in ihrer Mitte; denn man kann sich diese gerade Linie in eine gerade Anzahl kleiner gleicher Theile getheilt denken, die man als gleiche Gewichte betrachten kann, welche paarweise von ihrer Mitte auf beiden Seiten gleich weit entfernt sind und alsdann liegt der gemeinschaftliche Schwerpunct eines jeden Paares dieser gleichen und von der Mitte der geraden Linie gleich weit entfernten Gewichte in der Mitte der ihre Schwerpuncte verbindenden geraden Linie. Der gemeinschaftliche Schwerpunct aller einzelnen Gewichte oder der ganzen geraden Linie liegt folglich in ihrer Mitte.

Der Schwerpunct einer gegebenen geraden Linie kann also als ein bestimmter Punct betrachtet werden. Wenn man aber den Schwerpunct einer geraden Linie kennt, so kann man auch, wie die folgenden Beispiele zeigen werden, leicht den Schwerpunct des Umfangs eines Dreieckes oder eines beliebigen Vieleckes finden.

§. 42. Aufg. Den Schwerpunct des Umfanges eines Dreieckes zu finden. — Aufl. Es sei *ABC* (Fig. 21) das gegebene Dreieck, so wollen wir jede der Seiten *AB*, *AC*, *BC* desselben in zwei gleiche Theile theilen und durch die Theilungspuncte *E*, *F*, *D* die geraden Linien *EF*, *FD*, *DE* ziehen, welche das Dreieck *EFD* bilden Die Massen oder die Gewichte der drei Seiten *AB*, *AC*, *BC* des Dreieckes *ABC* können als drei diesen Seiten proportionale, parallele und nach demselben Sinne wirkende Kräfte betrachtet werden, welche wir durch die an ihre Angriffspuncte gesetzten Buchstaben *E*, *F*, *D* bezeichnen wollen.

Nach der Construction schneiden die Seiten des Dreieckes *EFD* die des Dreieckes *ABC* in proportionale Theile, so daß folglich die Seiten dieser beiden Dreiecke zu einander parallel, und die Dreiecke selbst einander ähnlich sind. Wir wollen den Winkel *EDF* durch die gerade Linie *Dd* in zwei gleiche Theile theilen, so theilt diese gerade Linie die Seite *EF* in zwei Theile, welche den Seiten *FD*, *DE* proportional sind, so wir haben nach der Eigenschaft der ähnlichen Dreiecke:

$$Fd : dE = FD : DE = AB : AC = E : F;$$

woraus erhellet, daß der Schwerpunct der Massen *E*, *F* oder der Seiten *AB*, *AC* im Theilungspuncte *d* der geraden Linie *EF* liegt. Der Schwerpunct der drei Seiten *AB*, *AC* und *BC* liegt folglich auf der geraden Linie *Dd*, welche den gemeinschaftlichen Schwerpunct der beiden ersten Seiten mit dem der dritten verbindet.

Wenn man den Winkel *DEF* in zwei gleiche Theile theilt, so hat man die gleichen Verhältnisse:

$$Fe : eD = FE : ED = BC : AC,$$

welche ausdrücken, daß der Schwerpunct der Seiten *BC*, *AC* im Puncte *e* der geraden Linie *FD* liegt, und daß folglich der Schwerpunct der drei Seiten *BC*, *AC* und *AB* in der geraden Linie *Ee* liegt.

Wenn man die Linie *Ff* zieht, welche den Winkel *EFD* in zwei gleiche Theile theilt, so ergibt sich ebenso, daß der Schwerpunct der drei Seiten des Dreieckes *ABC* auf der geraden Linie *Ff* liegt, und da dieser Schwerpunct auf jeder der drei geraden Linien liegen muß, welche resp. die drei Winkel des Dreieckes *DEF* in zwei gleiche Theile theilen; so müssen sich diese drei geraden Linien in demselben Puncte *G* durchschneiden, welcher der Schwerpunct des Umfanges des Dreieckes *ABC* ist. Der Punct *G* ist auch der Schwerpunct des in das Dreieck *DEF* beschriebenen Kreises.

§. 43. Aufg. Den Schwerpunct des Umfanges eines gegebenen Vieleckes *ABCDE* (Fig. 22) zu finden. — Diese Aufgabe kann sowohl durch die Zusammensetzung paralleler Kräfte, als durch die Theorie der Momente gelöst werden.

Erste Auflösung. — Man theile jede Seite des Vieleckes in zwei gleiche Theile; so liegen die Schwerpuncte dieser Seiten in den Theilungspuncten m, m', m'', m''', m^{IV}, und die Masse jeder Seite, welche ihrer Länge proportional ist, kann in ihrem Schwerpuncte vereinigt gedacht werden; so daß man ein System paralleler Kräfte erhält, und der Angriffspunct der Resultante dieser Kräfte ist alsdann der gesuchte Schwerpunct.

Man verbinde die Puncte m''', m^{IV} durch die gerade Linie $m'''\,m^{IV}$, und theile diese Linie in zwei den Seiten *AE*, *ED* umgekehrt proportionale Theile, so ist der Theilungspunct n der Schwerpunct dieser beiden Seiten. Man verbinde ferner diesen Punct mit der Mitte m'' der Seite *DC* und theile die gerade Linie nm'' in zwei den Seiten $(AE + ED)$ und *DC* umgekehrt proportionale Theile, so ist der Theilungspunct n' der Schwerpunct der drei Seiten *AE*, *ED*, *DC*. Zieht man die gerade Linie $n'm'$ und theilt sie in zwei den Seiten $(AE + ED + DC)$ und *CB* umgekehrt proportionale Theile, so bestimmt man den Schwerpunct n'' der vier Seiten *AE*, *ED*, *DC*, *CB*, und der Schwerpunct der fünf Seiten oder des Umfanges des Vieleckes liegt im Puncte *G*, welcher die gerade Linie $n''m$ in zwei Theile theilt, die sich umgekehrt, wie $AE + ED + DC + CB$ zu *BA* verhalten.

Durch ähnliche Constructionen wie die vorhergehenden findet man den Schwerpunct des Umfanges eines Vieleckes von einer beliebigen Anzahl von Seiten und wenn dieses Vieleck n Seiten hat, so sind $n-1$ successive Operationen erforderlich.

Zweite Auflösung. — In der Ebene des Vieleckes *ABCDE* (Fig. 22) wollen wir zwei rechtwinklige Axen *OX*, *OY* ziehen und jede Seite des Vieleckes in den Puncten m, m', m'', m''', m^{IV} resp. in zwei gleiche Theile theilen. Es seien x, y die Coordinaten des Punctes m; x', y' die des Punctes m'; x'', y'' die des Punctes m'', *etc.*; ferner p, p', p'', p''', p^{IV} die resp. Gewichte der Seiten des Vieleckes, und bezeichnen X, Y die Coordinaten seines Schwerpunctes, so haben wir nach der Theorie der Momente:

$$X = \frac{px + p'x' + p''x'' + p'''x''' + p^{IV}x^{IV}}{p + p' + p'' + p''' + p^{IV}},$$
$$Y = \frac{py + p'y' + p''y'' + p'''y''' + p^{IV}y^{IV}}{p + p' + p'' + p''' + p^{IV}}.$$

Um diese Formeln auf das gegebene Vieleck anwenden zu können, wollen wir eine gerade Linie von 3 Zoll Länge in 100 gleiche Theile theilen, so haben die Seiten des Vieleckes und die Coordinaten der Mittelpuncte dieser Seiten nach diesem Maßstabe folgende Zahlenwerthe:

$AB = 18,\ BC = 19,5,\ CD = 28,7,\ DE = 24,\ EA = 18,$
$x = 25,\ x' = 39,\ x'' = 32,\ x''' = 16,\ x^{IV} = 14,$
$y = 13,5,\ y' = 24,\ y'' = 41,\ y''' = 38,\ y^{IV} = 19,$

und wenn man diese Werthe in die vorhergehenden allgemeinen Formeln substituirt, indem man bemerkt, daß für die Gewichte der Seiten die Längen derselben gesetzt werden können; so erhält man:

$$X = \frac{18 \times 25 + 19,5 \times 39 + 28,7 \times 32 + 24 \times 16 + 18 \times 14}{18 + 19,5 + 28,7 + 24 + 18}$$
$$= \frac{2764,9}{108,2} = 25,5$$
$$Y = \frac{18 \times 13,5 + 19,5 \times 24 + 28,7 \times 41 + 24 \times 38 + 18 \times 19}{18 + 19,5 + 28,7 + 24 + 18}$$
$$= \frac{3141,7}{108,2} = 29.$$

Von dem Anfangspuncte O aus wollen wir auf der Axe der Abscissen und der der Ordinaten resp. die Längen $Oa = 25,5$ und $Ob = 29$ nehmen und durch die Puncte a, b zu diesen Axen zwei Parallelen ziehen, so sind diese geraden Linien die Coordinaten X, Y ihres Durchschnittspunctes G, welcher der gesuchte Schwerpunct ist, und zwar ist er derselbe als der durch die erste Auflösung gefundene Punct.

§. 44. Aufg. Den Schwerpunct eines Kreisbogens zu finden. — Aufl. Es sei BAC (Fig. 23) der aus dem Mittelpuncte O beschriebene Kreisbogen, so wollen wir den auf der Sehne BC senkrechten Halbmesser OA ziehen, welcher den Bogen in A in zwei gleiche Theile theilt, und auf welchem offenbar der gesuchte Schwerpunct liegt. Aus dem Mittelpuncte O ziehe man die auf dem Halbmesser OA senkrechte gerade Linie OY und aus den Endpuncten B, C des Bogens BAC fälle man auf OY die Perpendikel BD, CE. Den Bogen BA denke man sich in eine sehr große Anzahl gleicher und sehr kleiner Theile getheilt; so kann die Mitte jedes dieser kleinen Bogen als sein Schwerpunct betrachtet werden. Es sei mm' einer dieser kleinen Bogen, so ist die Mitte n desselben sein Schwerpunct. Ferner ziehe man mc, $m'c'$, nd senkrecht und mb parallel zu OY, und endlich aus dem Mittelpuncte O den Halbmesser On.

Wenn man den kleinen Bogen mm' als eine gerade Linie betrachtet, so sind die beiden Dreiecke mbm', Odn einander ähnlich, weil ihre Seiten auf einander senkrecht sind, und man hat die Proportion:

$nm' : mb$ oder $cc' = On$ oder $OA = dn$.

Dieselben Schlüsse sind aber auf alle Theile des Kreisbogens anwendbar und wenn man folglich durch OG die Entfernung des Mittelpunctes O vom Schwerpuncte des Bogens ausdrückt, so hat man:

$$BAC : DE \text{ oder } BC = OA : OG = \frac{\overline{OA} \times \overline{BC}}{BAC}.$$

Aus dieser Proportion erhellet, daß die Entfernung des Schwerpunctes eines Kreisbogens vom Mittelpuncte des Kreises die vierte Proportionale zu dem Kreisbogen, der Sehne desselben und dem Halbmesser des Kreises ist.

Um diese allgemeine Regel auf ein Zahlenbeispiel anzuwenden, wollen wir annehmen, daß der Halbmesser $OA = OB = 27$ und die halbe Sehne $^1/_2\, BC = BF = 21,5$ ist; so gibt das rechtwinklige Dreieck OBF:

$$OB : BF = 1 \cdot \sin.\, arc.\, AB = \frac{BF}{OB} = \frac{21,5}{27} = 0,7963.$$

Wenn man alsdann die Zahl 0,7963 in den trigonometrischen Tafeln aufsucht, so findet man, daß sie $\sin. 52^\circ 47'$ entspricht, und folglich ist:

$$\text{Bog. } BAC = 2 \text{ Bog. } AB = 105^\circ 34' = 105^\circ, 56.$$

Wenn der Durchmesser $= 1$ ist, so ist der Kreisumfang $\pi = 3,1416$, und um die Länge des Kreisbogens von $105^\circ, 56$ auf dem Kreisumfange, dessen Durchmesser $= 54$, zu finden, hat man die Proportion:

$$\left.\begin{matrix} 1 : 54 \\ 360 : 105,56 \end{matrix}\right\} = 3,1416 : x = \frac{3,1416 \times 54 \times 105,56}{360} = 49,74.$$

Werden die eben gefundenen Werthe in die allgemeine Formel substituirt, so erhält man:

$$OG = \frac{OA \times BC}{BAC} = \frac{27 \times 43}{49,74} = 23,34.$$

Wenn der Kreisbogen dem Halbkreise gleich wird, so ist die Sehne dem Doppelten des Halbmessers, welchen wir mit R bezeichnen wollen, gleich und die allgemeine Formel verwandelt sich in:

$$OG = \frac{R \times 2R}{^1/_2 \text{ Kreisumfang.}} = \frac{2R^2}{3,1416R} = \frac{R}{1,5708} = 0,6366\, R.$$

Die Sehne eines Bogens, welcher weniger als der Halbkreis beträgt, ist kleiner als der doppelte Halbmesser oder Durchmesser; und alsdann ist der Werth von OG kleiner als der eben gefundene, d. h. je mehr der Bogen zunimmt, desto mehr nimmt die Entfernung seines Schwerpunctes vom Mittelpuncte des Kreises ab. Wenn endlich der Bogen dem ganzen Kreisumfange gleich wird, so ist seine Sehne $= 0$ und die Entfernung $OG = 0$, d. h. der Schwerpunct des ganzen Kreisumfanges liegt in seinem Mittelpuncte, was **a priori** einleuchtend ist.

Schwerpunct der Flächen.

§. 45. Wenn man den Schwerpunct der Fläche eines Vieleckes, oder einer andern bestimmten ebenen Fläche sucht, so abstrahirt man von der Dicke und zieht bloß die beiden andern Dimensionen, Länge und Breite, in Betracht. Wenn die gegebene Figur eine so beträchtliche Dicke hätte, daß diese in Betracht gezogen werden müßte, so wäre die Figur ein fester Körper und man müßte ihren Schwerpunct nach den in dem folgenden Artikel anzugebenden Methoden bestimmen.

Aufg. Man soll den Schwerpunct der Fläche eines Dreieckes finden. — Aufl. Es sei *ABC* (Fig. 24) das gegebene Dreieck. Von der einen Winkelspitze *C* wollen wir nach der Mitte der gegenüberliegenden Seite *AB* eine gerade Linie *CD* ziehen; so muß der Schwerpunct des Dreieckes auf dieser geraden Linie liegen. Denn man kann sich das Dreieck durch parallele gerade Linien zu der Grundlinie *AB* in eine sehr große Anzahl sehr schmaler Theile getheilt vorstellen, wovon jeder durch die gerade Linie *CD* in zwei gleiche Theile getheilt wird. Diese gerade Linie geht folglich durch die Schwerpuncte aller dieser Theile und folglich auch durch den Schwerpunct des ganzen Dreieckes.

Wenn man aus der Winkelspitze *B* nach der Mitte *E* der gegenüberliegenden Seite *AC* die gerade Linie *BE* zieht; so ergibt sich ebenso, wie vorhin, daß der Schwerpunct des Dreieckes in der geraden Linie *BE* liegt; und folglich geht diese gerade Linie auch durch den Schwerpunct des Dreieckes *ABC*, welcher mithin im Durchschnittspuncte *G* der geraden Linien *CD*, *BE* liegt, die resp. von einer Winkelspitze des Dreieckes nach der Mitte der gegenüberliegenden Seite gezogen sind.

Wir wollen die beiden Puncte *E* und *D* durch die gerade Linie *ED* verbinden, so ist dieselbe nach der Eigenschaft der Proportionallinien parallel zu *BC*, weil sie jede der Seiten *AB*, *AC* in zwei gleiche Theile theilt. In den Dreiecken *BCG*, *DEG* ist also Winkel $CBG = GED$, Winkel $BCG = GDE$ und die Winkel am Puncte *G* als Scheitelwinkel sind einander gleich. Diese Dreiecke sind also einander ähnlich und wenn man die den gleichen Winkeln gegenüberliegenden Seiten vergleicht, so hat man:

$$BC : DE = CG : GD.$$

Ferner geben die ähnlichen Dreiecke *ABC*, *ADE* die Proportion:

$$BC : DE = AB : AD,$$

und da diese beiden Proportionen ein gemeinschaftliches Verhältniß haben, so geben die beiden andern Verhältnisse:

$$CG : GD = AB : AD = 2AD : AD = 2 : 1,$$

woraus folgt:

$$CG : CG + GD \text{ oder } CD = 2 : 3$$

also:

$$CG = \frac{2}{3} CD,$$

d. h. der Schwerpunct eines Dreieckes ist um $^2/_3$ der Länge der von einer seiner Winkelspitzen nach der Mitte der ge-

genüberliegenden Seite gezogenen geraden Linie von dieser Winkelspitze entfernt.

Wenn die Schwerpuncte drei gleicher Massen in den drei Winkelspitzen des Dreieckes ABC liegen; so liegt der gemeinschaftliche Schwerpunct der beiden Massen A und B in der Mitte D der Verbindungslinie AB und der Schwerpunct der drei Massen liegt auf der geraden Linie CD. Wenn man diese Linie in zwei Theile theilt, die sich umgekehrt wie die Massen $A+B$ und C oder wie $2:1$ verhalten, den an der Grundlinie liegenden Theil mit x und den an der Spitze liegenden Theil mit y bezeichnet; so hat man:

$$2:1=y:x$$
$$2+1:2=y+x:y$$
$$3:2=CD:y=\frac{2}{3}CD$$
$$x=\frac{1}{2}y=\frac{1}{3}CD.$$

Der Schwerpunct der drei gleichen Massen A, B, C liegt also in demselben Puncte G, worin der Schwerpunct der Fläche des Dreieckes liegt.

Aufg. Den Schwerpunct der Fläche eines Trapezes zu finden. — Aufl. Es sei $ABCD$ (Fig. 25) das gegebene Trapez. Man theile jede der parallelen Seiten AB, DC in zwei gleiche Theile und verbinde die Theilungspuncte durch die gerade Linie EF. Die Fläche des Trapezes kann man sich durch Parallelen zu AB in eine sehr große Anzahl sehr schmaler Streifen getheilt denken, wovon jeder durch die gerade Linie EF in zwei gleiche Theile getheilt wird; und folglich muß der Schwerpunct des Trapezes in dieser geraden Linie liegen.

Man ziehe die Diagonale AC, welche das Trapez in zwei Dreiecke ADC, ABC theilt, ziehe ferner die geraden Linien AF, CE, nehme auf FA einen Theil $FM=\frac{1}{3}FA$ und auf EC einen Theil $EN=\frac{1}{3}EC$; so sind die Puncte M und N die Schwerpuncte der Dreiecke ADC und ABC. Man verbinde diese beiden Schwerpuncte durch die gerade Linie MN, so muß der Schwerpunct des Trapezes auf dieser geraden Linie liegen; aber er muß auch in EF liegen, und folglich ist derselbe der Durchschnittspunct G der beiden geraden Linien EF, MN.

Der Punct G der geraden Linie EF, worin der Schwerpunct des Trapezes liegt, kann auf folgende Weise bestimmt werden: Durch den Punct M ziehe man nach EF die gerade Linie ML parallel zu AE; so werden die Seiten FA und FE durch die gerade Linie ML in proportionale Theile getheilt und die Dreiecke FML, FAE sind einander ähnlich; folglich hat man:

$$FL=\frac{1}{3}FE \text{ und } LM=\frac{1}{3}AE=\frac{1}{6}AB.$$

Wenn man durch den Punct N die Linie NI bis zum Durchschneiden mit EF zu AB oder CD parallel zieht; so hat man ebenfalls:

$$EI = \frac{1}{3} EF,\ NI = \frac{1}{3} CF = \frac{1}{6} CD,$$

und da jeder der Theile FL und EI der geraden Linie EF dem dritten Theile dieser Linie gleich ist; so ist der mittlere Theil $IL = IG + GL = \frac{1}{3} EF$.

Die ähnlichen Dreiecke GML, GNI geben die Proportion:

$$LM : IN = GL : GI,$$

oder:

$$AB : CD = GL : GI;$$

$AB + CD : CD = IG + GL$ oder $\frac{1}{3} EF : IG$, woraus folgt:

$$IG = \frac{1}{3} EF \times \frac{CD}{AB + CD},$$

und wenn man zu beiden Theilen dieser letzten Gleichung $EI = \frac{1}{3} EF$ addirt, so erhält man, indem man bemerkt, daß $EI + IG = EG$ ist:

$$EG = \frac{1}{3} EF + \frac{1}{3} EF \times \frac{CD}{AB + CD} =$$

$$\frac{1}{3} EF \times \frac{AB + 2CD}{AB + CD}.$$

Wir wollen nun die Entfernung des Schwerpunctes des Trapezes von seiner obern Grundlinie bestimmen; so ist, wenn diese Entfernung auf der Verbindungslinie der Mitten der beiden Grundlinien gemessen wird:

$$FG = EF - EG = EF - \frac{AB \times EF + 2CD \times EF}{3AB + 3CD}$$

$$= \frac{3AB \times EF + 3CD \times EF - AB \times EF - 2CD \times EF}{3AB + 3CD}$$

$$= \frac{2AB \times EF + CD \times EF}{3AB + 3CD},$$

und wenn man die eben für die beiden Theile der geraden Linie EF gefundenen Werthe in einander dividirt, so erhält man:

$$\frac{EG}{FG} = \frac{AB \times EF + 2CD \times EF}{2AB \times EF + CD \times EF} = \frac{AB + 2CD}{2AB + CD}.$$

In dieser letzten Formel ist ein Lehrsatz enthalten, welcher sich auf folgende Weise ausdrücken läßt: Der Schwerpunct des Trapezes theilt die Verbindungslinie der Mitten der parallelen Seiten oder Grundlinien in zwei Theile, welche sich wie die Summe aus der einfachen untern und der doppelten obern Grundlinie zu der Summe aus der doppelten untern und der einfachen obern Grundlinie verhält.

Wenn man sich die nicht parallelen Seiten AD und BC bis zu ihrem Durchschneiden verlängert denkt, so wird die obere Grundlinie $DC = 0$; das Trapez verwandelt sich in ein Dreieck, worin die gerade

Linie FE die Spitze mit der Mitte der Grundlinie verbindet und die vorhingefundenen Formeln verwandeln sich alsdann in:

$$EG = \frac{1}{3} EF, FG = \frac{2}{3} EF.$$

Nehmen wir nun an, daß die parallelen Seiten des Trapezes einander gleich werden, so daß $CD = AB$ ist; so wird die Figur ein Parallelogramm und der Schwerpunct G theilt die gerade Linie EF in zwei gleiche Theile. In der That reducirt sich das Verhältniß $\frac{EG}{FG}$ auf die Einheit, wenn man AB für CD setzt; und folglich ist $EG = FG$.

Wenn man die beiden Diagonalen des Parallelogrammes zieht, so durchschneiden sie sich in der Mitte G der geraden Linie EF oder im Schwerpuncte des Parallelogrammes.

Aufg. Den Schwerpunct eines Vieleckes zu finden.

Aufl. Aus einer der Winkelspitzen des gegebenen Vieleckes ziehe man nach allen übrigen Winkelspitzen desselben gerade Linien; so wird das Vieleck in so viele Dreiecke zertheilt, als es Seiten hat, weniger zwei; und alsdann sucht man den Schwerpunct jedes dieser Dreiecke. Die Masse eines jeden Dreieckes kann als in seinem Schwerpuncte vereinigt angesehen werden, so daß man statt der Flächen der Dreiecke ein System materieller Puncte erhält, deren Massen oder Gewichte für diese Flächen substituirt werden können; und wenn man alsdann für diese Gewichtskräfte nach der Theorie der parallelen Kräfte oder der der Momente den gemeinschaftlichen Schwerpunct bestimmt; so ist derselbe der Schwerpunct sämmtlicher Dreiecke oder der Fläche des ganzen Vieleckes.

Wenn das gegebene Vieleck ein regelmäßiges ist, so liegt sein Schwerpunct im Mittelpuncte des in oder um dasselbe beschriebenen Kreises.

§. 46. Aufg. Den Schwerpunct eines Kreisausschnittes zu finden. — Aufl. Es sei $OBAC$ (Fig. 26) der gegebene Kreisausschnitt, und wir wollen uns vorstellen, daß der Bogen BAC in eine sehr große Anzahl kleiner gleicher Bogen getheilt sei. Zieht man alsdann aus dem Mittelpunct O des Kreises Halbmesser nach allen Theilungspuncten, so wird der Kreisausschnitt $OBAC$ in eine sehr große Anzahl kleiner gleicher Ausschnitte getheilt, welche man als Dreiecke betrachten kann. Der Schwerpunct jedes dieser Dreiecke liegt aber um $\frac{2}{3}$ des Halbmessers OA vom Mittelpuncte O entfernt; und wenn man folglich aus dem Mittelpuncte O mit dem Halbmesser $Oa = \frac{2}{3} OA$ einen Kreisbogen bac beschreibt, so ist dieser Bogen der geometrische Ort der Schwerpuncte aller Dreiecke oder aller kleinen Sectoren. Die Masse jedes dieser einzelnen Sectoren kann man sich in seinem Schwerpuncte concentrirt vorstellen, und da alle diese Sectoren einander gleich sind, so ist ihr gemeinschaftlicher Schwerpunct oder der Schwerpunct des Sectors $OABC$ derselbe, als der Schwerpunct des Bogens bac. Die Entfernung OG des Kreismittelpunctes vom Schwerpuncte dieses Bogens wird durch die Formel:

$$OG = \frac{Oa \times bc}{\text{Bog. } bac}$$

ausgedrückt, welche folgende Proportion gibt:

$$\text{Bog. } bac : Oa = bc : OG,$$

worin die drei ersten Glieder durch andere, in dem gegebenen Kreissector genommene Glieder ersetzt werden können. Denn es ist $Oa = \frac{2}{3} OA$ und die ähnlichen Dreiecke OBC, Obc geben die Proportion:

$$OA : \frac{2}{3} OA = BC : bc = \frac{2}{3} BC,$$

woraus folgt, daß Bog. $bac = \frac{2}{3}$ Bog. BAC ist.

Werden diese Werthe in die Formel substituirt, welche die Lage des Schwerpunctes des Bogens bac bestimmt, welche zugleich die des Schwerpunctes des Kreisausschnittes $OBAC$ ist; so verwandelt sich diese Formel in:

$$OG = \frac{\frac{2}{3} OA \times \frac{2}{3} BC}{\frac{2}{3} \text{Bog. } BAC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{OA \times BC}{\text{Bog. } BAC}.$$

Der Schwerpunct des Kreisausschnittes liegt auf dem Halbmesser, welcher den Kreisausschnitt in zwei gleiche Theile theilt und das eben erhaltene Resultat zeigt, daß man die Entfernung des Kreismittelpunctes vom Schwerpunct des Kreisausschnittes erhält, wenn man den Halbmesser mit der Sehne multiplicirt, das Product durch den Bogen dividirt und $\frac{2}{3}$ des Quotienten nimmt.

Beispiel. Es sei der Halbmesser $OA = 36$ und die halbe Sehne $BF = \frac{1}{2} BC = 22$; so gibt das rechtwinklige Dreieck OFB:

$$36 : 22 = 1 : \sin. AB = \frac{22}{36} = 0,6111 = \sin. 37^\circ 40',$$

$$\text{Bog. } BAC = 2 \text{ Bog. } AB = 75^\circ 20'.$$

Der Kreisumfang ist $= 2\pi R = 2 \times \frac{22}{7} \times 36$,

und der Bogen von $75^\circ 20' = \frac{75\frac{1}{3}}{360} \times 2 \times \frac{22}{7} \times 36 = 47,3$.

Werden diese Werthe in den obigen Ausdruck von OG substituirt, so erhält man:

$$OG = \frac{2 \times 36 \times 44}{3 \times 47,3} = 22,3.$$

Aufg. Die Entfernung des Mittelpunctes O eines gegebenen Kreises vom Schwerpuncte des Kreisabschnittes BAC (Fig. 26) zu finden. — Aufl. Hat man den Halbmesser OA gezogen, welcher die Grundlinie BC des Dreieckes OBC im Puncte F in zwei gleiche Theile theilt, so ist die Entfernung OG' des Kreis-

mittelpunctes vom Schwerpuncte des Dreieckes $= \frac{2}{3} OF$. Ferner ist das Moment des Kreisausschnittes $OABC =$ der Summe der Momente des Dreieckes OBC und des Kreisabschnittes BAC. Bezeichnet man also den Abstand des Kreismittelpunctes O vom Schwerpuncte des Kreisabschnittes mit X, so hat man:

$$X. \text{ Fläche } BAC + \frac{2}{3} OF \times OBC$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{OA \times BC}{\text{Bog. } BAC} \times \text{Fläche } OBAC;$$

woraus sich ergibt, wenn man bemerkt, daß die Fläche des Dreieckes $OBC = \frac{1}{2} OF \times BC$ und die des Kreisausschnittes $OBAC = \frac{1}{2} OA \times \text{Bog. } BAC$ ist:

$$X. \text{ Fläche } BAC = \frac{2}{3} \cdot \frac{OA \times BC}{\text{Bog. } BAC} \times \frac{1}{2} OA \times \text{Bog. } BAC$$

$$- \frac{2}{3} OF \times \frac{1}{2} OF \times BC$$

$$= \frac{1}{3} (OA)^2 \times BC - \frac{1}{3} (OF)^2 \times BC.$$

Das rechtwinklige Dreieck OFB gibt:

$$(OF)^2 = (OB)^2 - (BF)^2 = (OA)^2 - \frac{1}{4} (BC)^2;$$

und wenn dieser letzte Werth für $(OF)^2$ substituirt wird, so hat man die Gleichung:

$$X. \text{ Fläche } BAC = \frac{1}{3} (OA)^2 \times BC - \frac{1}{3} [(OA)^2 - \frac{1}{4} (BC)^2] BC$$

$$= \frac{1}{3} (OA)^2 \times BC - \frac{1}{3} (OA)^2 \times BC + \frac{1}{12} BC^3,$$

woraus sich ergibt:

$$X = \frac{(BC)^3}{12. \text{ Fläche } BAC}.$$

Hieraus erhellet, daß der Abstand des Kreismittelpunctes vom Schwerpuncte eines Kreisabschnittes dem Quotienten aus der 3. Potenz der Sehne dieses Abschnittes und der 12fachen Fläche desselben gleich ist.

Beispiel. Wir wollen wieder die im vorhergehenden Beispiele angegebenen Zahlen nehmen, nämlich:

$$OA = 36, \; BC = 44, \; \text{Bog. } BAC = 75^\circ 20' = 47,3;$$

so ist nach der Eigenschaft des rechtwinkligen Dreieckes:

$$OF = \sqrt{(OA)^2 - (BF)^2} = \sqrt{(36)^2 - (22)^2} = 28,5,$$

Sect. $OABC = \frac{1}{2}$ Bog. $BAC \times OA = \frac{1}{2} \times 47,3 \times 36 =$ 851, 4,

$OBC = \frac{1}{2}\ OF \times BC = 28,5 \times 22 =$ 627, 0,

Kreisabschnitt $BAC = 224,4$.

Werden diese Werthe in die allgemeine Formel substituirt, so erhält man:

$$X = \frac{44^3}{12 \times 224,4} = \frac{85184}{2692,8} = 31,6.$$

Wenn man den Halbmesser OA in 36 gleichr Theile theilt und 31, 6 dieser Theile vom Mittelpuncte O aus auf diesem Halbmesser nimmt; so erhält man die Entfernung OG'' des Kreismittelpunctes vom Schwerpuncte des Kreisabschnittes BAC.

Wenn der Kreisabschnitt ein Halbkreis wird, dessen Fläche $= \frac{1}{2}\pi \times (OA)^2$ ist; so wird die Sehne dem Durchmesser gleich, d. h. $= 2OA$ und die Formel verwandelt sich in:

$$X = \frac{(2OA)^3}{12 \times \frac{1}{2}\pi \times (OA)^2} = \frac{8(OA)^3}{6\pi.(OA)^2} = \frac{4OA}{3\pi}.$$

Die Entfernung des Kreismittelpunctes vom Schwerpuncte des Halbkreises wird also ausgedrückt durch den Quotienten aus dem vierfachen Halbmesser und dem dreifachen Verhältnisse des Kreisumfanges zum Durchmesser.

Der Kreisumfang, dessen Durchmesser $= 1$ ist, wird ausgedrückt durch $\pi = 3,1416$; und wenn man, wie in dem letzten Beispiele den Halbmesser $OA = 36$ setzt; so hat man:

$$X = \frac{4 \times 36}{2 \times 3,1416} = 15,28.$$

Schwerpunct fester Körper.

§. 47. Aufg. Den Schwerpunct einer dreieckigen Pyramide zu finden. — Aufl. Es sei $SABC$ (Fig. 27) die dreiseitige Pyramide; so wollen wir zunächst den Schwerpunct E ihrer Grundfläche ABC suchen und diesen Punct E durch die gerade Linie SE mit der Spitze S der Pyramide verbinden, welche gerade Linie alsdann durch den Schwerpunct der Pyramide geht. Denn wenn man sich vorstellt, daß diese Pyramide aus unendlich vielen, unendlich dünnen und zur Grundfläche parallelen Schichten besteht; so sind alle diese dreiseitigen Schichten einander ähnlich und die gerade Linie SE, welche die Grundfläche ABC in ihrem Schwerpuncte E trifft, geht auch durch den Schwerpunct jedes andern zur Grundfläche parallelen Durchschnittes. Denn es sei abc ein zur Grundfläche ABC paralleler Durchschnitt und cd eine aus der Winkelspitze c nach der Mitte der gegenüber liegenden Seite ab gezogene gerade Linie; so sind die beiden geraden Linien CD, cd einander parallel und die gerade Linie SE theilt sie in proportionale Theile. Da aber der Punct E der Schwerpunct des Dreieckes ABC ist, so hat man $CE = \frac{2}{3}\ CD$, folg-

lich ist auch $ce = \frac{2}{3} cd$ und der Punct e ist der Schwerpunct des Dreieckes abc. Die gerade Linie SE geht also durch den Schwerpunct der Pyramide.

Ebenso beweist man, daß die aus der Winkelspitze C nach dem Schwerpunct F der gegenüberliegenden Fläche SAB gezogene gerade Linie CF durch den Schwerpunct der Pyramide $SABC$ geht. Der Schwerpunct dieser Pyramide liegt also im Durchschnittspuncte G der beiden geraden Linien SE, CF, und wir wollen seine Lage in Beziehung auf die Spitze S zu bestimmen suchen.

Wir haben eben bewiesen, daß sich die beiden geraden Linien SC, CF schneiden, weil sie beide durch den Schwerpunct der Pyramide gehen, was auch einleuchtend ist, wenn man bemerkt, daß sie in derselben Ebene SDC liegen.

Wenn man die Puncte E und F durch die gerade Linie EF verbindet, so ist diese Lage zu SC parallel; denn die gerade Linie EF theilt die Seiten CD, DS des Dreieckes CDS in proportionale Theile, weil $DE = \frac{1}{3} DC$ und $DF = \frac{1}{3} DS$ ist. Die Dreiecke DEF, DCS sind also, sowohl als die Dreiecke EGF, CGS einander ähnlich, und man hat:

$$SC : FE = SD : FD = 3 : 1$$
$$SC : FE = SG : GE.$$

Da diese beiden Proportionen ein gemeinschaftliches Verhältniß haben, so geben die beiden andern Verhältnisse:

$$SG : GE = 3 : 1$$
$$SG + GE \text{ oder } SE : GE = 4 : 1$$
$$GE = \frac{1}{4} SE;$$

d. h. der Schwerpunct einer dreiseitigen Pyramide liegt auf der geraden Linie, welche die Spitze der Pyramide mit dem Schwerpuncte ihrer Grundfläche verbindet und ist um $\frac{3}{4}$ dieser Linie von der Spitze der Pyramide entfernt.

Aufg. Den Schwerpunct einer Pyramide zu finden, deren Grundfläche ein Vieleck von einer beliebigen Anzahl von Seiten ist. — Aufl. Es sei $SABCDE$ (Fig. 28) die gegebene Pyramide; so wollen wir von einer Winkelspitze A der Grundfläche $ABCDE$ die Diagonalen AC, AD ziehen, welche diese Grundfläche in die drei Dreiecke ABC, ACD, ADE theilen, und die Schwerpuncte f, f', f'' dieser Dreiecke suchen. Betrachten wir alsdann die Flächen dieser Dreiecke als parallele Kräfte, welche in ihren resp. Schwerpuncten angebracht sind und suchen den Mittelpunct F dieser Kräfte; so ist derselbe der Schwerpunct der Grundfläche $ABCDE$. Ferner wollen wir diese Schwerpuncte mit der Spitze S dieser Pyramide durch die geraden Linien Sf, Sf', Sf'', SF verbinden.

Die vielseitige Pyramide wird auf diese Weise in drei dreiseitige Pyramiden $SABC$, $SACD$, $SADE$ zerlegt und der Schwerpunct jeder dieser Pyramiden liegt auf der geraden Linie, welche den Schwerpunct ihrer Grundfläche mit der gemeinschaftlichen Spitze S verbindet, und zwar um $\frac{3}{4}$ dieser Linie von der Spitze entfernt.

Wenn man eine Pyramide mit einer beliebigen zur Grundfläche parallelen Ebene durchschneidet, so werden alle von der Spitze der Pyramide nach ihrer Grundfläche gezogenen geraden Linien in proportionale Theile getheilt, und wenn man folglich durch den Schwerpunct g der Pyramide $SABC$ eine Ebene $abcde$ parallel zu ihrer Grundfläche $ABCDE$ legt, so liegen die Schwerpuncte g, g', g'' der drei Partialpyramiden und der Schwerpunct G der ganzen Pyramide in dieser Ebene; denn dieselbe durchschneidet jede der geraden Linien Sf, Sf', Sf'' in einer Entfernung von der Spitze der Pyramide, welche $\frac{3}{4}$ ihrer Länge beträgt, und folglich geht diese Ebene durch die Schwerpuncte der Partialpyramiden, woraus folgt, daß der Schwerpunct der ganzen Pyramide auch in dieser Ebene liegt.

Der Schwerpunct der Pyramide $SABCDE$ liegt auf der geraden Linie SF, welche die Spitze S der Pyramide mit dem Schwerpuncte F ihrer Grundfläche verbindet; und um dieses zu beweisen, wollen wir uns vorstellen, daß die Pyramide aus unendlich vielen, unendlich dünnen und zu ihrer Grundfläche parallelen Schichten bestehe. Da die gerade Linie SF die Grundfläche der Pyramide in ihrem Schwerpunct trifft, so durchschneidet sie alle zu der Grundfläche parallelen Durchschnitte in ähnlich liegenden Puncten und diese Puncte sind die Schwerpuncte der entsprechenden Durchschnitte oder Schichten der Pyramide. Der Schwerpunct dieser Pyramide liegt also auf der geraden Linie SF; und da derselbe auch in der Ebene $abcde$ liegen muß, so liegt er im Durchschnittspuncte G dieser Ebene und der geraden Linie SF.

Der Schwerpunct einer beliebigen Pyramide liegt also auf der geraden Linie, welche die Spitze dieser Pyramide mit dem Schwerpuncte ihrer Grundfläche verbindet, und zwar um $\frac{3}{4}$ dieser Linie von der Spitze und um $\frac{1}{4}$ von der Grundfläche entfernt.

Um den Schwerpunct eines beliebigen Polyeders zu finden, zerlegt man dasselbe zuerst in Pyramiden und sucht dann den Schwerpunct jeder dieser einzelnen Pyramiden, worauf man nach den auseinander gesetzten Methoden den gemeinschaftlichen Schwerpunct aller dieser Theile oder Pyramiden bestimmt, welcher der Schwerpunct des ganzen Polyeders ist.

Wenn der Körper, dessen Schwerpunct gefunden werden soll, ein Parallelepipedum oder ein Prisma mit parallelen Grundflächen ist; so ist die Zerlegung in Pyramiden nicht nöthig, sondern man braucht nur die Schwerpuncte der beiden parallelen Grundflächen durch eine gerade Linie zu verbinden, in deren Mitte alsdann der Schwerpunct des Körpers liegt.

Der Schwerpunct eines Kegels liegt auf der geraden Linie, welche seine Spitze mit dem Schwerpuncte seiner Grundfläche verbindet, und zwar um $\frac{3}{4}$ dieser Linie von der Spitze oder um $\frac{1}{4}$ von der Grundfläche des Kegels entfernt; denn ein Kegel kann als eine Pyramide betrachtet werden, deren Grundfläche ein Vieleck von unendlich vielen, unendlich kleinen Seiten ist.

§. 48. Aufg. Den Schwerpunct eines abgestumpften Kegels zu finden. — Aufl. Es sei $BDEC$ (Fig. 29) der abge-

stumpfte Kegel, dessen Schwerpunct gefunden werden soll. Wenn man sich diesen abgestumpften Kegel zu einem vollständigen Kegel ergänzt denkt, so hat man den ganzen Kegel ABC, den kleinen Kegel ADE und den abgestumpften Kegel $BDEC$, deren Schwerpuncte auf der Axe AI liegen. Die Schwerpuncte H und h der beiden ersten Kegel sind bekannt, und es sei G der des dritten.

Wenn man sich die Masse jedes dieser Kegel in seinem Schwerpuncte vereinigt denkt, so können die Kegel $BDEC$, ADE als zwei in den Puncten G und h angebrachte parallele Kräfte betrachtet werden, und der Kegel ABC drückt alsdann die Resultante aus diesen beiden Kräften aus und der Angriffspunct H dieser Resultante theilt die gerade Linie Gh in zwei Theile, welche sich umgekehrt wie die beiden Componenten verhalten. Man hat also die Proportion:

$$BDEC : ADE = hH : HG.$$

Wir wollen der Kürze wegen $BC = a$, $DE = b$, $KI = c$ setzen, so geben die ähnlichen Dreiecke ABI, ADK die Proportion:

$$\frac{1}{2}a : \frac{1}{2}b = AI : AK,$$

woraus folgt:

$$a - b : b = AI - AK \text{ oder } c : AK = \frac{bc}{a-b},$$

$$AI = c + AK = c + \frac{bc}{a-b} = \frac{ac}{a-b},$$

$$AH = \frac{3}{4}AI = \frac{3ac}{4(a-b)},$$

$$Ah = \frac{3}{4}AK = \frac{3bc}{4(a-b)},$$

$$hH = AH - Ah = \frac{3ac - 3bc}{4(a-b)} = \frac{3}{4}c.$$

Ferner ist:

$$\text{abgest. Kegel } BDEC = \frac{c\pi}{3} \times \frac{a^2 + b^2 + ab}{4} = \frac{c\pi(a^3 - b^3)}{12(a-b)},$$

$$\text{und Kegel } ADE = \frac{b^2\pi \times AK}{4 \times 3} = \frac{b^3 c\pi}{12(a-b)};$$

und wenn diese Werthe in die obige Proportion substituirt werden, so erhält man:

$$\frac{c\pi(a^3 - b^3)}{12(a-b)} : \frac{b^3 c\pi}{12(a-b)} = \frac{3c}{4} : HG = \frac{3b^3 c}{4(a^3 - b^3)},$$

woraus sich in Verbindung mit der Gleichung, welche den Schwerpunct des ganzen Kegels bestimmt, ergibt:

$$IG = III - HG = \frac{1}{4}AI - HG = \frac{ac}{4(a-b)} - \frac{3b^3 c}{4(a^3 - b^3)}$$

$$= \frac{c}{4}\left(\frac{a}{a-b} - \frac{b^3}{a^3 - b^3}\right).$$

Wenn man auf denselben Nenner reducirt und durch $a - b$ dividirt, so erhält man:

$$IG = \frac{c}{4} \cdot \frac{a^2 + 2ab + 3b^2}{a^2 + ab + b^2},$$

und diese Formel drückt die Entfernung des Schwerpunctes des abgestumpften Kegels von seiner untern Grundfläche aus.

Wenn man $a = b$ setzt, so verwandelt sich die vorhergehende Formel in:

$$IG = \frac{c}{4} \times \frac{6a^2}{3a^2} = \frac{1}{2}c;$$

und da die beiden Grundflächen alsdann einander gleich sind, so ist der Körper ein Cylinder und der Schwerpunct desselben liegt in der Mitte seiner Axe.

§. 49. Aufg. Den Schwerpunct einer Kugelzone zu finden. — Aufl. Es sei DAE (Fig. 30) die durch die Umdrehung des Bogens DA um den Halbmesser AC erzeugte Kugelzone und wir wollen annehmen, daß diese Zone mit Ebenen mn, $m'n'$, $m''n''$, *etc.* durchschnitten sei, welche gleich weit von einander entfernt und auf AB senkrecht sind; so sind alle die einzelnen Zonen $mm'n'n$, $m'm''n''n'$, *etc.* einander gleich; denn die Oberfläche einer jeden ist gleich dem Producte aus ihrer Höhe und dem Umfange eines größten Kreises. Der Schwerpunct jeder dieser Zonen liegt auf der Linie AB, und wenn man sich folglich vorstellt, daß die Masse einer jeden Zone in ihrem Schwerpuncte concentrirt sei; so wirken an der geraden Linie AB gleiche Gewichte in gleichen gegenseitigen Entfernungen, und folglich liegt der Schwerpunct aller dieser Gewichte oder der der Kugelzone DAE in der Mitte G der Höhe AB dieser Zone.

Der Schwerpunct einer Kugelzone mit zwei parallelen Grundflächen liegt in der Mitte der geraden Linie, welche die Schwerpuncte dieser beiden Grundflächen mit einander verbindet.

Dieses Resultat ist eine Folgerung aus dem Verhältnisse, welches zwischen der Oberfläche der Kugel und der des um sie beschriebenen Cylinders stattfindet; denn in der Elementargeometrie wird bewiesen, daß, wenn man diese beiden Körper mit Ebenen durchschneidet, welche auf der Axe des Cylinders senkrecht sind, die zwischen je zwei dieser Ebenen liegende cylindrische Fläche der entsprechenden Kugelzone gleich ist. Der Schwerpunct der ersten Fläche liegt aber in der Mitte des zwischen den beiden parallelen Ebenen liegenden Theiles der Axe, und folglich ist dieser Punct auch der Schwerpunct der entsprechenden Kugelzone.

§. 50. Aufg. Den Schwerpunct eines Kugelausschnittes zu finden. — Aufl. Der fragliche Kugelausschnitt wird durch die Umdrehung des Kreisausschnittes CDA um den Halbmesser CA (Fig. 31) beschrieben; so kann man sich vorstellen, daß dieser Kugelausschnitt aus unendlich vielen, unendlich dünnen gleichen Pyramiden besteht, deren sämmtliche Spitzen im Mittelpunct C der Kugel liegen, und deren unendlich kleine Grundflächen zusammengenommen die Kugelzone DAE bilden, welche die Grundfläche des Kugelausschnittes ist.

Der Schwerpunct jeder einzelnen Pyramide liegt auf der von ihrer Spitze nach dem Schwerpuncte ihrer Grundfläche gezogenen geraden Linie um $\frac{3}{4}$ dieser Linie von der Spitze entfernt, und wenn man sich folglich einen concentrischen Kugelausschnitt $Cdae$ denkt, dessen Halbmesser $Ca = \frac{3}{4} CA$ ist; so liegen die Schwerpuncte aller Partialpyramiden in der Kugelzone dae und diese Schwerpuncte können als Puncte betrachtet werden, worin die Massen der einzelnen Pyramiden concentrirt sind. Folglich liegt der gemeinschaftliche Schwerpunct aller dieser Pyramiden oder der Schwerpunct des Kugelausschnittes in demselben Puncte als der Schwerpunct der Kugelzone dae; aber der Schwerpunct dieser Zone liegt in der Mitte G der Höhe fa, und folglich ist der Punct G der Schwerpunct des von dem Kreisausschnitte CDA beschriebenen Kugelausschnittes.

Um den Schwerpunct G des von einem beliebigen Kreisausschnitte CDA erzeugten Kugelausschnittes durch Rechnung zu bestimmen, wollen wir eine Formel ableiten, welche den Werth der auf der Rotationsaxe genommenen und von der Grundfläche des Kugelausschnittes aus gezählten Entfernung AG ausdrückt.

Da die Kreisausschnitte $CDAE$, $Cdae$, so wie die rechtwinkligen Dreiecke CFD, Cfd einander ähnlich sind, so hat man:

$$CD : Cd = CA : Ca = CF : Cf,$$

woraus folgt:

$$CA : Ca = CA - CF : Ca - Cf = AF : af;$$

und da $Ca = \frac{3}{4} CA$ ist, so hat man

$$Cf = \frac{3}{4} CF, \quad af = \frac{3}{4} AF;$$

folglich:

$$aG = \frac{1}{2} af = \frac{3}{8} AF;$$

also:

$$Aa = AC - aC = \frac{1}{4} AC,$$

und endlich:

$$AG = Aa + aG = \frac{1}{4} AC + \frac{3}{8} AF = \frac{1}{8}(2AC + 3AF).$$

Aus dieser Formel läßt sich leicht die Entfernung des Schwerpunctes des Kugelausschnittes vom Mittelpuncte der Kugel ableiten; denn diese Entfernung ist $= CG = CA - AG$, und wenn man den Werth von AG substituirt und die Reductionen verrichtet; so erhält man:

$$CG = \frac{3}{8}(2AC - AF).$$

Wenn der Kreisausschnitt ein Viertelkreis ist, so ist der durch seine Umdrehung um den Halbmesser CA erzeugte Körper eine Halbkugel, also $AF = AC$ und die vorhergehende Formel verwandelt sich in:

$$CG = \frac{3}{8} AC,$$

d. h. die Entfernung des Mittelpunctes der Kugel vom Schwerpunct der Halbkugel ist gleich $\frac{3}{8}$ des Halbmessers.

§. 51. Bei allen bisher betrachteten Aufgaben haben wir bloß die Lehren der Elementargeometrie, der Trigonometrie und der algebraischen Rechnung angewandt, und wir werden auch in Zukunft geometrische Beweise wählen, wenn sie, wie die vorhergehenden, einfach und direct sind; aber wenn dieses nicht der Fall ist, so werden wir uns der ersten Elemente der Differential- und Integralrechnung oder der sogenannten Infinitesimalrechnung bedienen. Zunächst wollen wir diese Rechnung auf die bereits gelösten Aufgaben über den Schwerpunct und dann auf mehrere andere davon abhängige Sätze anwenden, welche sich vermittelst der bisherigen Methoden nur sehr schwerfällig erweisen lassen.

Durch successive Zusammensetzung einer beliebigen Anzahl paralleler Kräfte P, P', P'', *etc.* kann man ihre Resultante R und deren Angriffspunct, welcher der Mittelpunct der parallelen Kräfte genannt wird, finden; allein diese graphische Methode läßt sich vortheilhaft durch die Rechnung ersetzen. Denn wenn die parallelen Kräfte auf drei rechtwinklige Ebenen (Fig. 14[a]) bezogen werden, so erhält man durch Anwendung des Lehrsatzes von den Momenten die zur Berechnung der Coordinaten des Mittelpunctes dieser Kräfte nöthigen Formeln (§. 31).

Die parallelen Kräfte, welche wir hier betrachten, rühren von der Schwere oder Schwerkraft her und ihr Mittelpunct wird der Schwerpunct des Körpers oder des Systems, worauf diese Kräfte wirken, genannt.

Es sei P das Gewicht eines Körpers und p, p', p'', *etc.* seien die Gewichte seiner verschiedenen Theile, indem die Schwerpuncte auf die Ebenen der drei rechtwinkligen Axen AX, AY, AZ bezogen werden. Wenn man die Coordinaten des Schwerpunctes des ganzen Körpers und seiner einzelnen Theile p, p', p'', *etc.* resp. mit X, Y, Z; x, y, z; x', y', z', *etc.* bezeichnet; so ist nach dem Vorhergehenden leicht einzusehen, daß man folgende Gleichungen hat:

$$\begin{aligned} P &= p + p' + p'' + \text{etc.}, \\ PX &= px + p'x' + p''x'' + \text{etc.}, \\ PY &= py + p'y' + p''y'' + \text{etc.}, \\ PZ &= pz + p'z' + p''z'' + \text{etc.} \end{aligned}$$

Der Körper, dessen Schwerpunct bestimmt werden soll, so wie seine verschiedenen Theile und die Coordinaten ihrer Schwerpuncte sind gegebene Größen und nur die Coordinaten des Schwerpunctes des ganzen Körpers sind unbekannte Größen, welche man vermittelst der vorhergehenden Gleichungen berechnen kann. In den gewöhnlichen Fällen, wo sich die betrachteten Linien, Flächen und Körper geometrisch messen lassen, richtet man die Figuren gewöhnlich so ein, daß der gesuchte Schwerpunct auf einer geraden Linie liegt, welche man zu der Axe der Abscissen nimmt, so daß $Y=0$, $Z=0$ ist und bloß die unbekannte Größe X übrig bleibt, deren Werth vermittelst der beiden ersten der obigen Gleichungen bestimmt werden kann.

Wenn das Gewicht des ganzen Körpers durch P, seine Masse durch M und die Intensität der Schwere durch g bezeichnet wird; so hat man die Gleichung $P = Mg$. Wenn ferner m, m', m'', *etc.* resp. die Massen der Theile des Körpers bezeichnen, deren Gewichte durch p, p', p'', *etc.* ausgedrückt werden; so hat man für jeden dieser Theile eine ähnliche Gleichung, wenn man den Ausdruck der Masse für den des Gewichtes substituirt und endlich den allen Gliedern gemeinschaftlichen Factor g hinwegläßt, so erhält man die Gleichungen:

$$M = m + m' + m'' + etc.,$$
$$MX = mx + m'x' + m''x'' + etc.$$

Diese Gleichungen finden auch noch statt, wenn man für die Massen des ganzen Körpers und seiner Theile ihre Volumina substituirt, weil bei den homogenen Körpern die Volumina den Massen proportional sind. Bezeichnet man also die Volumina des ganzen Körpers von der Masse M und seiner Theile von den Massen m, m', m'', *etc.* resp. mit V und v, v', v'', *etc.*, so gehen die vorhergehenden Gleichungen in folgende über:

$$V = v + v' + v'' + etc.,$$
$$VX = vx + v'x' + v''x'' + etc.$$

Vermittelst dieser letzten Gleichungen findet man die Lage des Punctes, welcher der Schwerpunct eines geometrischen Körpers genannt wird, indem man nur das scheinbare Volumen des Körpers in Betracht zieht; und außerdem erhellet aus den Gleichungen mit den Massen, daß die Lage des Schwerpunctes von der Intensität der Schwere unabhängig ist.

§. 52. Um nun zu der Infinitesimalanalysis überzugehn, betrachtet man die zweiten Theile der vorhergehenden Gleichungen als aus unendlich vielen, unendlich kleinen Gliedern bestehend, welche man als unter sich gleich betrachten kann. Ihre Summe oder das Integral, welches durch das Zeichen $\int$ angedeutet wird, wird ausgedrückt durch eins dieser Glieder, so vielmal wiederholt, als man Glieder hat, d. h. unendlich viele Male, worauf man durch die Regeln der Integralrechnung den algebraischen Ausdruck des Werthes dieser Summe bestimmt.

Wenn die Figur, deren Schwerpunct gesucht wird, eine Linie ist, welche man mit s bezeichnet; so wird ihr Differential oder eins ihrer unendlich kleinen Elemente durch ds ausgedrückt, und wenn man die Länge dieser Linie mit L bezeichnet und für die Volumina die eben angegebenen liniaren Werthe setzt; so verwandeln sich die vorhergehenden Gleichungen in:

$$L = \int ds,\quad LX = \int x ds,\quad X = \frac{\int x ds}{\int ds}.$$

Die erste dieser Gleichungen ist der Ausdruck der Länge dieser Linie, welche der Summe aller ihrer Elemente gleich ist, und die zweite ist die Gleichung der Momente. Sie zeigt, daß das Moment der ganzen Linie in Beziehung auf die Ebene der y, z der Summe der Momente aller Elemente dieser Linie in Beziehung auf dieselbe Ebene gleich ist. Die dritte Gleichung, welche sich aus den beiden ersten ergibt, ist der Ausdruck des Werthes von X oder der Abscisse des Schwerpunctes.

§. 53. Aufg. Den Schwerpunct einer geraden Linie zu finden. — Aufl. Es sei AM (Fig. 32) die gerade Linie, welche durch den Anfangspunct A der rechtwinkligen Coordinatenaxen AX, AY geht, und mit x, y wollen wir resp. die Coordinaten AP, PM eines beliebigen Punctes dieser geraden Linie bezeichnen, deren Gleichung $y = ax$ ist, weil sie durch den Anfangspunct geht. Wir wollen ferner die der Ordinate MP unendlich naheliegende Ordinate mp und Mr parallel zu der Axe AX ziehen; so ist Mm das Element, welches wir mit ds bezeichnet haben und man kann x, y als die Coordinaten seines Schwerpunctes g betrachten, weil x, y nur um unendlich kleine Größen davon verschieden sind.

Das unendlich kleine rechtwinklige Dreieck Mrm gibt:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2};$$

und wenn man diesen Werth für ds substituirt, so erhält man:

$$X = \frac{\int x \sqrt{dx^2 + dy^2}}{\int \sqrt{dx^2 + dy^2}}.$$

Wenn man die Gleichung der geraden Linie differentiirt, so kann man dy^2 eliminiren und man findet:

$$dy = a\,dx, \quad dy^2 = a^2 dx^2,$$

$$X = \frac{\int x \sqrt{dx^2 + a^2 dx^2}}{\int \sqrt{dx^2 + a^2 dx^2}} = \frac{\int x\,dx}{\int dx} = \frac{\frac{1}{2}x^2}{x} = \frac{1}{2}x.$$

Da der eine Endpunct der gegebenen geraden Linie im Anfangspuncte A der Coordinaten liegt und der andere Endpunct einer beliebigen Abscisse x entspricht, so entspricht die Abscisse $^1/_2 x$ ihres Schwerpunctes der Mitte ihrer Länge, was auch an und für sich einleuchtend ist; allein es war nicht überflüssig, zu zeigen, wie die Rechnung auf diesen Fall angewandt wird, weil dasselbe Verfahren, wie man an dem folgenden Beispiele sehn wird, auch auf beliebige krumme Linien anwendbar ist.

§. 54. Aufg. Den Schwerpunct eines Kreisbogens zu finden. — Aufl. Es sei EBF (Fig. 32) der Kreisbogen, dessen Mittelpunct C im Anfangspuncte der Coordinaten liegt, und welcher von der Axe der Abscissen im Puncte B in zwei gleiche Theile getheilt wird. Wir wollen die Coordinaten CQ, QE des einen Endpunctes E des halben Bogens BE, welchen wir durch s ausdrücken, mit x, y bezeichnen, und es sei $Ee = ds$ das Differential dieses Bogens oder eine der unendlich kleinen Seiten des Vieleckstückes, welches man für den Kreisbogen EBF nehmen kann. Durch die Puncte E und e wollen wir zu den Axen die geraden Linien EH, ek, welche sich im Puncte h schneiden, parallel ziehen, so gibt das rechtwinklige Dreieck Ehe:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}, \quad s = \int \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Es bezeichne X die Abscisse des Schwerpunctes des Bogens s; so hat man, wenn man die Momente in Beziehung auf die Axe der y nimmt:

$$sX = \int x \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

welches die Differentialgleichung der Aufgabe ist, und um sie zu integriren, muß man zunächst die eine veränderliche Größe eliminiren. Da aber der Mittelpunct C des Kreises im Anfangspuncte der Coordinaten liegt, so ist die Gleichung desselben, wenn sein Halbmesser $CE = a$ gesetzt wird:

$$x^2 + y^2 = a^2 \text{ oder } y^2 = a^2 - x^2,$$

und wenn man diese Gleichung differentiirt, so erhält man:

$$ydy = -xdx, dy^2 = \frac{x^2dx^2}{y^2} = \frac{x^2dx^2}{a^2 - x^2}.$$

Wird dieser Werth für dy^2 substituirt, so verwandelt sich die vorhergehende Differentialgleichung in:

$$sX = \int x \sqrt{\frac{a^2dx^2}{a^2 - x^2}} = a \int \frac{xdx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$= a \int xdx (a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Betrachtet man die Größe zwischen den Parenthesen als eine einzige Veränderliche und integrirt nach der bekannten Grundregel, so erhält man:

$$sX = a \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Dieses Integral, worin eine Wurzelgröße des zweiten Grades vorkommt, könnte, allgemein betrachtet, das doppelte Zeichen $\pm$ haben; aber nach der Lage der Figur muß es mit dem positiven Zeichen genommen werden, weil der Kreisbogen, dessen Schwerpunct gefunden werden soll, auf der Seite der positiven Abscissen liegt.

Wenn man die Ordinate oder die halbe Sehne für die Wurzelgröße setzt und durch den Bogen s dividirt; so erhält man:

$$X = \frac{ay}{s}$$

für den Ausdruck der Entfernung des Mittelpunctes des Kreises vom Schwerpuncte eines auf seinem Umfange genommenen Bogens, und dieser Ausdruck ist, wie man sieht, mit dem weiter oben (§. 44) durch eine andere Methode gefundenen identisch.

Um diese Formel auf ein Zahlenbeispiel anzuwenden, wollen wir annehmen, daß der Halbmesser des Kreises in 12 gleiche Theile oder Einheiten und die Einheit selbst wieder in 10 gleiche Theile getheilt sei. Die Länge der halben Sehne EQ oder der Ordinate y sei $= 7,7$; so wird der Sinus des Bogens s oder der Sinus des ähnlichen Bogens von dem Halbmesser $= 1$ durch folgende Proportion bestimmt:

$$a : 1 = y : \sin. \frac{s}{a} = \frac{y}{a} = \frac{7,7}{12} = 0,6416666.$$

Sucht man diesen Sinus in den Tafeln der natürlichen Sinus, so findet man, daß derselbe nur in der sechsten Decimalstelle von dem verschieden ist, welcher dem Bogen von $39^\circ 55'$ entspricht, was s

$= 39^\circ 55'$ gibt, und da der Halbkreis oder der Bogen von 180° $= \pi a = 3,1416 \times 12 = 37,7$ ist, so hat man:

$$180^\circ : 39^\circ 55' = 37,7 : s = 8,36.$$

Werden die eben gefundenen Zahlen in die allgemeine Formel substituirt, so erhält man:

$$X = \frac{ay}{s} = \frac{12 \times 7,7}{8,36} = 11,05.$$

Dieser Werth von X ist die Abscisse des Schwerpunctes des Bogens EB. Da jeder der Bogen BE und BF die Hälfte des Bogens EBF ist, so könnte man daraus schließen, daß der Schwerpunct dieses letzten Bogens im Endpunct G der eben berechneten Abscisse liegt, was sich auch leicht zeigen läßt.

Zieht man die Sehne BE und den Halbmesser, welcher diese Sehne und den zugehörigen Bogen in zwei gleiche Theile theilt, und setzt $^1/_2 BE = y' = 4,1$, $^1/_2$ Bog. $BE = s' = 4,18$; so verwandelt sich die allgemeine Formel in:

$$X' = \frac{ay'}{s'} = \frac{12 \times 4,1}{4,18} = 11,77.$$

Der Endpunct dieser Abscisse liegt im Durchschnittspuncte g des Halbmessers und des im Puncte G auf der Abscissenaxe errichteten Perpendikels. Ebenso findet man den Schwerpunct g' des Bogens BF, und die gerade Linie gg', welche die Schwerpuncte der beiden halben Bogen verbindet, wird im Puncte G, dem Schwerpuncte des ganzen Bogens EBF, in zwei gleiche Theile getheilt.

§. 55. Wenn man den Schwerpunct einer ebenen Fläche bestimmen soll, so nimmt man die Coordinatenaxen so an, daß diese Fläche in der Ebene der x, y liegt, und um alsdann die Formeln:

$$V = v + v' + v'' + etc.,$$
$$VX = vx + v'x' + v''x'' + etc.,$$
$$VY = vy + v'y' + v''y'' + etc.$$

anwenden zu können, muß man zunächst für das Volumen und seine verschiedenen Theile analoge Ausdrücke der Fläche und ihrer unendlich kleinen Elemente setzen.

Es sei Auv (Fig. 32) ein halbes Curvensegment, welches wir uns durch Parallelen zu der Axe AY in unendlich schmale Elemente getheilt vorstellen wollen. Eins dieser Elemente ist das Trapez $uvv'u'$, und wenn man ur' parallel zu der Axe AX zieht, so wird dieses Flächen-Element durch $ydx + {}^1/_2\, dxdy$ oder bloß durch ydx ausgedrückt, weil das zweite Glied, welches eine unendlich kleine Größe der zweiten Ordnung ist, hinweggelassen werden muß.

Wenn man die Summe aller Elementartrapeze oder die Fläche des halben Segmentes Auv mit t bezeichnet und bemerkt, daß die Momente des Flächenelementes ydx in Beziehung auf die Axen der y und der x resp. durch $x \times ydx$ und $^1/_2 y \times ydx$ ausgedrückt werden; so erhält man statt der Summe der Partialvolumina und der der Momente derselben ähnliche Ausdrücke in Beziehung auf die Flächen, nämlich:

$$t = \int y dx,\ tX = \int xy dx,\ tY = \tfrac{1}{2}\int y^2 dx,$$

$$X = \frac{\int xy dx}{\int y dx}.$$

Wenn die Curve durch ihre Gleichung gegeben ist, so eliminirt man aus den vorhergehenden Gleichungen zuerst eine der veränderlichen Größen vermittelst der Gleichung der Curve, worauf sich die Werthe der Coordinaten des Schwerpunctes durch Integration ergeben.

Wenn die Curve eine Ellipse ist, deren Scheitel im Anfangspuncte A der Coordinaten liegt, so ist ihre Gleichung:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2),\ y = \frac{b}{a}\sqrt{2ax - x^2},$$

und wenn dieser Werth von y in den Ausdruck der Abscisse des Schwerpunctes substituirt wird, so erhält man:

$$X = \frac{\int x dx \times \frac{b}{a}\sqrt{2ax - x^2}}{\int dx \times \frac{b}{a}\sqrt{2ax - x^2}} = \frac{\int x dx \sqrt{2ax - x^2}}{\int dx \sqrt{2ax - x^2}}.$$

Das Verhältniß der Axen der Ellipse ist, wie man sieht, aus diesem Ausdrucke verschwunden und die Aufgabe reducirt sich darauf, die Abscisse des Schwerpunctes eines Kreisabschnittes zu bestimmen, welcher dieselbe Höhe hat, als der elliptische Abschnitt und über der großen Axe als Durchmesser beschrieben ist.

Das Integral des Nenners drückt die Fläche des halben Kreisabschnittes LAv aus, und wenn man den Zähler integrirt, so findet man:

$$\frac{x dx (2ax - x^2)^{\frac{1}{2}}}{{}^3/_2\, d(2ax - x^2)} = \frac{x(2ax - x^2)^{\frac{3}{2}}}{3(a - x)}.$$

Wenn man in dem Zähler dieses Integrales $a - x$ statt x setzt, so wird die Abscisse des Schwerpunctes vom Mittelpuncte O aus gezählt und man hat:

$$X = \frac{{}^1/_3 (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}{t},$$

was man auch gefunden haben würde, wenn man den Werth von y aus der Gleichung der auf ihren Mittelpunct bezogenen Ellipse genommen hätte.

Bisher haben wir bloß das halbe Segment betrachtet, und wenn man das ganze Segment nimmt, so verwandelt sich die Formel in:

$$X = \frac{{}^2/_3 (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}{2t} = \frac{{}^2/_3 y^3}{2t} = \frac{{}^1/_{12}(LN)^3}{LANL}.$$

Dieses Resultat stimmt mit dem überein, welches wir für den Abstand des Mittelpunctes des Kreises vom Schwerpuncte eines Abschnittes desselben erhalten haben, woraus folgt, daß der elliptische Abschnitt $uAwu$ und der entsprechende Abschnitt $LANL$ des über der großen Axe der Ellipse als Durchmesser beschriebenen Kreises ihren Schwerpunct G' auf dieser Axe in derselben Entfernung von dem gemeinschaftlichen Mittelpuncte O beider Curven haben.

§. 56. Aufg. Den Schwerpunct eines Parabelsegmentes zu finden. — Aufl. Dieser Punct liegt auf der Axe der Parabel, und um seine Abscisse oder seinen Abstand vom Scheitel der Curve zu finden, wollen wir uns der beiden Formeln:

$$t = \int y\,dx,\quad tX = \int xy\,dx$$

bedienen; denn wenn wir mit der ersten in die zweite dividiren, so erhalten wir:

$$X = \frac{\int yx\,dx}{\int y\,dx}.$$

Die Gleichung der Parabel ist:

$$y^2 = px,\quad y = p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}},$$

und durch die Substitution dieses Werthes von y verwandelt sich der Ausdruck der Abscisse des Schwerpunctes in:

$$X = \frac{\int x^{\frac{3}{2}} dx}{\int x^{\frac{1}{2}} dx} = \frac{{}^2/_5\, x^{\frac{5}{2}}}{{}^2/_3\, x^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{5}\, x,$$

woraus erhellet, daß der Abstand des Scheitels der Parabel vom Schwerpuncte eines Segmentes dieser Curve ${}^3/_5$ der Abscisse dieses Segmentes beträgt.

Die Auflösung dieser Aufgabe ist eine der Entdeckungen des Archimedes, welchem man die ersten Principien der Statik verdankt.

Schwerpunct der Rotationsflächen.

§. 57. Es sei DMH (Fig. 33) die Curve, welche bei ihrer Drehung um die in ihrer Ebene liegende Axe AX eine Rotationsoberfläche beschreibt, deren Flächeninhalt wir mit S bezeichnen wollen; so beschreibt das Curvenelement $Mm = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ die Oberfläche eines abgestumpften Kegels, welche ein Element der Oberfläche S bildet. Wenn man MP und mp senkrecht auf die Axe AX zieht, so liegt der Schwerpunct dieses Flächenelementes in der Mitte von Pp und man kann $AP = x$ zur Abscisse dieses Schwerpunctes nehmen, weil sie von x nur um eine unendlich kleine Größe verschieden ist.

Die krumme Oberfläche des von dem Curvenelemente Mm beschriebenen abgestumpften Kegels wird durch das Product aus diesem Elemente und dem Umfange des von der Ordinate $MP = y$ beschriebenen Kreises, d. h. durch $2\pi y \sqrt{dx^2 + dy^2}$ ausgedrückt und die Summe aller dieser Elemente oder die ganze krumme Oberfläche S durch $2\pi \int y \sqrt{dx^2 + dy^2}$. Bezeichnet man also die Abscisse des Schwerpunctes dieser krummen Fläche durch X, so hat man:

$$SX = 2\pi \int xy \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Diese Gleichung drückt aus, daß das Moment des Schwerpunctes der ganzen Fläche der Summe der Momente aller ihrer Elemente gleich ist.

Der Werth von X ergibt sich aus den beiden vorhergehenden Gleichungen, wenn man die zweite durch die erste dividirt, und man hat:

$$X = \frac{\int xy \sqrt{dx^2 + dy^2}}{\int y \sqrt{dx^2 + dy^2}}.$$

§. 58. Wir wollen nun den Schwerpunct der durch die Umdrehung der geraden Linie DH um die Axe OX (Fig. 33) erzeugten abgestumpften Kegelfläche zu bestimmen suchen.

Wenn der Anfangspunct der Coordinaten im Puncte O liegt, wo die Verlängerung der Erzeugungslinie die Axe der Abscissen trifft; so hat man die Gleichung $y = ax$, und wenn man sie differentiirt, so erhält man $dy = adx$, also $dy^2 = a^2dx^2$, und wenn man endlich die Werthe von y und dy^2 in den Ausdruck der Abscisse des Schwerpunctes substituirt, so bekommt man:

$$X = \frac{a\int x^2 \sqrt{dx^2 + a^2dx^2}}{a\int x \sqrt{dx^2 + a^2dx^2}} = \frac{\int x^2dx}{\int xdx} = \frac{{}^1/_3 x^3 + C}{{}^1/_2 x^2 + C}.$$

Die Constanten müssen so bestimmt werden, daß das Integral von $x = OB = \alpha$ bis $x = OE = \beta$ genommen wird. An der ersten dieser Grenzen ist das Integral Null und man hat:

$$x = \alpha,\ 0 = \frac{1}{3}\alpha^3 + C,\ C = -\frac{1}{3}\alpha^3,$$

$$x = \beta,\ \int x^2dx = \frac{1}{3}\beta^3 + C = \frac{1}{3}\beta^3 \quad \frac{1}{3}\alpha^3;$$

und ebenso findet man:

$$\int xdx = \frac{1}{2}\beta^2 - \frac{1}{2}\alpha^2.$$

Substituirt man diese Ausdrücke der Integrale und dividirt den Zähler und Nenner durch ihren größten gemeinschaftlichen Divisor $\beta - \alpha$; so findet man:

$$X = \frac{2}{3} \cdot \frac{\beta^2 + \beta\alpha + \alpha^2}{\beta + \alpha} = \frac{2}{3}\left(\beta + \frac{\alpha^2}{\beta + \alpha}\right),$$

$$X - \alpha = \frac{2}{3}\beta - \alpha + \frac{2\alpha^2}{3(\beta + \alpha)} = BG.$$

Wenn man DF zu der Axe OX parallel zieht, so geben die ähnlichen Dreiecke HDF, DOB:

$$HE - DB : DB = BE : \alpha = \frac{BE \times DB}{HE - DB},$$

$$\beta = BE + \alpha = \frac{BE \times HE}{HE - DB},$$

und wenn man die Werthe von α, β substituirt, die Rechnungen verrichtet und die sich gegenseitig aufhebenden Glieder hinwegläßt; so findet man:

$$BG = \frac{1}{3}\, BE \times \frac{2HE + DH}{HE + DB}.$$

Dieses Resultat stimmt mit dem überein, welches wir für die Bestimmung des Schwerpunctes des Trapezes gefunden haben, woraus er-

hellet, daß der Schwerpunct des abgestumpften Kegels und der des Trapezes, welches man erhält, wenn man denselben nach seiner Axe mit einer Ebene durchschneidet, in demselben Puncte dieser Axe liegen.

Schwerpunct der Rotationskörper.

§. 59. Das Flächenelement oder Differential einer Rotationsfläche wird ausgedrückt durch $2\pi y ds$ oder durch $2\pi y \sqrt{dx^2 + dy^2}$, d. h. durch das Product des Umfanges der Grundfläche eines Cylinders und seiner unendlich kleinen Höhe. Wenn man in diesem Producte den Flächeninhalt der Grundfläche des Cylinders für ihren Umfang setzt, so erhält man den Ausdruck $\pi y^2 \sqrt{dx^2 + dy^2}$ als das Volumendifferential, und wenn man dieses Volumen mit V bezeichnet, so hat man:

$$V = \pi \int y^2 \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Die Summe der Momente aller Volumenelemente in Beziehung auf die Axe der y wird ausgedrückt durch:

$$\pi \int xy^2 \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Diese Summe ist gleich dem Momente VX des Schwerpunctes des ganzen Volumens in Beziehung auf dieselbe Axe, und man hat folglich zur Bestimmung des Punctes der Axe eines Rotationskörpers, worin der Schwerpunct des Körpers liegt, die Differentialgleichungen:

$$V = \pi \int y^2 \sqrt{dx^2 + dy^2},\quad VX = \pi \int xy^2 \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

$$X = \frac{\int xy^2 \sqrt{dx^2 + dy^2}}{\int y^2 \sqrt{dx^2 + dy^2}},$$

welche man integrirt, nachdem man die eine veränderliche Größe fortgeschafft hat.

§. 60. Es sei der Schwerpunct eines abgestumpften Kegels zu finden, welcher durch die Umdrehung des Trapezes $BDHE$ (Fig. 33) um die Axe OX erzeugt wird.

Wenn der Punct O, worin die Axe der Abscissen von der Verlängerung der Erzeugungslinie HD geschnitten wird, zum Anfangspuncte genommen wird; so hat man die Gleichung $y = ax$, welche die folgenden Werthe gibt:

$$y^2 = a^2x^2,\quad dy^2 = a^2dx^2;$$

und wenn diese Werthe in den Ausdruck der Abscisse des Schwerpunctes substituirt werden, so erhält man:

$$X = \frac{a^2 \int x^3 \sqrt{dx^2 + a^2dx^2}}{a^2 \int x^2 \sqrt{dx^2 + a^2dx^2}} = \frac{\int x^3 dx}{\int x^2 dx} = \frac{{}^1/_4\, x^4 + C}{{}^1/_3\, x^3 + C}.$$

Zur Bestimmung der Constanten wollen wir $x = OB = \alpha$, $x = OE = \beta$ setzen; so erhalten wir für das Integral des Zählers:

$$x = \alpha,\ 0 = \tfrac{1}{4}\alpha^4 + C,\ C = -\tfrac{1}{4}\alpha^4,$$

$$x = \beta,\ \int x^3 dx = \tfrac{1}{4}\beta^4 + C = \tfrac{1}{4}(\beta^4 + \alpha^4).$$

Ebenso findet man das Integral des Nenners $= {}^1/_3(\beta^3 - \alpha^3)$, und die Abscisse des Schwerpunctes wird ausgedrückt durch:

$$X = \frac{3}{4} \cdot \frac{\beta^4 - \alpha^4}{\beta^3 - \alpha^3} = \frac{3}{4} \cdot \frac{\beta^3 + \beta^2\alpha + \beta\alpha^2 + \alpha^3}{\beta^2 + \beta\alpha + \alpha^2}.$$

Setzt man der Kürze wegen $BD = b$, $EH = c$ und $BE = h$; so geben die ähnlichen Dreiecke HDF, DOB:

$$\alpha = \frac{bh}{c - b'}, \quad \beta = \frac{ch}{c - b};$$

und wenn man diese Werthe von α, β substituirt und die sich gegenseitig aufhebenden Glieder hinweg läßt; so kommt:

$$X - \alpha = BG' = \frac{h}{4}, \frac{3c^2 + 2cb + b^2}{c^2 + cb + b^2},$$

welches die bei der ersten Auflösung derselben Aufgabe gefundene Formel ist.

Man könnte durch Anwendung der im Vorhergehenden abgeleiteten Differentialformeln noch viele andere Aufgaben über die Bestimmung des Schwerpunctes der Linien, Flächen und Körper lösen; allein die mitgetheilten Beispiele sind hinreichend, um den Gebrauch dieser Formeln zu zeigen.

Barycentrische Methode.

Wir haben nun noch eine der schönsten und nützlichsten Anwendungen von der Theorie des Schwerpunctes mitzutheilen. Sie besteht in einem von Pappus ausgesprochenen Lehrsatze, welcher ins Vergessen gerathen, aber von Guldin wieder in Erinnerung gebracht und in seiner 1635 und 1642 erschienenen Abhandlung über den Schwerpunct die barycentrische Methode genannt ist. Guldin hat diesen Lehrsatz nicht bewiesen, aber er hat durch viele Anwendungen desselben gezeigt, daß diese Methode, welche auch die Guldinische Regel genannt wird, in Beziehung auf die Ausmessung der Rotationsoberflächen und Körper zu denselben Resultaten führt, als die Geometrie.

Wenn sich eine Linie, oder eine ebene Fläche um eine in derselben Ebene liegende feste gerade Linie dreht, so wird eine Rotationsoberfläche oder ein Rotationskörper erzeugt, welche resp. das Product aus der Länge der Linie und dem von ihrem Schwerpuncte beschriebenen Kreisumfange oder das Product aus dem Inhalte der Fläche und dem Umfange des von ihrem Schwerpuncte beschriebenen Kreises zum Maaße haben.

Dieser Lehrsatz läßt sich leicht beweisen, wenn man die Betrachtungen und Formeln anwendet, deren wir uns vorhin zur Bestimmung des Schwerpunctes bedient haben.

§. 61. Es sei DMH (Fig. 33) ein mit der Abscissenaxe AX in derselben Ebene liegender Curvenbogen. Wenn man von den Endpuncten D und H dieses Bogens, welchen wir mit s bezeichnen wollen, auf die Abscissenaxe die Perpendikel DB, HE fällt und die Figur

BDMHE sich um diese Axe drehen läßt; so beschreibt der Bogen *DMH* eine Fläche, deren Inhalt gefunden werden soll.

Wir wollen annehmen, daß diese Oberfläche in unendlich schmale Zonen getheilt sei, und es sei $Mm = ds$ die Höhe einer solchen Zone. Die Zone, welche das Flächenelement bildet, ist eine abgestumpfte Kegelfläche, deren Inhalt durch das Product aus dem Umfange eines in gleicher Entfernung von den beiden Grundflächen gemachten Durchschnittes und der Seitenlinie des abgestumpften Kegels, folglich, wenn die Coordinaten *AP*, *PM* des Punctes *M* mit x, y bezeichnet werden, durch $2\pi\,(y + {}^1/_2\,dy)\,ds$ oder bloß durch $2\pi y ds$ ausgedrückt wird, weil das zweite Glied eine unendlich kleine Größe der zweiten Ordnung ist, welche vernachlässigt werden muß.

Bezeichnet man also die durch die Umdrehung des Bogens s beschriebene Fläche mit S, so hat man:

$$S = 2\pi \int y ds = 2\pi \int y \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Ferner ist der Bogen $s = \int \sqrt{dx^2 + dy^2}$, und wenn man die Momente in Beziehung auf die Axe AX nimmt, die Ordinate des Schwerpunctes des Bogens s mit Y bezeichnet und endlich bemerkt, daß y die Ordinate des Schwerpunctes des Curvenelementes Mm ist; so hat man die folgende Gleichung:

$$sY = \int y \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Das Integral in den zweiten Theilen dieser beiden Gleichungen ist dasselbe, weil es aus denselben Gliedern besteht und zwischen denselben Grenzen genommen werden muß. Wenn man also die erste Gleichung durch die zweite dividirt, so erhält man:

$$\frac{S}{sY} = 2\pi,\quad S = s \times 2\pi Y.$$

Hieraus erhellet, 1) daß die durch die Umdrehung des Bogens s beschriebene Fläche das Product aus der Länge dieses Bogens und dem Umfange des von seinem Schwerpuncte beschriebenen Kreises zum Maaße hat.

Betrachten wir nun den Körper, welcher durch die Umdrehung der ebenen Fläche *BDMHE* um die in derselben Ebene liegende feste Axe *AX* erzeugt wird.

Wenn die erzeugende Fläche *BDMHE* durch Ordinaten oder Perpendikel auf der Axe *AX* in unendlich schmale Elemente getheilt wird, so erzeugt das zwischen zwei aufeinander folgenden Ordinaten y und $y + dy$, deren gegenseitige Entfernung $Pp = dx$ ist, liegende Flächenelement einen abgestumpften Kegel; aber wenn man die unendlich kleinen Größen der zweiten Ordnung außer Acht läßt; so hat man statt des Kegels einen Cylinder, dessen Inhalt $= \pi y^2 dx$ ist.

Bezeichnet man das ganze durch die Umdrehung der erzeugenden Fläche erzeugte Volumen mit V, so hat man:

$$V = \pi \int y^2 dx.$$

Bezeichnet t die Anzahl der unendlich schmalen Streifen der erzeugenden Oberfläche oder den Inhalt derselben, so hat man $t = \int y dx$.

Bezeichnet ferner Y die Ordinate des Schwerpunctes der ganzen erzeugenden Fläche, so ist die des Schwerpunctes des Flächenelementes $= {}^1/_2 y$, und wenn man in Beziehung auf die Axe der x die Momente nimmt, so hat man die Gleichung:

$$tY = \frac{1}{2} \int y^2 dx.$$

Das Integral in diesen beiden Gleichungen ist dasselbe; und wenn man sie durch einander dividirt, so erhält man:

$$V = t \times 2\pi Y.$$

Folglich hat 2, das Volumen eines Rotationskörpers das Product aus der Größe der erzeugenden Fläche und dem Umfange des Kreises, dessen Halbmesser die Ordinate des Schwerpunctes dieser Fläche ist, zum Maaße.

Wir haben bisher vorausgesetzt, daß die erzeugende Linie oder Fläche um die feste Axe eine ganze Umdrehung macht; aber wenn sie nur einen Theil der ganzen Umdrehung macht und n bezeichnet die in dem beschriebenen Winkel oder Bogen enthaltene Anzahl von Graden, Minuten und Secunden; so muß man statt der Größe 2π, welche den Umfang des Kreises von dem Halbmesser $= 1$ ausdrückt, die Länge des beschriebenen Bogens von demselben Halbmesser in die Formel setzen. Dieser Bogen wird ausgedrückt durch:

$$\frac{2\pi \times n}{360^\circ} = \frac{n}{27^\circ,2958} = \frac{n}{27^\circ\, 17'\, 44''}$$

und wenn man das Volumen durch V' bezeichnet, so verwandelt sich die obige Formel in:

$$V' = t \times \frac{n}{27^\circ\, 17'\, 44''}\, Y.$$

Der eben bewiesene Lehrsatz gibt sehr leichte und einfache Mittel zur Messung der Oberfläche und des Volumens eines runden Körpers an die Hand, wenn die Erzeugungslinie oder Fläche und ihr Schwerpunct bekannt ist. Wir wollen daher den erwähnten Lehrsatz auf einige Beispiele anwenden.

§. 62. Der Schwerpunct einer geraden Linie von der Länge a liegt in der Mitte dieser Länge; und wenn man diese gerade Linie sich in derselben Ebene um einen ihrer Endpuncte drehen läßt, so beschreibt sie eine Kreisfläche und der Halbmesser des von ihrem Schwerpuncte beschriebenen Kreisumfanges ist $= {}^1/_2 a$. Die Länge des Kreisumfanges, dessen Halbmesser $= 1$ ist, wird ausgedrückt durch $2\pi = 2 \times 3,14159$, und folglich wird die Länge des Kreisumfanges von dem Halbmesser ${}^1/_2 a$ ausgedrückt durch $2\pi \times {}^1/_2 a = \pi a$. Bezeichnet also S den Flächeninhalt des von der Erzeugungslinie beschriebenen Kreises, so hat man nach der Guldinischen Regel:

$$S = \pi a \times a = \pi a^2,$$

was mit den Lehren der Elementargeometrie übereinstimmt.

Wenn die Erzeugungslinie keine ganze Umdrehung macht, so beschreibt sie einen Kreisausschnitt. Gesetzt, der Winkel am Mittelpuncte betrüge 90°, so muß man statt des ganzen Kreisumfanges 2π den

Bogen $\frac{2\pi n}{360} = \frac{2\pi \times 90}{360} = \frac{1}{2}\pi$ setzen; und wenn S' die Fläche des Kreisausschnittes bezeichnet, so ist:

$$S' = \frac{1}{2}\pi a \times \frac{1}{2}a,$$

wie auch die Geometrie lehrt.

Aufg. Den Inhalt der Fläche zu finden, welche durch die Umdrehung des Kreisbogens DMH (Fig. 33) um den Halbmesser CA erzeugt wird. — Aufl. Zieht man den Halbmesser CK, welcher den Bogen DMH in zwei gleiche Theile theilt, so liegt der Schwerpunct g dieses Bogens auf dem Halbmesser CK, und für den Ausdruck seines Abstandes vom Mittelpuncte des Kreises haben wir in §. 43 gefunden $Cg = \frac{DH \times CK}{\text{Bog. } DMH}$.

Aus dem Schwerpuncte g wollen wir auf den Halbmesser CA das Perpendikel gq fällen, so ist dieses Perpendikel der Halbmesser des Kreises, welchen der Schwerpunct des Bogens DMH beschreibt, und das rechtwinklige Dreieck Cqg gibt $gq = Cg \times \sin. gCq$.

Durch den Punct D wollen wir DF parallel zu AC ziehen, so sind die beiden Dreiecke Cqg, DFH einander ähnlich, weil ihre Seiten resp. zu einander parallel sind, und wenn man die Sinus der homologen Winkel vergleicht, so hat man:

$$\sin. gCq = \sin. DHF = \frac{DF}{DH}.$$

Werden die Werthe von Cg und $\sin. gCq$ in den Werth von gq substituirt und bemerkt man, daß $DF = BE$ ist; so hat man:

$$gq = \frac{DH \times CK}{\text{Bog. } DMH} \times \frac{DF}{DH} = \frac{CK \times BE}{\text{Bog. } DMH'}$$

und wenn man jeden Theil dieser Gleichung durch $2\pi \times$ Bog. DMH multiplicirt, so verwandelt sie sich in:

$$2\pi \times gq \times \text{Bog. } DMH = 2\pi \times CK \times BE$$
$$= 2\pi \times Eh \times BE.$$

Der erste Theil dieser Gleichung drückt nach dem Guldinischen Lehrsatze den Inhalt der durch die Umdrehung des Bogens DMH erzeugten Fläche oder Kugelzone aus und der zweite Theil ist der Ausdruck der converen Oberfläche des Cylinders von derselben Höhe als diese Zone und dessen Halbmesser der Grundfläche dem Halbmesser des Bogens oder dem der Kugel gleich ist. Man erhält also hier den in der Geometrie bewiesenen Satz wieder, daß die Oberfläche einer beliebigen Kugelzone der convexen Oberfläche des entsprechenden Theiles des um die Kugel beschriebenen Cylinders gleich ist.

§. 63. Aufg. Den körperlichen Inhalt eines durch die Umdrehung des rechtwinkligen Dreieckes OEH (Fig. 33) um die Kathete OE erzeugten Kegels zu finden. — Aufl. Der Schwerpunct des Dreieckes OEH liegt in der geraden Linie, welche

die Spitze H mit der Mitte der gegenüberliegenden Seite OE verbindet, und zwar um $^2/_3$ dieser Linie von dieser Seite entfernt, so daß auch die senkrechte Entfernung des Schwerpunctes des Dreieckes von derselben Seite oder der Halbmesser des von diesem Schwerpuncte beschriebenen Kreises $= {}^1/_3 \overline{EH}$ ist. Der Umfang dieses Kreises ist also gleich $2\pi \times {}^1/_3 \overline{EH} = {}^2/_3 \pi \overline{EH}$. Multiplicirt man diesen Kreisumfang durch die Größe ${}^1/_2 OE \times EH$, welche die Fläche des rechtwinkligen Dreieckes ausdrückt; so erhält man den körperlichen Inhalt des erzeugten geraden Kegels $= {}^1/_3 \pi (EH)^2 \times OE$, d. h. der körperliche Inhalt eines geraden Kegels wird ausgedrückt durch den dritten Theil des Productes aus seiner Grundfläche und Höhe.

§. 64. Den körperlichen Inhalt eines ellipsoidischen Segmentes zu finden, welches durch die Umdrehung des halben elliptischen Segmentes $BQ'QE$ (Fig. 33) um die halbe große Axe AC erzeugt wird. — Aufl. Wenn die Halbaxen CA, CN der Ellipse durch a, b ausgedrückt werden, und der Anfangspunct der Coordinaten im Mittelpuncte C liegt, so ist die Gleichung der Ellipse:

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2, \quad y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2).$$

Die Ordinate von Y des Schwerpunctes der erzeugenden Fläche $BQ'QE$ wird nach §. 55 ausgedrückt durch:

$$Y = \frac{{}^1/_2 \int y^2 dx}{\int y dx},$$

und wenn man den aus der Gleichung der Ellipse genommenen Werth von y^2 substituirt, so verwandelt sich diese Formel in:

$$Y = \frac{\frac{b^2}{2a^2}\int (a^2 - x^2)\, dx}{\int y dx} = \frac{\frac{b^2}{2a^2}\int (a^2 dx - x^2 dx)}{\int y dx}$$

$$= \frac{\frac{b^2}{2a^2}(a^2 x - {}^1/_3 x^3) + C}{\int y dx}.$$

Zur Bestimmung der Constante C wollen wir bemerken, daß das Integral von $x = CE = \alpha$ bis $x = CB = \beta$ genommen werden muß, und wenn diese Abscissen successive für x substituirt werden, so findet man nach dem in §. 59 an einem Beispiele ausführlich gezeigten Verfahren:

$$Y = \frac{\frac{b^2}{6a^2}(\beta - \alpha)[3a^2 - (\beta^2 + \beta\alpha + \alpha^2)]}{\int y dx}.$$

Der Nenner $\int y dx$ drückt den Flächeninhalt der erzeugenden Fläche aus, und wenn man das durch sie erzeugte Volumen mit V bezeichnet und beide Theile der vorhergehenden Gleichung mit $2\pi \int y dx$ multiplicirt, so erhält man:

$$V = 2\pi Y \int y dx$$

$$= 2\pi \frac{b^2}{6a^2} (\beta - \alpha) [3a^2 - (\beta^2 + \beta\alpha + \alpha^2)].$$

Wenn die erzeugende Fläche die Viertelellipse $CAQN$ ist, so ist $\alpha = 0$, $\beta = a$, und der erzeugte Körper das halbe Ellipsoid, dessen Volumen ausgedrückt wird durch:

$$V = 2\pi Y \int y dx = 2\pi \frac{b^2}{6a^2} \times a (3a^2 - a^2) = \frac{2}{3} \pi a b^2.$$

§. 65. Wir wollen nun den Inhalt des durch die Umdrehung der Viertelellipse $CAQN$ (Fig. 33) um ihre halbe kleine Axe CN erzeugten Körpers zu bestimmen suchen.

Bei dieser Rotationsbewegung beschreibt der Schwerpunct der Viertelellipse $CAQN$ einen Kreis, welcher die Abscisse desselben Punctes zum Halbmesser hat, und nach §. 55 durch folgende Formel ausgedrückt wird:

$$X = \frac{\int xy dx}{\int y dx}, \quad 2\pi X \int y dx = 2\pi \int yx dx.$$

Substituirt man in den zweiten Theil dieser Gleichung für y seinen aus der Gleichung der Ellipse genommenen Werth, so erhält man:

$$\frac{2\pi b}{a} \int (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} x dx = \frac{2\pi b}{a} \cdot \frac{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} x dx}{{}^3/_2 d(a^2 - x^2)}$$

$$= -\frac{2\pi b}{3a} (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Die Constante C muß so bestimmt werden, daß das Integral von $x = 0$ bis $x = a$ genommen wird, und man hat folglich:

$$O = -\frac{2\pi b}{3a} \times a^3 + C, \quad C = \frac{2\pi a^2 b}{3},$$

$$V = 2\pi X \int y dx = -\frac{2\pi b}{3a} (a^2 - a^2) + C = \frac{2}{3} \pi a^2 b.$$

Dieses Resultat unterscheidet sich von dem bei der Auflösung der vorhergehenden Aufgabe gefundenen nur durch die Vertauschung der Halbaxen der Ellipse, deren vierter Theil in beiden Aufgaben die erzeugende Fläche bildet.

Wenn die beiden Axen einander gleich sind, so ist die erzeugende Fläche ein Viertelkreis und die vorhergehende Formel verwandelt sich in:

$$V = \frac{2}{3} \pi a^3 = 2\pi a^2 \times \frac{1}{3} a,$$

wie auch die Elementargeometrie lehrt.

Es wird nicht nöthig sein, noch mehr Aufgaben hier mitzutheilen, auf welche sich die barycentrische Methode anwenden läßt; denn die bisher aufgelösten Aufgaben sind hinreichend, um von dieser Methode einen genauen Begriff zu geben und zu zeigen, wie die Wissenschaften einander gegenseitig die Hand bieten. Ein Mehreres über diesen Gegenstand findet man in der Abhandlung von Varignon unter dem

Titel: **Réflexions sur l'usage que la Mécanique peut avoir en Géometrie (Mémoires de l'Académie des Sciences 1714)**; und beſonders iſt zu Rathe zu ziehen Möbius, Barycentriſcher Calcul, Leipzig 1827 und deſſen vortreffliches Lehrbuch der Statik, Leipzig 1837.

Fünftes Kapitel.

Von den Maſchinen.

§. 66. Eine Maſchine iſt ein Inſtrument, deſſen Zweck im Allgemeinen darin beſteht, die Wirkung einer Kraft von dem Puncte, auf welchen ſie unmittelbar wirkt, auf einen andern Punct überzutragen, auf welchen man ſie wirken laſſen will, um ein Hinderniß zu überwinden und eine Arbeit zu verrichten, welche man entweder gar nicht, oder nur mit Schwierigkeit würde verrichten können, wenn man die Kraft unmittelbar auf den zweiten Punct wirken ließe.

Die Kraft, welche erforderlich iſt, um einer Maſchine die nöthige Bewegung zu ertheilen, wird der Beweger genannt, und das Hinderniß, welches dieſer Beweger vermittelſt der Maſchine überwinden muß, heißt der Widerſtand.

Will man den Effect einer Maſchine berechnen, ſo ſucht man zunächſt die Bedingungen des Gleichgewichtes zwiſchen dem Beweger und dem Widerſtande, und dieſe Unterſuchung ergibt ſich aus den in den vorhergehenden Kapiteln mitgetheilten Lehren. Die Maſchinen, womit wir uns in dem gegenwärtigen Kapitel beſchäftigen wollen, werden einfache Maſchinen genannt, wovon wir ſieben verſchiedene Arten unterſcheiden wollen, nämlich die Seile oder Seilmaſchine, den Hebel, die Rolle, das Rad an der Welle (Radwelle) oder den Haspel, die geneigte oder ſchiefe Ebene, die Schraube und den Keil. Nachdem wir dieſe einfachen Maſchinen näher unterſucht haben werden, werden wir noch mehrere andere einfache Maſchinen, welche ſich auf die erſtern zurückführen laſſen, betrachten. So werden wir z. B. nach dem Hebel die gewöhnliche Wage, die Schnellwage und einige andere Inſtrumente, welche zum Wägen beſtimmt ſind, und welchen die Theorie des Hebels zum Grunde liegt, beſchreiben. Auch werden wir eine kurze Beſchreibung von den Brückenwagen geben, welche zum Wägen ganzer Fuhrwerke dienen und eine der ſinnreichſten Hebelverbindungen bilden, welche je erdacht worden ſind.

Zur leichtern Anwendung der Principien, welche zur Ableitung der Gleichgewichtsgeſetze der einfachen Maſchinen dienen, werden wir einen ähnlichen Gang, wie in den erſten Kapiteln befolgen; d. h. wir betrachten die Maſchinen als von alledem befreit, was ihren Wirkungen hinderlich ſein könnte. So werden wir z. B. die Seile als unausdehnbare, vollkommen biegſame Fäden von einem ſo kleinen Durchmeſſer betrachten, daß derſelbe ohne merklichen Fehler unberückſichtigt

bleiben kann, und ebenso werden die Stangen und Stäbe als auf ihre Axen reducirt angenommen, so wie wir endlich auch die Wirkungen der Adhäsion und der Reibungen unberücksichtigt lassen werden.

Nachdem die Gleichgewichtsgesetze der einfachen Maschinen in diesem ideellen Zustande der Einfachheit abgeleitet sind, braucht man in die Formeln, welche diese Gesetze ausdrücken, nur die Größen einzuführen, wovon man abstrahirt hat, und welche für jede Maschine nach den Formen und Dimensionen ihrer verschiedenen Bestandtheile bestimmt werden müssen. Später werden wir an einigen Beispielen zeigen, welche Veränderungen die in Rede stehenden Formeln erfahren, wenn man die bei den ersten Auflösungen unberücksichtigt gelassenen Widerstände in dieselben einführt.

Der zusammengesetzten Maschinen gibt es eine so große Anzahl, daß das Studium dieses wichtigen Theiles menschlicher Kenntnisse große Schwierigkeiten darzubieten scheint; allein wenn man die Eigenschaften der einfachen Maschinen genau kennen gelernt hat, so kann man jede zusammengesetzte leicht beurtheilen; denn man braucht sie nur in alle ihre Bestandtheile zu zerlegen, welche nichts anders sind, als einfache Maschinen, welche so miteinander verbunden sind, daß sie vereinigt den gewünschten Effect hervorbringen.

Seilmaschine.

Die Seilmaschine besteht aus Seilen, welche zum Heben einer Last, zum Fortziehen eines schweren Körpers oder zur Ueberwindung eines beliebigen Widerstandes vermittelst einer oder mehrerer Kräfte angewandt werden.

Wenn an den beiden Enden eines Seiles zwei gleiche Kräfte nach entgegengesetztem Sinne wirken, so halten sie einander das Gleichgewicht und die Spannung des Seiles ist einer dieser Kräfte gleich; denn statt dieser Kraft kann man sich einen festen Punct denken, woran das Seil befestigt ist und alsdann ist die Spannung desselben unter der Wirkung der andern Kraft der Spannung gleich, welche durch die beiden gleichen und entgegengesetzten Kräfte hervorgebracht wird.

Wenn die beiden Kräfte einander nicht gleich sind, so ist die Spannung des Seiles, an dessen Enden sie nach entgegengesetztem Sinne wirken, der kleinen Kraft gleich; denn die größere kann in zwei Theile zerlegt werden, wovon der eine der kleinern Kraft gleich ist, und wenn diese beiden gleichen und entgegengesetzten Kräfte allein an dem Seile wirkten, so würden sie einander das Gleichgewicht halten, und eine derselben würde die Spannung des Seiles ausdrücken, folglich hat der andere Theil der größern Kraft keinen Einfluß auf diese Spannung.

§. 67. Aufg. Die Bedingungen des Gleichgewichtes dreier Kräfte zu finden, welche an drei durch einen Knoten mit einander verbundenen Seilen wirken. — Aufl. Es seien *P*, *Q*, *S* (Fig. 34) die drei Kräfte, welche an den drei mit einander durch einen Knoten *A* verbundenen Seilen wirken. Wenn zwischen diesen drei Kräften das Gleichgewicht stattfindet, so liegen 1) die drei Seile *AP*, *AQ* und *AS* in derselben Ebene; denn die beiden

Kräfte P, Q, deren Richtungen AP, AQ den Winkel PAQ mit einander bilden, liegen in derselben Ebene. Wenn nun die Richtung AS der dritten Kraft S nicht in der Ebene dieses Winkels läge, so könnte man sie in zwei andere Kräfte zerlegen, wovon die eine in der Ebene PAQ läge und die andere darauf senkrecht wäre, und diese letzte Kraft würde durch keine der übrigen Kräfte aufgehoben werden können, so daß folglich das Gleichgewicht nicht stattfände. Die drei Seile AP, AQ, AS liegen also in derselben Ebene, und außerdem ist 2) eine beliebige der drei Kräfte P, Q, S der Resultante der beiden andern gleich und direct entgegengesetzt.

Wenn man auf den Seilen AP, AQ die den Kräften P, Q proportionalen Längen AB, AC nimmt und das Parallelogramm $ABCD$ vollendet; so drückt die Diagonale AD die Resultante R der Kräfte P, Q aus, und folglich ist die dritte Kraft S, welche der Resultante R gleich und entgegengesetzt sein muß, durch $AE = AD$ ausgedrückt und man hat:

$$P : Q = AB : AC \text{ oder } BD$$
$$P : S = AB : AE \text{ oder } AD.$$

Diese beiden Proportionen geben:

$$P : Q : S = AB : BD : AD;$$

da aber in jedem geradlinigen Dreiecke sich die Seiten wie die Sinus der gegenüberliegenden Winkel oder ihrer Supplemente verhalten; so hat man:

$$AB : BD : AD = \sin. ADB : \sin. BAD : \sin. ABD$$
$$= \sin. CAE : \sin. BAE : \sin. BAC,$$

folglich: $$P : Q : S = \sin. CAE : \sin. BAE : \sin. BAC,$$

d. h. wenn die drei Kräfte P, Q, S, welche an drei durch einen Knoten mit einander verbundenen Seilen wirken, im Gleichgewichte sind; so ist jede dieser Kräfte dem Sinus des Winkels proportional, welchen die Richtungen der beiden andern Kräfte mit einander bilden.

Zur Aufstellung der Gleichung des Gleichgewichtes zwischen den drei Kräften P, Q, S hat man also sechs Größen in Betracht zu ziehen, und wenn drei dieser Größen bekannt sind, so kann man die drei andern durch eine graphische Construction, oder trigonometrisch finden; aber es muß sich unter den bekannten Größen wenigstens eine der Kräfte befinden; denn wenn man bloß die Winkel kännte, welche die Richtungen der Kräfte oder die Seile mit einander bilden, so könnte man bloß das Verhältniß der Kräfte bestimmen.

Wenn die drei Kräfte P, Q, S bekannt sind, so findet man die Winkel, welche ihre Richtungen mit einander bilden, wenn man das Dreieck ABD construirt, dessen drei Seiten diesen Kräften proportional sind, oder wenn man diese Winkel trigonometrisch berechnet. Wenn man die beiden Kräfte P, S und den Winkel $CAB = DBP$ kännte, so wäre das Dreieck ABD bestimmt; denn wenn die beiden Seiten AB, AD und der einer derselben gegenüberliegende Winkel $ABD = 180° - DBP$ bekannt sind, so kann man die übrigen Theile des Dreieckes durch eine geometrische Construction oder trigonometrisch finden.

Die Spannungen der Seile AP, AQ werden durch die Seiten AB, AC des Parallelogrammes $ABDC$ ausgedrückt, und wenn man sich statt der an diesen Seilen wirkenden Kräfte P, Q feste Puncte P, Q denkt, so drücken AB, AC die auf diese festen Puncte nach den Richtungen PA und QA ausgeübten Druckkräfte aus.

Wenn die Kräfte P, Q gegen die Kraft S sehr groß sind, so ist die Diagonale AD sehr klein und der Winkel BAC wird sehr stumpf.

Gesetzt, das Seil PAQ (Fig. 35), an dessen einem Ende die Kraft P wirkt, wäre an einem festen Puncte, welcher die Stelle der Kraft Q vertritt, befestigt, so hat man die Proportion:

$$P : S = \sin. CAE : \sin. BAC.$$

Wenn das Seil geradlinig gespannt wäre, so hätte man:

$$\sin. CAE = \sin. 90^\circ = 1, \quad \sin. BAC = \sin. 180^\circ = 0,$$

und die vorhergehende Proportion verwandelte sich in:

$$P : S = 1 : 0, \text{ also } P = \frac{S}{0} = \infty.$$

Hieraus sieht man, daß die Kraft P niemals groß genug werden kann, um das Seil geradlinig zu spannen, wie klein die Kraft S auch sein mag.

Wir haben bisher vorausgesetzt, daß die drei Seile im Puncte A durch einen festen Knoten mit einander verbunden sind; wenn aber das Seil AS mit dem Seile PAQ durch eine Schleife oder durch einen Ring verbunden ist, welcher frei fortgleiten kann; so sind die drei Kräfte P, Q, S nur dann im Gleichgewichte, wenn die Verlängerung AR des Seiles SA den Winkel PAQ in zwei gleiche Theile theilt. In der That ist einleuchtend, daß das Gleichgewicht nicht stattfindet, wenn die beiden Winkel PAR, QAR einander nicht gleich sind; denn das Seil AS gleitet nach der Seite des größten dieser Winkel fort.

§. 68. Aufg. Ein Seil von einer gegebenen Länge ist mit seinen beiden Enden an zwei der Lage nach gegebenen festen Puncten befestigt, und man soll bestimmen, in welchem Puncte dieses Seiles ein Gewicht, welches vermittelst eines Ringes fortgleiten kann, im Gleichgewichte ist.

Aufl. Es sei BAC (Fig. 36) das gegebene Seil, dessen Enden in den gegebenen Puncten B, C befestigt sind, und P sei das an dem Seile AP, welches mit dem Seile BAC durch einen Ring verbunden ist, aufgehangene Gewicht; so soll man den Punct A finden, in welchem das Seil mit dem Gewichte P im Gleichgewichte bleibt.

Durch den Punct B ziehe man die horizontale gerade Linie BD, verlängere das Seil PA bis zum Durchschneiden der Linie BD im Puncte L, ziehe durch den Punct C die Parallele ECF zu AL und verlängere BA bis zum Durchschneiden dieser Parallele im Puncte F; so hat man nach dieser Construction:

Winkel $BAL = CAL = AFC$
und Winkel $CAL = ACF$.

Das Dreieck ACF ist also gleichschenklig und Seite $AC = AF$, folglich BF gleich dem gegebenen Seile $BA + AC$.

In dem rechtwinkligen Dreiecke *BEF* kennt man die Hypotenuse *BF* und wegen der Lage der gegebenen Puncte *B* und *C* auch die Kathete *BE*, so daß man die andere Kathete *EF* und den Winkel *BFE* trigonometrisch bestimmen kann. Außerdem ist *EC* bekannt und folglich kennt man in dem gleichschenkligen Dreiecke *ACF* die Seite *CF* und den Winkel *AFC*, so daß man durch die Auflösung dieses Dreieckes die Seite *CA* erhält.

Der Gleichgewichtspunct *A* kann auch durch folgende Construction bestimmt werden: Durch den Punct *C* ziehe man die Verticale *ECF*, aus dem Puncte *B* als Mittelpunct beschreibe man mit dem Halbmesser *BF*, welcher der Länge des gegebenen Seiles gleich ist, einen Kreisbogen, der die Verticale im Puncte *F* schneidet, ferner ziehe man die gerade Linie *BF* und durch den Punct *G*, die Mitte von *FC*, ziehe man die horizontale gerade Linie *GA*; so schneidet dieselbe die Linie *BF* in dem gesuchten Puncte *A*.

Man kann auch die Aufgabe dadurch lösen, daß man durch die festen Puncte *B* und *C* die Verticalen *BH*, *CF* zieht, aus den Puncten *B* und *C* als Mittelpuncten und mit einem der Länge des gegebenen Seiles gleichen Halbmesser zwei Kreisbogen beschreibt, welche die Verticalen in *F* und *H* schneiden und dann die geraden Linien *BF* und *CH* zieht, deren Durchschnittspunct *A* der gesuchte Punct ist, worin das Seil mit dem Gewichte *P* im Gleichgewichte bleibt.

Eine Anwendung von dieser Aufgabe bietet sich bei dem Aufhängen der Straßenlaternen dar, wobei die Länge des Seiles unh die Aufhängungspuncte so bestimmt werden müssen, daß sich die Laterne an dem zur Erleuchtung zweckmäßigsten Puncte befindet, welchen Zweck die mit diesem Geschäfte beauftragten Personen mit einer zu bewundernden Geschicklichkeit und Schnelligkeit zu erreichen wissen.

§. 69. Wenn die Seile, woran die Kräfte wirken, durch Knoten an einem andern Seile befestigt sind; so bildet das letztere eine gebrochene Linie oder einen Theil eines Polygones; welches man ein Seilpolygon nennt, und wir wollen nun die Bedingungen suchen, welche erfüllt werden müssen, damit alle an einem Seilpolygone wirkenden Kräfte einander das Gleichgewicht halten, wobei wir zunächst voraussetzen, daß sich in jedem Knoten drei Seile vereinigen, und daß alle Knoten fest sind.

Es liege das von dem Seile *MBCDEN* (Fig. 37) gebildete Seilpolygon in derselben Ebene, indem die Kräfte *M*, *N* an den Endpuncten dieses Seiles und die Kräfte P', P'', P''', P^{IV} an den Seilen BP', CP'', DP''', EP^{IV} wirken, welche in den Puncten *B*, *C*, *D*, *E* durch feste Knoten an dem ersten Seile befestigt sind und in der Ebene des Polygones liegen. Wenn alle auf das System wirkenden Kräfte im Gleichgewichte sind, so müssen auch die an jedem Knoten wirkenden Kräfte im Gleichgewichte sein.

Wenn die Kräfte *M*, P' durch die Längen *Bb*, Bb' ausgedrückt werden und man vollendet das Parallelogramm bb'; so wird die Resultante aus diesen beiden Kräften durch die Diagonale Br' ausgedrückt und wirkt nach der Verlängerung des Seiles *BC*. Wir wollen annehmen, daß diese Resultante im Puncte *C* angebracht sei, so wird sie durch $Cc = Br'$ ausgedrückt, und wenn die Kraft P'' durch Cc' ausgedrückt wird und man construirt das Parallelogramm cc'; so drückt

die Diagonale Cr'' desselben, welche in die Verlängerung des Seiles CD fällt, die Resultante aus den drei Kräften M, P', P'' aus.

Wenn man ebenso die Kräfte N, P^{IV}, P''' zusammensetzt; so findet man, daß die Resultante dieser drei Kräfte durch die Diagonale Dr''' des Parallelogrammes dd' ausgedrückt wird. Diese Diagonale liegt in der Verlängerung des Seiles CD, und folglich reduciren sich alle an dem Seilpolygone angebrachten Kräfte auf zwei an den beiden Enden einer Seite des Polygones nach entgegengesetztem Sinne wirkende Kräfte, und da das Gleichgewicht in dem Systeme stattfindet, so sind diese beiden Kräfte einander gleich. Die Bedingung, welche erfüllt werden muß, damit sich das Seilpolygon $MBCDEN$ im Gleichgewichte befindet, besteht also darin, daß die Summe aller an demselben angebrachten Kräfte M, P', P'', ... $= 0$ ist.

Anmerk. 1. — Wenn die an einem Seilpolygone wirkenden Kräfte einander das Gleichgewicht halten, so wird jedes Seilstück von zwei gleichen und entgegengesetzten Kräften gezogen und es ist z. B. die Spannung des Seilstückes BC gleich der Resultante der beiden Kräfte M und P' oder der Resultante der vier übrigen Kräfte P'', P''', P^{IV}, N. Die Spannung des zweiten Seilstückes CD ist gleich der Resultante aus den drei Kräften M, P', P'' u. s. f. Wenn also die Kräfte und ihre Richtungen gegeben sind, so kann man durch Zusammensetzung der Kräfte die Spannung jedes Seilstückes finden und durch Versuche den Grad der Stärke bestimmen, welchen das Seilstück haben muß, um diesen Spannungen widerstehen zu können.

Anmerk. 2. — Wenn man die Richtungen der beiden äußersten Stücke des Seilpolygones bis zu ihrem Durchschneiden verlängert, so geht die Resultante aus allen an dem Seilpolygone wirkenden Kräften durch diesen Durchschnittspunct. Denn wenn man die Richtungen der beiden äußersten Seilstücke MB, NE bis zu ihrem Durchschnitte in F verlängert, so geht die Resultante aus den beiden Kräften M und N durch den Punct F; aber die Resultante aus zwei beliebigen an dem Seilpolygone wirkenden Kräften ist der Resultante aus allen übrigen daran angebrachten Kräften gleich und direct entgegengesetzt, und folglich muß diese letzte Resultante auch durch den Punct F gehen. Man kann also annehmen, daß alle an dem Seilpolygone wirkenden Kräfte parallel zu sich selbst in den Punct F verlegt sind.

§. 70. Die vorhergehende Auflösungsmethode des Problemes des Seilpolygones beruhet auf geometrischen Constructionen, welche eben kein genaues Resultat geben, besonders wenn man sich eines kleinen Maaßstabes bedient, und wir wollen daher dieselbe Aufgabe durch Rechnung trigonometrisch behandeln.

Da die an jedem Knoten angebrachten drei Kräfte im Gleichgewichte sind, so ist jede dieser Kräfte dem Sinus des Winkels proportional, welchen die Richtungen der beiden andern Kräfte mit einander bilden. Wenn man die Spannung des Seilstückes BC mit T' bezeichnet, so geben die an dem Knoten B angebrachten Kräfte:

$$M : P' : T' = sin.\ CBP' : sin.\ CBM : sin.\ MBP',$$

und wenn T'', T''' die Spannungen der Seilstücke CD, DE bezeichnen, so hat man ebenfalls für den Knoten C:

$$T' : P'' : T'' = \sin. DCP'' : \sin. BCD : \sin. BCP'',$$

für den Knoten D:

$$T'' : P''' : T''' = \sin. EDP''' : \sin. EDC : \sin. CDP''',$$

für den Knoten E:

$$T''' : P^{IV} : N = \sin. NEP^{IV} : \sin. NED : \sin. DEP^{IV};$$

woraus folgt, wenn man die Verhältnisse der Kräfte P', P'', P''', P^{IV} hinweg läßt:

$$\begin{aligned} M : T' &= \sin. CBP' : \sin. MBP', \\ T' : T'' &= \sin. BCP'' : \sin. BCP'', \\ T'' : T''' &= \sin. EDP''' : \sin. CEP''', \\ T''' : N &= \sin. NEP^{IV} : \sin. DEP^{IV}. \end{aligned}$$

Die erste Proportion gibt das Verhältniß der Spannungen der beiden aufeinander folgenden Seilstücke MB und BC; denn da die Winkel CBP', MBP' bekannt sind, so kann man ihre Sinus aus den trigonometrischen Tafeln finden.

Multiplicirt man die entsprechenden Glieder der beiden ersten Proportionen in einander und läßt den gemeinschaftlichen Factor T' hinweg, so erhält man:

$$M : T'' = \sin. CBP' \times \sin. DCP'' : \sin. MBP' \times \sin. BCP''.$$

Diese Proportion gibt das Verhältniß der Spannungen der beiden Seilstücke MB und CD, und endlich drückt das Product aus den vier obigen Proportionen das Verhältniß der Spannungen der beiden äußersten Seilstücke MB und NE aus, nämlich:

$$\begin{aligned} M : N = &\sin. CBP' \times \sin. DCP'' \times \sin. EDP''' \times \sin. NEP^{IV} \\ &: \sin. MBP' \times \sin. BCP'' \times \sin. CDP''' \times \sin. DEP^{IV}. \end{aligned}$$

Wenn die an dem Seilpolygone $MBCDEN$ (Fig. 38) wirkenden Kräfte P', P'', P''', P^{IV} Gewichte sind, so sind ihre Richtungen vertical, und wenn das System im Gleichgewichte ist, so können die äußersten Seilstücke MB, NE durch daran angebrachte Kräfte festgehalten oder an den festen Puncten M und N befestigt werden. Alsdann sind die Seile BP', CP'', DP''', EP^{IV} zu einander parallel und liegen alle in derselben Verticalebene. Denn die drei Seile oder geraden Linien BM, BC, BP' liegen in der durch BP' gehenden Verticalebene, weil der Punct B, auf welchen die nach diesen geraden Linien gerichteten Kräfte wirken, im Gleichgewichte ist. Aus demselben Grunde liegen auch die drei geraden Linien CB, CD, CP' in der durch CP'' gelegten Verticalebene, und diese beiden Verticalebenen bilden nur eine einzige, weil sie beide durch dieselbe gerade Linie BC gehen, und ebenso ergibt sich, daß alle Seilstücke, woran die Gewichtskräfte wirken, in derselben Verticalebene liegen.

Da die Seilstücke BP', CP'' zu einander parallel sind, so beträgt die Summe der Winkel CBP', BCP'' zwei rechte Winkel; der eine ist also das Supplement des andern, folglich:

$$\sin. CBP' = \sin. BCP''$$

und aus demselben Grunde:

$$\sin. DCP'' = \sin. CDP'''$$
$$\sin. EDP''' = \sin. DEP^{IV}.$$

Diesen Gleichungen zufolge enthält das zweite Verhältniß der Proportion, welche das Verhältniß der Spannungen der beiden äußersten Stücke des Seilpolygones ausdrückt, in jedem Gliede zwei gleiche Factoren, und wenn man diese gleichen Factoren hinwegläßt, die äußersten Seilstücke bis zu ihrem Durchschneiden im Puncte *F* verlängert und durch diesen Punct die Verticale *FH* zieht, so hat man:

$$M : N = \sin. NEP^{IV} : \sin. MBP' = \sin. NFH : \sin. MFH,$$

d. h. die Spannungen der äußersten Seilstücke verhalten sich umgekehrt wie die Sinus der Winkel, welche diese Stücke mit der Verticale bilden.

Die Resultante aus allen auf das Seilpolygon wirkenden Gewichtskräften geht durch die Spitze des Winkels, welcher von den Verlängerungen der beiden äußersten Seiten des Polygones gebildet wird.

Die ganze Last aller Gewichte *P'*, *P''*, *etc.* wird von den beiden äußersten Seiten *MB*, *NE* des Seilpolygones getragen, und folglich muß die Resultante aus allen diesen Gewichten der Resultante aus den Spannungen der Seilstücke *MB*, *NE* gleich und direct entgegengesetzt sein. Diese letzte Resultante geht aber durch den Punct *F*, und folglich geht die Resultante aus allen Gewichten *P'*, *P''*, *etc.* auch durch diesen Punct *F*, welcher die Spitze des von den Verlängerungen der äußersten Seiten des Seilpolygones gebildeten Winkels ist.

Der gemeinschaftliche Schwerpunct aller Gewichte, *P'*, *P''*, *etc.* liegt in der Verticale *FH*; denn die Resultante aus allen diesen Gewichten geht durch ihren gemeinschaftlichen Schwerpunct und hat eine verticale Richtung *FH*. Die Resultante aus allen Gewichten *P'*, *P''*, *etc.* ist ihrer Summe gleich; und wenn man sie folglich mit *R* bezeichnet, so hat man:

$$R = P' + P'' + etc.$$

Da diese Resultante durch den Punct *F* geht und der Resultante aus den Spannungen in *M* und in *N* gleich und direct entgegengesetzt ist, so hat man:

$$R : M : N = \sin. MFN : \sin. NFH : \sin. MFH.$$

§. 71. Wenn ein vollkommen biegsames schweres Seil mit seinen beiden Enden an zwei festen Puncten *M* und *N* (Fig. 39) befestigt ist, so bildet dasselbe eine krumme Linie *MLN*, welche man als ein Seilpolygon von unendlich vielen, unendlich kleinen Seiten betrachten kann, und woran in jeder Winkelspitze ein kleines Gewicht wirkt. Die Resultante aus allen diesen Gewichten ist dem Gewichte des Seiles gleich.

Es sei *P* das Gewicht des Seiles, welches die Curve *MLN* bildet oder die Resultante aus den unendlich vielen kleinen Gewichten, welche zusammengenommen dem Gewichte des Seiles gleich sind. Wenn man an die Puncte *M* und *N* dieser Curve die Tangenten *MF*, *NF* zieht und durch ihren Durchschnittspunct *F* die Verticale *FH*, so geht die Resultante aus den unendlich vielen kleinen Gewichten, welche zusammengenommen dem Gewichte des Seiles gleich sind, durch die Spitze *F* des von den beiden Tangenten gebildeten Winkels. Wenn man die

Spannungen der äußersten Theile des Seiles oder die auf die beiden festen Puncte von dem Gewichte des Seiles ausgeübten Zugkräfte mit *M* und *N* bezeichnet, so hat man:

$$P : M : N = \sin. MFN : \sin. NFH : \sin. MFH;$$

folglich:

$$M = \frac{N \sin. NFH}{\sin. MFH}, \quad N = \frac{M \sin. MFH}{\sin. NFH},$$

Aus diesen Verhältnissen sieht man, daß, wenn der Winkel *MFH* größer ist, als der Winkel *NFH*, auf den Punct *M* eine geringere Zugkraft ausgeübt wird, als auf den Punct *N*. Wenn also das schwere Seil *MLN* mit dem einen Ende *N* an einer Maschine befestigt wird und an dem andern Ende *M* eine Zugkraft *P* wirkt; so wird dieselbe durch die Anwendung des Seiles verstärkt.

Wenn das eine Ende eines schweren Seiles an dem festen Puncte *Q* (Fig. 40) befestigt wird und an dem andern Ende eine horizontale Zugkraft *P* wirkt; so bildet das Seil eine Curve. Zieht man die Tangenten *QF* und *PF*, welche sich im Puncte *F* durchschneiden und die Verticale *FH*; so wird die Spannung des Seiles durch die Kraft *P* ausgedrückt, und wenn man das Gewicht desselben mit *R* bezeichnet, so hat man:

$$P : R = \sin. HFQ : \sin. PFQ;$$

folglich

$$P = \frac{R \sin. HFQ}{\sin. PFQ}$$

Wenn das Seil geradlinig gespannt sein sollte, so hätte man:

$$\sin. HFQ = \sin. 90^\circ = 1, \quad \sin. PFQ = \sin. 180^\circ = 0$$

$$P : R = 1 : 0, \quad P = \frac{R}{0} = \infty,$$

d. h. die Kraft *P* müßte unendlich groß sein. Wenn also das eine Ende eines schweren Seiles an einem festen Puncte befestigt ist, so kann dasselbe durch keine an dem andern Ende angebrachte Kraft geradlinig gespannt werden, wie groß die Intensität dieser Kraft auch sein mag.

Wenn die Länge und das Gewicht eines an einem festen Puncte befestigten schweren Seiles gegeben ist und man kennt die Kraft, welche an dem andern Ende des Seiles nach horizontaler Richtung wirkt; so kann man die Länge der geraden Linie, welche den Abstand zwischen dem tiefsten Puncte der von dem Seile gebildeten Curve und der durch den festen Punct gehenden Horizontale mißt, leicht durch Rechnung finden. Denn da der Winkel *PFQ* das Doppelte von *HFQ* ist, so hat man:

$$\sin. PFQ = 2 \sin. HFQ \cos. HFQ = 2 \frac{FH}{FP} \sin. HFQ;$$

und wenn man diesen Werth von *sin. PFQ* in die vorhergehende Formel substituirt, so kommt:

$$P = \frac{R \times FP}{2 FH}.$$

Wenn die Kraft P gegen das Gewicht R des Seiles sehr groß ist und man bezeichnet die Länge des letztern mit L, so hat man näherungsweise:

$$FP = \frac{1}{2} L, \; FH = 2EH,$$

folglich:
$$P = \frac{R \times {}^1/_2 L}{4EH} = \frac{R \times L}{8EH}.$$

und:
$$EH = \frac{R \times L}{8P},$$

d. h. wenn das Gewicht des Seiles mit seiner Länge multiplicirt und das Product durch die 8fache in horizontaler Richtung wirkende Spannungskraft dividirt wird, so drückt der Quotient den Abstand des tiefsten Punctes der von dem Seile gebildeten Curve von der durch den festen Punct gehenden Horizontale aus.

Die Seile werden in der practischen Mechanik häufig angewandt, obgleich sie die bewegende Kraft nicht verstärken können, welche vielmehr immer dieselbe bleibt, als wenn sie unmittelbar an dem Körper angebracht wäre, auf welchen man sie wirken lassen will, abgesehen von den Widerständen, wovon später die Rede sein wird; allein die Seile geben die oft unerläßlichen Mittel an die Hand, um die Anzahl der Menschen oder Pferde, welche den Beweger bilden, vermehren zu können und dieser bewegenden Kraft die zur Hervorbringung des gewünschten Effectes erforderliche Richtung zu geben.

Die Ketten werden zu denselben Zwecken, wie die Seile angewandt und sie verdienen vor letztern den Vorzug; denn wenn eine Kette aus gutem Eisen mit Sorgfalt verfertigt ist und die Probe ausgehalten hat, welche zeigt, daß sie in keinem ihrer Theile mangelhaft ist; so ist ihr Volumen und Gewicht weit kleiner, als das eines Seiles von gleicher Länge und Stärke, wozu noch kommt, daß sich die Seile weit schneller abnutzen als die Ketten. Aus diesen durch die Erfahrung bestätigten Gründen hat man auf die Verfertigung der Ketten viele Mühe und Sorgfalt verwandt und seit ungefähr 20 Jahren bedient man sich derselben in vielen Fällen, wo man bloß Seile anwandte, mit großem Vortheile.

Von der Kettenlinie.

§. 72. Wir wollen diesen Abschnitt über die Seile und Ketten mit einigen elementaren Begriffen über das gegen das Ende des 17. Jahrhunderts von Jacob Bernoulli gestellte Problem der Kettenlinie schließen. Dieses merkwürdige und schwierige Problem war der Gegenstand sehr interessanter theoretischer Untersuchungen und durch Anwendung der Infinitesimalanalysis, wodurch die größten Geometer jener Zeit die Grenzen der Naturwissenschaften erweiterten, gelangten sie zur Entdeckung der Eigenschaften der Kettenlinie, worunter sich mehrere befinden, von denen man in der Folge sehr wichtige Anwendungen auf Constructionen gemacht hat, deren Theorie von der Mechanik abhängig ist.

Wenn ein vollkommen biegsames Seil von einer gleichförmigen Dicke und einer bestimmten Länge, oder eine genau construirte Kette, deren Glieder frei beweglich, sehr kurz und einander gleich sind, mit beiden Enden an zwei festen Puncten aufgehangen wird, deren gegenseitige Entfernung kleiner ist, als die Länge dieses Seiles oder dieser Kette; so bildet das Seil oder die Kette eine Curve, welche die Kettenlinie genannt wird.

Man kann eine Kettenlinie leicht beschreiben, wenn man die Form derselben vermittelst einer vollkommen biegsamen Schnur oder Kette auf die eben angegebene Weise bestimmt hat. Nachdem nämlich die beiden festen Puncte, an welchen die Enden der Kette befestigt werden sollen, auf einer eben verticalen Fläche bestimmt sind, bemerkt man auf dieser Fläche durch einander naheliegende Puncte den Umriß der von der Kette gebildeten Curve, und nachdem man diese Kette hinweggenommen hat, verbindet man diese Puncte durch eine stetige und regelmäßige Linie, welche die verlangte Curve ist.

§. 73. Das eben zur Construction der Kettenlinie angegebene Verfahren setzt voraus, daß man eine sehr biegsame Schnur habe, was nur bei sehr dünnen Schnüren der Fall ist, welche sich aber sehr leicht verrücken. Man müßte also eine genau construirte Kette haben, deren Länge wenigstens dem Umfange der zu beschreibenden Curve gleich ist; aber es würde in vielen Fällen mit Schwierigkeiten verbunden sein, sich eine solche Kette zu verschaffen. Die Theorie gibt andere Methoden an die Hand, bei welchen diese Inconvenienzen nicht stattfinden, und die Methode, welche wir zunächst mittheilen wollen, erfordert nur sehr leicht ausführbare geometrische Constructionen.

Es sei AB (Fig. 41) die Basis der zu beschreibenden Kettenlinie und das in der Mitte von AB errichtete Perpendikel HL die Höhe oder Axe derselben.

Man verlängere HL und nehme auf dieser Linie die Länge $HE = HA = {}^1/_2 AB$. Durch den Punct L ziehe man zu AB die Parallele LV. Aus dem Puncte E als Mittelpunct beschreibe man mit dem Halbmesser EH einen Kreisbogen, welcher LV in v schneidet, trage Lv auf die Verlängerung LC der Axe HL, und durch den Punct C ziehe man die gerade Linie RS parallel zu AB. Aus dem Puncte C als Mittelpunct beschreibe man mit dem Halbmesser CH einen Kreisbogen und ziehe nach dem Puncte V, wo dieser Kreisbogen die Linie LV trifft, den Halbmesser CV. Aus dem Mittelpuncte V und mit dem Halbmesser VL beschreibe man einen andern Kreisbogen, welcher VC in e trifft, nehme auf CL die Länge $Ci = Ce$ und ziehe iK parallel zu RS. Ferner nehme man jede der Längen CR und CS gleich HA und ziehe AR, BS; so sind diese beiden geraden Linien zu der Axe HL parallel.

Die Kettenlinie geht durch die drei Puncte A, L und B und besteht aus zwei symmetrischen Zweigen, welche zu beiden Seiten der Axe LH liegen. Jedem Puncte des zwischen L und B liegenden Bogens entspricht ein ähnlich liegender Punct des andern Zweiges LA, und man hat nur noch so viel Puncte zu bestimmen, als zur Zeichnung der Curve erforderlich sind.

Man theile die Hälfte CS der horizontalen Axe RS, die zwischen den Ordinaten CL und SB des Scheitels L und des Endpunctes B der Kettenlinie liegt, in zwei gleiche Theile und durch den Theilungspunct m' ziehe man $m'l'$ parallel zu den Ordinaten, suche zwischen CL und SK eine mittlere Proportionale, dann zu dieser und der Ordinate CL eine dritte Proportionale, addire beide Proportionalen zusammen, nehme die Hälfte ihrer Summe und trage diese auf $m'l'$; so ist der Endpunct n' dieser Länge ein Punct der zu zeichnenden Kettenlinie.

Ebenso findet man die Puncte n'', n und s durch Halbirung des zwischen zwei Ordinaten liegenden Theiles der horizontalen Axe. Durch den Theilungspunct ziehe man eine Parallele zu diesen Ordinaten, so ist die Hälfte der Summe aus der mittlern Proportionale zwischen den beiden bekannten Ordinaten und der dritten Proportionale zu dieser mittlern Proportionale und der Ordinate CL des Scheitels der Curve die Länge einer neuen Ordinate, deren oberer Endpunct ein Punct der Kettenlinie ist.

Jeder Ordinate des Zweiges LnB der Kettenlinie entspricht eine gleiche Ordinate des andern Curvenzweiges LNA. Wenn man also eine hinreichende Anzahl von Puncten des einen Zweiges bestimmt hat, so lassen sich die entsprechenden Puncte des andern Zweiges leicht finden.

§. 74. Die folgenden Formeln werden zur Erläuterung der eben gegebenen Constructionsregel dienen und die Anwendungsart derselben lehren.

Durch den Punct m', die Mitte von CS, ziehe man $l'm'$ parallel zu CL; so wird die mittlere Proportionale zwischen CL und SK und die dritte Proportionale zu dieser mittlern und der Ordinate CL resp. ausgedrückt durch:

$$\sqrt{CL \times SK} = m'p', \quad \frac{(CL)^2}{m'p'} = m'l';$$

und die halbe Summe $^1/_2\,(m'p' + m'l')$ der zweiten Theile dieser beiden Gleichungen ist die Länge der Ordinate $m'n'$, welche den Punct n' der Kettenlinie bestimmt.

Die Ordinate mn, welche den Theil $m'S$ der Axe in zwei gleiche Theile theilt, wird durch die Formeln:

$$\sqrt{m'p' \times SK} = mp, \quad \frac{(CL)^2}{mp} = ml,$$

$$\frac{mp + ml}{2} = mn,$$

die Ordinate, welche Cm' in zwei gleiche Theile theilt, durch:

$$\sqrt{CL \times m'p'} = m''p'', \quad \frac{(CL)^2}{m''p''} = m''l'',$$

$$\frac{m''p'' + m''l''}{2} = m''n'',$$

und die, welche mS in zwei gleiche Theile theilt, durch:

$$\sqrt{\overline{mp \times SK}} = rq, \quad \frac{(CL)^2}{rq} = rw,$$

$$\frac{rq + rw}{2} = rs.$$

Duch dasselbe Verfahren findet man successive die in der Mitte zwischen zwei beliebigen bekannten Ordinaten liegende Ordinate und durch dieses Verfahren kann man beliebig viele Puncte einer Kettenlinie finden, deren Basis und Höhe gegeben sind.

Wenn man durch die Endpuncte der mittlern Proportionalen, deren Längen durch die vorhergehenden Formeln bestimmt werden, eine stetige Linie zieht, so erhält man die Curve $Lp''p'q$, und wenn man ebenso die Endpuncte der dritten Proportionalen durch eine stetige Linie verbindet, so bekommt man die Curve $Ll''l'w$. Diese beiden Curven sind logarithmische Linien, welche die merkwürdige Eigenschaft haben, daß die zwischen ihnen liegenden Theile der Ordinaten ml, $m'l'$, $m''l''$ von der Kettenlinie in zwei gleiche Theile getheilt werden.

Die vorhergehenden Formeln können vermittelst des Lineales und des Zirkels geometrisch construirt werden. Auch kann man die nach einer bekannten Einheit in Zahlen gegebenen geraden Linien in die Formeln substituiren und die darin angezeigten Rechnungen verrichten; so erhält man durch dieses Verfahren genauere Resultate als durch geometrische Constructionen. Wenn man das Millimeter zur Einheit nimmt, so ist $CL = 52$ Millimeter, $SK = 16^{mm}, 5$, und wenn man diese Zahlen in die Formeln substituirt und die Rechnungen verrichtet, so findet man:

$$\sqrt{\overline{CL \times SK}} = \sqrt{\overline{52 \times 16,5}} = 29,29,$$

$$m'p' = 29^{mm}, 29$$

$$\frac{(CL)^2}{m'p'} = \frac{52^2}{29,29} = 92,32$$

$$m'l' = 92^{mm}, 32,$$

$$m'n' = \frac{m'p' + m'l'}{2} = 60^{mm}, 8.$$

Ebenso findet man die Zahlenwerthe der durch die übrigen Formeln ausgedrückten Resultate.

Aufg. Eine Tangente an einen gegebenen Punct M der Kettenlinie ALB zu ziehen. — Aufl. Auf der auf der Axe LH senkrechten geraden Linie LV nehme man eine Länge Lu, welche der Länge des zwischen dem Berührungspuncte M und dem Scheitel L der Kettenlinie liegenden Bogens ML derselben gleich ist. Die Länge dieses Bogens kann näherungsweise bestimmt werden, wenn man zur Einheit eine so kleine gerade Linie nimmt, daß sie mit dem Curvenbogen, auf welchen sie getragen wird, nahezu zusammenfällt; worauf man diese Längeneinheit mit dem Zirkel auf die gerade Linie LV von L nach u so oft trägt, als sie in dem Bogen LM enthalten ist. Durch den Punct M ziehe man zu LV eine Parallele, so trifft dieselbe die Axe LH in einem Puncte g. Hierauf ziehe man ug, und errichte in der Mitte dieser geraden Linie ein Perpendikel, so durchschneidet

daſſelbe die Verlängerung der Axe in e'. Ferner ziehe man die gerade Linie $e'u$, dann MP parallel zu der Axe LH und mache den Winkel $PMT = Lue'$, ſo iſt die gerade Linie TM die verlangte Tangente.

Bei den bisher über die Kettenlinie aufgelöſten Aufgaben haben wir uns nur auf eine bloße Angabe der practiſchen Methoden beſchränkt, welche die Geometrie an die Hand gibt, und dieſe Methoden ſind für die Practiker auch hinreichend, welche bloß die Regeln wiſſen wollen, welche ſie anzuwenden haben. Wenn man tiefer in den uns beſchäftigenden Gegenſtand eingehen will, ſo muß man ſich der Differentialrechnung bedienen. Die Anwendungen, welche wir von dieſer Rechnung bei der Ableitung der Gleichung der Kettenlinie und bei mehrern andern Unterſuchungen, wo die Elementaralgebra unzureichend iſt, machen werden, geben einen Begriff von den Hilfsmitteln, welche die Infiniteſimalrechnung zur Entdeckung neuer Wahrheiten und Reſultate an die Hand gibt, und welche man vermittelſt der geometriſchen Analyſis nur durch ſehr weitläufige und complicirte Methoden mit Schwierigkeit würde erhalten können.

§. 75. Es ſei $AMLB$ (Fig. 42) die von einer vollkommen biegſamen Kette oder Schnur, deren Enden in den feſten Puncten A und B befeſtigt ſind, gebildete Kettenlinie, und wir wollen annehmen, daß die durch dieſe beiden Puncte gehende gerade Linie horizontal iſt. Der Punct A ſei der Anfangspunct und AX, AY ſeien die aufeinander ſenkrechten Axen der Coordinaten x, y. Auf der Kettenlinie wollen wir einen beliebigen Bogen $AM = s$ nehmen und an dem Endpuncte dieſes Bogens die Tangenten AE, MF ziehen, welche ſich im Puncte D durchſchneiden, dann die Verticalen MP und DI ziehen. Die Coordinaten des Punctes M ſind $AP = x$ und $MP = y$.

Man kann ſich vorſtellen, daß das Gleichgewicht des Theiles der Kettenlinie, welcher den Bogen s bildet, durch die beiden Kräfte bewirkt wird, welche nach den an die Endpuncte A und M dieſes Bogens gezogenen Tangenten wirken, während das Gewicht des Bogens s der Kettenlinie eine Kraft iſt, welche nach der durch den Durchſchnittspunct der beiden Tangenten gehenden Verticale ID wirkt. Bezeichnet man alſo die Spannung der Kettenlinie im Anfangspuncte A mit a und bemerkt, daß das Gewicht des Bogens s ſeiner Länge proportional iſt, ſo hat man:

$$a : s = sin.\ IDM \text{ oder } sin.\ IDF : sin.\ ADM.$$

Wir wollen die gerade Linie mn parallel zu der Axe der x ziehen, ſo kann der kleine Bogen mM als eine gerade Linie betrachtet werden, und das Elementardreieck Mnm gibt:

$$sin.\ mMn = \frac{dx}{ds},\quad cos.\ mMn = \frac{dy}{ds}.$$

Der unendlich kleine Bogen Mm fällt mit der Tangente MF zuſammen, woraus folgt, daß die Winkel mMn und IDF einander gleich ſind; man hat alſo:

$$sin.\ IDF = \frac{dx}{ds},\quad cos.\ IDF = \frac{dy}{ds},$$

und wenn man diese Werthe in die obige Proportion substituirt, so erhält man:

$$a : s = \frac{dx}{ds} : \sin. ADM = \frac{s}{a} \times \frac{dx}{ds}.$$

Ferner ist:

$$\sin. ADM = \sin. ADF = \sin. (IDF - IDA)$$
$$= \sin. IDF \cos. IDA - \sin. IDA \cos. IDF,$$

und wenn man die analytischen Werthe in diese letzte Formel substituirt, erwägend, daß $\cos. IDA = \sin. IDA = \sin. c$ ist; so hat man:

$$\sin. ADM = \sin. c. \frac{dx}{ds} - \cos. c. \frac{dy}{ds}.$$

Diese beiden Werthe von $\sin. ADM$ geben die folgende Differentialgleichung der Kettenlinie:

$$s dx = a \sin. c. dx - a \cos. c. dy,$$

oder:

$$s = a \sin. c - a \cos. c. \frac{dy}{dx}.$$

Um aus dieser Gleichung die Veränderliche s zu eliminiren, wollen wir, indem wir dx als constant betrachteten, das Differential derselben nehmen, so kommt:

$$ds = - a \cos. c. \frac{d^2y^2}{dx}.$$

Das rechtwinklige Dreieck Mnm gibt:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

und aus diesen beiden Werthen von ds ergibt sich die Gleichung:

$$dx = - a \cos. c. \frac{d^2y}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}.$$

Multiplicirt man beide Theile dieser Gleichung mit dy, so erhält man:

$$dxdy = - a \cos. c \frac{dyd^2y}{\sqrt{dx^2 + dy^2}},$$

und wenn man integrirt und die Constante Cdx hinzufügt, so kommt:

$$ydx = - a \cos. c. \sqrt{dx^2 + dy^2} + Cdx.$$

Dividirt man durch dx, setzt die Constante in den ersten Theil dieser Gleichung und erhebt beide Theile zum Quadrate, um die Wurzelgröße fortzuschaffen; so erhält man:

$$\frac{(y - C)^2}{a^2 \cos.^2 c} = 1 + \frac{dy^2}{dx^2},$$

woraus folgt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{(y - C)^2 - a^2 \cos.^2 c}}{a \cos. c}.$$

Zur Bestimmung der Constante C wollen wir bemerken, daß für den Punct A

$$y = 0 \text{ und } \frac{dy}{dx} = tang.\, c,$$

welches gibt: $tang.\, c \times a\, cos.\, c = \sqrt{C^2 - a^2\, cos.^2\, c},$

und wenn man beide Theile dieser Gleichung zum Quadrate erhebt, so erhält man, wenn man bemerkt, daß $tang.\, c\, cos.\, c = sin.\, c$ ist:

$$a^2\, sin.^2\, c = C^2 - a^2\, cos.^2\, c,$$

woraus wegen $sin.^2\, c + cos.^2\, c = 1$ folgt:

$$C = a.$$

Substituirt man für die Constante C die Größe a, so verwandelt sich die Gleichung der Kettenlinie in:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{(y-a)^2 - a^2\, cos.^2\, a}}{a\, cos.\, c}, \quad dx = \frac{a\, cos.\, c\, dy}{\sqrt{(y-a)^2 - a^2\, cos.^2\, c}}.$$

Es kommt nun darauf an, diese Gleichung so umzuformen, daß sie sich integriren läßt. Wir wollen daher zunächst:

$$a - y = z, \quad -dy = dz$$

setzen, so erhalten wir;

$$dx = \frac{-a\, cos.\, c\, dz}{\sqrt{z^2 - a^2\, cos.\, c}}.$$

Setzt man alsdann:

$$\sqrt{z^2 - a^2\, cos.^2\, c} = z - t,$$

und erhebt die beiden Theile dieser Gleichung zum Quadrate, so reducirt sie sich auf:

$$2tz = a^2\, cos.^2\, c + t^2,$$

und wenn man von jedem Theile dieser Gleichung das Differential nimmt, so kommt:

$$tdz + zdt = tdt,$$

$$dz = -\frac{(z-t)\, dt}{t} = -\frac{\sqrt{(z^2 - a^2\, cos.^2\, c)\, dt}}{t}.$$

Setzt man diese letzte Größe für dz in die Gleichung der Kettenlinie und läßt den gemeinschaftlichen Factor des Zählers und Nenners hinweg, so erhält man:

$$dx = \frac{a\, cos.\, c\, dt}{t},$$

und wenn man integrirt:

$$x = a\, cos.\, c\, log.\, t + D =$$

$$a\, cos.\, c\, log.\, (z - \sqrt{z^2 - a^2\, cos.^2\, c}) + D.$$

Wird für die Größe z ihr Werth $a - y$ gesetzt, so verwandelt sich diese Gleichung in:

$$x = a\, cos.\, c\, log.\, [a - y - \sqrt{(a-y)^2 - a^2\, cos.^2\, c}] + D.$$

Der Werth der Constante D wird bestimmt, wenn man bemerkt, daß im Anfangspuncte A der Coordinaten $x = 0$ und $y = 0$ ist, welches gibt:

$$D = -a \cos. c \log. (a - \sqrt{a^2 - a^2 \cos.^2 c}),$$

$$x = a \cos. c \{\log. [a - y - \sqrt{(a-y)^2 - a^2 \cos.^2 c}] - \log. (a - \sqrt{a^2 - a^2 \cos.^2 c})\}.$$

Da der zweite Theil dieser Gleichung die Differenz der Logarithmen zweier Größen ist, so kann man dafür den Logarithmus des Quotienten dieser Größen setzen, wodurch man erhält:

$$x = a \cos. c \log. \left[\frac{a - y - \sqrt{(a-y)^2 - a^2 \cos.^2 c}}{a - \sqrt{a^2 - a^2 \cos.^2 c}}\right].$$

§. 76. Wir wollen nun sehen, welche Form die Gleichung der Kettenlinie annimmt, wenn der Anfangspunct der Coordinaten in den tiefsten Punct oder Scheitel L dieser Curve verlegt wird.

In der Gleichung:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{(y-a)^2 - a^2 \cos. c}}{a \cos. c}$$

drückt der erste Theil die trigonometrische Tangente des Winkels aus, welchen das Curvenelement oder die geometrische Tangente der Curve mit der Axe der x bildet; aber diese letzte Tangente wird im Scheitel L zu der Axe der x parallel und man hat:

$$0 = (a - y)^2 - a^2 \cos.^2 c,$$
$$y = a - a \cos. c = HL.$$

Mit x' wollen wir die auf der Axe LH vom Scheitel L aus gezählten Abscissen und mit y' die auf dieser Axe senkrechten Ordinaten bezeichnen; so haben wir:

$$x = AH - y',$$
$$y = HL - x' = a - a \cos. c - x',$$

und die Differentiale dieser Coordinaten geben:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dx'}{dy'}.$$

Substituirt man in die vorhergehende Gleichung die Ausdrücke der neuen Coordinaten, so kommt:

$$\frac{dx'}{dy'} = \frac{\sqrt{x'^2 + 2a \cos. c\, x'}}{a \cos. c}, \quad dy' = \frac{a \cos. c\, dx'}{\sqrt{x'^2 + 2a \cos. c\, x'}}.$$

Um diese Gleichung zu integriren, wollen wir zunächst

$$x' + a \cos. c = t, \quad x'^2 + 2a \cos. c\, x' = t^2 - a^2 \cos.^2 c, \quad dx = dt$$

setzen, so ergibt sich:

$$dy' = \frac{a \cos. c\, dt}{\sqrt{t^2 - a^2 \cos.^2 c}}.$$

Setzen wir ferner:

$$\sqrt{t^2 - a^2 \cos.^2 c} = u - t,$$

erheben beide Theile dieser Gleichung zum Quadrat, lassen das gemeinschaftliche Glied t^2 hinweg, leiten aus der Gleichung den Werth von t ab und differentiiren; so finden wir:

$$t = \frac{u^2 + a^2 \cos.^2 c}{2u} = \frac{1}{2} u + \frac{1}{2} a^2 \cos.^2 c u^{-1},$$

$$dt = \frac{1}{2} du - \frac{1}{2} a^2 \cos.^2 c u^{-2} du = \frac{u^2 - a^2 \cos.^2 c}{2u^2} du.$$

Subſtituirt man dieſe letzten Größen in den vorhergehenden Werth von dy', ſo erhält man:

$$dy' = -\frac{a \cos. c \times \frac{u^2 - a^2 \cos. c}{2u^2} du}{u - t};$$

und wenn man in dieſe Gleichung für t ſeinen Werth ſetzt, ſo reducirt ſie ſich auf folgende:

$$dy' = a \cos. c \frac{du}{u},$$

deren Integral iſt:

$$y' = C + a \cos. c \log. u = C + a \cos. c \log. (t + \sqrt{t^2 a^2 - \cos.^2 c})$$

$$= C + a \cos. c \log. (x' + a \cos. c + \sqrt{x'^2 + 2 a \cos. c x'}).$$

Der Werth der Conſtante C wird beſtimmt, wenn man bemerkt, daß der Anfangspunct im Scheitel L der Curve liegt, und daß in dieſem Puncte die Coordinaten Null ſind, d. h. $x' = 0$ und $y' = 0$, welches gibt:

$$0 = C + a \cos. c \log. a \cos. c,$$

$$C = - a \cos. c \log. a \cos. c,$$

und wenn dieſer Werth für die Conſtante C ſubſtituirt wird, ſo erhält man als die endliche Gleichung der auf ihren Scheitel bezogenen Kettenlinie:

$$y' = a \cos. c \log. \frac{x' + a \cos. c + \sqrt{x'^2 + 2 a \cos. c x'}}{a \cos. c},$$

Der in dieſer und in den frühern Gleichungen vorkommende Logarithmus iſt ein hyperboliſcher, welcher Logarithmen man ſich ausſchließlich in der Integralrechnung bedient. Man kann ſie unmittelbar aus den Tafeln der hyperboliſchen Logarithmen nehmen, oder ſich auch der gewöhnlichen Logarithmentafeln bedienen, wenn man die darin vorkommenden Logarithmen durch die Zahl 2,302585 multiplicirt, welche den Quotienten aus dem hyperboliſchen und gewöhnlichen Logarithmus derſelben beliebigen Zahl ausdrückt.

§. 77. Um die Gleichung der Kettenlinie auf ein Beiſpiel anzuwenden, wollen wir ſie in Zahlen ausdrücken, indem wir für x' beſtimmte auf der Axe LH der Curve genommene Werthe ſetzen und die zugehörigen Werthe der Ordinaten y' berechnen.

Es ſei $a = 10$ der Druck, welcher von der Kette oder dem Seile auf den Punct A (Fig. 41) nach der Richtung der durch dieſen Punct an die Curve gezogenen Tangente ausgeübt wird und $c = 60°$ ſei der

Winkel, welchen diese Tangente mit der horizontalen Basis AB der Kettenlinie bildet; so hat man:

$$a\ cos.\ c = 10 \times cos.\ 60^\circ = 10 \times 0,5 = 5,$$

$$y' = 5\ log.\ \frac{x' + 5 + \sqrt{x'^2 + 10x'}}{5}.$$

Setzt man zunächst $x' = 1$ und verrichtet die angedeuteten Rechnungen, indem man den Logarithmus aus den gewöhnlichen Tafeln nimmt und denselben mit 2,302585 multiplicirt; so bekommt man:

$$y' = 5 \times 2,302585\ log.\ 1,8633 = 3,102.$$

Wenn man durch den Theilungspunct 1 ein Perpendikel auf die Axe LH zieht und auf beiden Seiten dieser Axe auf diesen Perpendikel die Länge $y' = 3,102$ nimmt; so sind die Endpuncte dieser doppelten Ordinate zwei Puncte der Kettenlinie.

Ebenso findet man, daß die den Abscissen $x' = 2$, $= 3$, $= 4$ und $= 5$ entsprechenden Ordinaten resp. durch 4,335, 5,235, 5,964 und 6,585 ausgedrückt werden.

Der Schwerpunct der Kettenlinie liegt auf der Axe LH, und zwar tiefer, als der jeder andern Curve von derselben Länge, welche von denselben Puncten A und B begrenzt wird. Zum Beweise dieses Satzes werden Rechnungen erfordert, welche die Grenzen dieses Werkes überschreiten, und wir wollen bloß bemerken, daß aus der Guldinischen Regel folgt, daß die Kettenlinie, wenn sie sich um ihre Basis AD dreht, eine kleinere Oberfläche erzeugt, als durch die Umdrehung jeder andern Curve von derselben Länge und zwischen denselben festen Puncten A und B erzeugt wird.

§. 78. Ein Gewölbe, welches die Krümmung einer Kettenlinie hat und aus gleichen Gewölbsteinen besteht, bleibt von selbst und vermöge der bloßen gegenseitigen Berührung dieser Steine im Gleichgewichte.

Wir wollen annehmen, daß dieses Gewölbe aus kleinen, gleichen und sich gegenseitig berührenden Kugeln gebildet sei und ihre Mittelpuncte durch gerade Linien verbinden. Ferner wollen wir uns vorstellen, daß die auf diese Kugeln wirkende Schwerkraft nach entgegengesetztem Sinne gerichtet sei, und daß die Verbindungslinien ihrer Mittelpuncte unausdehnbare Fäden seien, welche die Trennung der Kugeln verhindern; so wird das Gleichgewicht nicht gestört und das Gewölbe wird eine umgekehrte Kettenlinie. Die Krümmung des Gewölbes und der Kettenlinie fallen also zusammen.

Dieser Beweis könnte vielleicht noch etwas zu wünschen übrig lassen, aber Rondelet hat die Richtigkeit des in Rede stehenden Satzes durch folgendes Experiment dargethan. Er nahm nämlich 15 steinerne Kugeln von 1 Zoll im Durchmesser und legte sie auf eine Platte, welche unterhalb mit einem vorspringenden Rande versehn war, so daß die Berührungspuncte der Kugeln in einer auf dieser Platte gezeichneten Kettenlinie lagen. Nach vielen Versuchen und indem er sich eines aus drei Theilen bestehenden Lehrbogens bediente, welche hinweggenommen werden konnten, ohne die Kugeln zu erschüttern, gelang

es ihm, einen Gewölbbogen zu bilden, welcher von selbst im Gleichgewichte blieb.

Eine andere sehr wichtige Anwendung von der Kettenlinie hat man bei den Hängebrücken gemacht, deren Ketten oder Eisendrahtseile diese Curve bilden. Diese Brücken, welche vor ungefähr 20 Jahren in England eingeführt sind, haben ein lebhaftes Interesse erregt und Versuche nothwendig gemacht, deren Hauptresultate wir angeben werden, wenn wir uns mit dem Widerstande oder mit der Festigkeit des Eisens und der übrigen Materialien beschäftigen.

§. 79. Die Kettenlinie scheint viel Aehnlichkeit mit der Parabel zu haben; aber die Gleichungen dieser beiden Curven zeigen, daß sie nicht durch dieselben Puncte gehen, und wir wollen untersuchen, bis zu welchem Grade sie sich einander nähern können.

Bekanntlich ist die Gleichung der Parabel:

$$y^2 = px,$$

und wenn man $p = 2a \cos. c = 10$ setzt, so hat man:

$$y^2 = 10x, \quad y = \pm\sqrt{10x}.$$

Setzt man für die Abscissen x successive die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 (Fig. 41) und zieht die Quadratwurzeln aus, so findet man, daß die zugehörigen Werthe von y durch die Zahlen 3,162, 4,472, 5,477, 6,324, 7,071 ausgedrückt werden. Wenn man durch die Endpuncte dieser Ordinaten eine stetige Curve gehen läßt, so erhält man die Parabel aLb, welche die Kettenlinie umschließt, gegen den Scheitel L zu mit ihr zusammenfällt und sich von diesem Puncte an immer weiter von ihr entfernt.

Vom Hebel.

§. 80. Unter einem Hebel versteht man eine unbiegsame Stange BC (Fig. 43), welche auf einer Axe oder auf einem festen Puncte A ruhet, ohne davon herabgleiten zu können, und woran Kräfte P, Q wirken, welche sie um diese Axe oder festen Punct zu drehen streben.

Der feste Punct, worauf der Hebel ruhet, wird der Unterstützungspunct genannt und dieser Punct theilt den Hebel in zwei Theile, welche Hebelarme genannt werden

Wir wollen zuvörderst den Hebel als gewichtslos betrachten und außerdem annehmen, daß an dem Unterstützungspuncte keine Reibung stattfindet, welche der Drehung des Hebels hinderlich ist. Hierauf werden wir zeigen, wie man das Gewicht des Hebels in die Bedingungen des Gleichgewichtes einführen kann und von der Reibung wird in den folgenden Theilen dieses Werkes die Rede sein.

Es können auf den Hebel eine beliebige Anzahl von Kräften wirken; allein um die Theorie dieser Maschine klar und leicht auffassen zu können, wollen wir zunächst den einfachsten Fall betrachten, wo auf den Hebel nur zwei Kräfte wirken, wovon die eine ein Widerstand ist, welcher überwunden werden soll, oder ein Gewicht, welches man heben will, und die andere eine wirkliche Kraft, welche diesen Widerstand vermittelst des Hebels zu überwinden oder dieses Gewicht zu heben strebt.

Wenn es darauf ankommt, vermittelst eines Hebels einen Widerstand zu überwinden oder ein Gewicht zu heben, so kann dieses mit einer größern oder kleinern Kraft geschehen, je nach der Lage des Angriffspunctes derselben gegen den Unterstützungspunct. Nun können aber die Kraft, der Widerstand und der Unterstützungspunct auf drei verschiedene Arten mit einander verbunden sein, weshalb man auch drei verschiedene Arten von Hebeln unterscheidet, welche man zwar kennen muß, aber in den Bedingungen des Gleichgewichtes keine Veränderungen bewirken.

Ein Hebel heißt von der ersten Art, wenn der Unterstützungspunct zwischen dem Angriffspuncte der Kraft und dem des Widerstandes liegt (Fig. 43).

Ein Hebel der zweiten Art ist der, bei welchem der Angriffspunct des Widerstandes oder des Gewichtes zwischen dem Angriffspuncte der Kraft und dem Unterstützungspuncte liegt (Fig. 44).

Ein Hebel der dritten Art ist der, bei welchem der Angriffspunct der Kraft oder des Widerstandes zwischen dem Angriffspuncte des Widerstandes oder der Kraft und dem Unterstützungspuncte liegt (Fig. 45).

§. 81. Aufg. Die Bedingungen des Gleichgewichtes des Hebels zu finden. — Aufl. Es seien P, Q die an dem Hebel BAC wirkenden Kräfte und A (Fig. 43) der Unterstützungspunct des Hebels. Wenn sich der Hebel im Gleichgewichte befindet, so wird die Resultante aus den Kräften P, Q durch den Unterstützungspunct A aufgehoben, welcher folglich in der Richtung dieser Resultante liegen muß.

Man verlängere die Richtungen PB, QC der Kräfte P und Q bis zu ihrem Durchschneiden im Puncte D und ziehe die Linie DA, so können die Kräfte P und Q im Puncte D angebracht werden und ihre Resultante ist nach DA gerichtet, weil sie durch den Widerstand des Unterstützungspunctes A aufgehoben werden muß. Es sei DG die gerade Linie, welche den Widerstand oder das Gewicht Q ausdrückt, d. h. das Verhältniß dieser geraden Linie DG zur Längeneinheit muß dem Verhältnisse des Gewichtes Q zur Gewichtseinheit gleich sein. Durch den Punct G ziehe man GF parallel zu DB und durch den Punct F, wo diese Parallele die Linie DA schneidet, ziehe man FE parallel zu DG; so wird die Resultante der Kräfte P und Q durch die Diagonale DF des Parallelogrammes $DEFG$ ausgedrückt und folglich drückt die Diagonale DF die Wirkung der beiden Kräfte P und Q auf den Hebel oder vielmehr den von diesen Kräften auf den Unterstützungspunct A ausgeübten Druck aus. Wenn also zwei an einem Hebel angebrachten Kräfte im Gleichgewichte sind, so liegen die Richtungen dieser Kräfte und der Unterstützungspunct des Hebels in derselben Ebene und die Resultante aus beiden Kräften wird durch den Widerstand des Unterstützungspunctes aufgehoben.

Die beiden Kräfte P, Q und ihre Resultante R werden durch die drei Seiten DE, EF, FD des Dreieckes DEF ausgedrückt und diese Seiten verhalten sich wie die Sinus der gegenüberliegenden Winkel, so daß man hat:

$$P : Q : R = DE : EF \text{ oder } DG : DF$$
$$= \sin. FDG : \sin. FDE : \sin. EDG;$$

d. h. jede der drei Kräfte kann durch den Sinus des Winkels ausgedrückt werden, welchen die Richtungen der beiden andern Kräfte mit einander bilden, wie wir auch bereits im ersten Kapitel bewiesen haben, und es läßt sich leicht zeigen, daß derselbe Beweis auf alle drei Arten des Hebels anwendbar ist.

Bei der Untersuchung der zum Gleichgewichte des Hebels erforderlichen Bedingungen kommen sechs verschiedene Bestimmungselemente in Betracht, nämlich die beiden auf den Hebel wirkenden Kräfte P, Q, ihre Richtungen, ihre Resultante und deren Richtung, welche durch den Unterstützungspunct gehen muß; denn wenn sie durch einen andern Punct ginge, so würde sie den Hebel um den Unterstützungspunct drehen und das Gleichgewicht würde nicht stattfinden. Wenn drei dieser Elemente bekannt sind, so kann man die drei übrigen trigonometrisch berechnen, aber es muß sich unter den bekannten Elementen wenigstens eine Kraft befinden; denn wenn man bloß die drei Richtungen der Kräfte kännte, so könnte man nicht die Werthe dieser Kräfte, sondern bloß ihre Verhältnisse finden.

Wenn man den Druck auf den Unterstützungspunct wissen will, so berechnet man den Werth der Resultante R und man hat alsdann:

$$R = \frac{P \sin. EDG}{\sin. FDG} = \frac{Q \sin. EDG}{\sin. FDE}.$$

Hieraus sieht man, daß, wenn die Kräfte P, Q einander gleich sind, der Winkel $FDG = FDE$ ist, d h. die Richtung der Resultante theilt den von den Richtungen der beiden Kräfte gebildeten Winkel in zwei gleiche Theile. Wenn $P > Q$ ist, so ist der Winkel $FDG > FDE$, und im Allgemeinen theilt die Richtung der Resultante zweier Kräfte den von ihren Richtungen gebildeten Winkel in zwei ungleiche Theile, und zwar liegt der kleinste an der größten Kraft.

§. 82. Die Bedingungen des Gleichgewichtes zwischen zwei auf einen Hebel wirkenden Kräften lassen sich auch sehr leicht aus der Theorie der Momente ableiten. Denn nehmen wir wieder wie im vorhergehenden §. an, daß die Richtungen der Kräfte und der Unterstützungspunct des Hebels in derselben Ebene liegen, so kann das Gleichgewicht nur dann stattfinden, wenn die Richtung der Resultante durch den Unterstützungspunct A geht.

Da der Unterstützungspunct A also in der Richtung der Resultante der Kräfte P und Q liegt, so hat man, wenn man auf ihre nöthigenfalls verlängerten resp. Richtungen BP, CQ die Perpendikel AL, AM fällt, die Proportion:

$$P : Q = AM : AL \text{ (§. 21)},$$

woraus folgt: $$P \times AL = Q \times AM;$$

d. h. wenn die beiden auf den Hebel wirkenden Kräfte im Gleichgewichte sind, so sind die Momente derselben in Beziehung auf den Unterstützungspunct einander gleich.

§. 83. Eine Kraft bringt immer dieselbe Wirkung hervor, an welchem Puncte ihrer Richtung sie auch angebracht sein mag. Wenn also die auf den Richtungen der Kräfte P und Q senkrechten geraden Linien LA, AM ein unbiegsames System LAM bilden und die Kräfte

P, *Q* in den Puncten *L*, *M* angebracht werden; so kann man für den gekrümmten Hebel *BAC* den Winkelhebel *LAM* subſtituiren. Für einen beliebigen gekrümmten Hebel kann man alſo immer einen Winkelhebel ſubſtituiren, deſſen geradlinige Arme auf den Richtungen der Kräfte ſenkrecht ſind.

Wenn der Hebel bloß auf der Oberfläche der Unterlage ruhet und auf dieſer Oberfläche fortgleiten kann, ſo iſt die Bedingung, daß die Reſultante der an dem Hebel angebrachten Kräfte *P* und *Q* durch den Berührungspunct des Hebels mit der Unterlage geht, nicht zur Herſtellung des Gleichgewichtes hinreichend, ſondern es iſt noch erforderlich, daß die Richtung der Reſultante auf der Oberfläche der Unterlage ſenkrecht iſt; denn wenn dieſes nicht der Fall wäre, ſo würde der Hebel fortgleiten, wie wir weiter unten bei der Theorie der ſchiefen Ebene ſehen werden.

Wenn durch den Hebel eine feſte Axe geht, um welche er ſich frei drehen kann, ſo iſt es zur Herſtellung des Gleichgewichtes hinreichend, daß die Reſultante der an dem Hebel angebrachten Kräfte durch dieſe Axe geht und darauf ſenkrecht iſt.

Wenn auf den Hebel mehr als zwei Kräfte wirken, ſo iſt zum Gleichgewichte deſſelben erforderlich, daß ſie ſich auf eine einzige Reſultante zurückführen laſſen, deren Richtung durch den Unterſtützungspunct des Hebels gehen muß, und in allen Fällen iſt zum Gleichgewichte der auf einen Hebel wirkenden Kräfte erforderlich, daß der Unterſtützungspunct einen Widerſtand leiſtet, welcher dem von der Wirkung der Reſultante herrührenden Drucke wenigſtens gleich oder größer als derſelbe iſt.

§. 84. Bisher haben wir den Hebel als eine unbiegſame Stange von einer beliebigen Form betrachtet; aber wenn dieſe Stange gerade iſt (Fig. 46) und die Richtungen der Kraft *P* und des Widerſtandes *Q* zu einander parallel ſind, ſo liegen die von dem Unterſtützungspuncte *A* auf die nöthigenfalls verlängerten Richtungen *BP*, *CQ* der Kraft und des Widerſtandes gefällten Perpendikel *AL*, *AM* in derſelben geraden Linie und die rechtwinkligen Dreiecke *ALB*, *AMC* ſind einander ähnlich, ſo daß man folglich hat:

$$P : Q = AM : AL = AC : AB.$$

Dieſelben Schlüſſe ſind auf die Figuren 47 und 48 anwendbar, woraus erhellet, daß der in der vorhergehenden Proportion liegende Satz für alle drei Arten des Hebels ſtattfindet, d. h. die Kräfte *P*, *Q* verhalten ſich umgekehrt wie ihre Hebelarme oder die Kraft *P* verhält ſich zur Laſt oder dem Widerſtande *Q* wie der Hebelarm der Laſt zu dem der Kraft.

Bei dem Hebel der erſten Art ſind die Kraft und der Widerſtand zwei parallele Kräfte, welche nach demſelben Sinne wirken und auf den Unterſtützungspunct einen Druck ausüben, welcher ihrer Reſultante oder ihrer Summe gleich iſt.

Die Größe der Kraft *P*, welche ein gegebenes Gewicht *Q* vermittelſt eines Hebels der erſten Art zu heben vermag, iſt von der Lage des Unterſtützungspunctes oder von der Größe des Hebelarmes dieſer Kraft gegen den des Gewichtes abhängig. Wenn der Unterſtützungspunct in der Mitte des Hebels liegt, oder wenn die beiden

Hebelarme einander gleich sind, so findet das Gleichgewicht statt, wenn die Kraft und das Gewicht einander gleich sind; aber wenn die Hebelarme ungleich sind, so ist zum Gleichgewichte erforderlich, daß die Kraft größer oder kleiner sein muß, als das Gewicht, je nachdem ihr Hebelarm kleiner oder größer ist, als der des Gewichtes.

Bei dem Hebel der zweiten Art (Fig. 47) sind die Kraft und der Widerstand nach entgegengesetztem Sinne gerichtet, und da diese beiden Kräfte zu einander parallel sind, so ist ihre Resultante oder der Druck auf den Unterstützungspunct ihrem Unterschiede gleich. Der Hebelarm *AB* der Kraft ist größer als der Hebelarm *AC* des Widerstandes, und folglich ist die Kraft *P*, welche einem Gewichte *Q* vermittelst eines Hebels der zweiten Art das Gleichgewicht zu halten vermag, immer kleiner als dieses Gewicht.

Bei dem Hebel der dritten Art (Fig. 48) ist die Resultante aus beiden Kräften oder der Druck auf den Unterstützungspunct ihrem Unterschiede gleich; aber da der Hebelarm *AB* der Kraft kleiner ist, als der Hebelarm *AC* des Widerstandes, so ist zum Gleichgewichte erforderlich, daß dir Kraft *P* größer ist, als der Widerstand oder die Last *Q*.

Endlich suchen die Kraft und der Widerstand in allen drei Arten des Hebels diesen nach entgegengesetztem Sinne um den Unterstützungspunct zu drehen, und wenn bei einem geradlinigen Hebel die Unterlage nur seine Oberfläche berührt, so findet das Gleichgewicht nur in dem Falle statt, wenn die Richtung der Resultante der an dem Hebel wirkenden Kräfte auf seiner Oberfläche senkrecht ist. Wenn die Unterstützung in einer durch den Hebel gehenden festen Axe besteht, so findet das Gleichgewicht statt, wenn die Resultante diese Axe unter einem rechten Winkel trifft und ihr Widerstand der Resultante gleich oder größer als dieselbe ist.

§. 85. Wenn man das Gewicht des Hebels mit in Betracht ziehen will, so kann man sich dasselbe als eine in seinem Schwerpuncte angebrachte Kraft vorstellen. Auch kann man sich vorstellen, daß das Gewicht jedes Hebelarmes in seinem eigenen Schwerpuncte angebracht sei. In diesem Falle wirken vier Kräfte auf den Hebel, und wenn das Gleichgewicht stattfindet, so ist die Summe der Momente der Kräfte, welche den Hebel nach einem Sinne um den Unterstützungspunct zu drehen suchen, gleich der Summe der Momente der Kräfte, welche denselben nach entgegengesetztem Sinne zu drehen streben.

Wenn der Hebel aus einer homogenen, cylindrischen oder prismatischen Stange besteht, so liegt sein Schwerpunct in der Mitte seiner Axe und dasselbe gilt von dem Schwerpuncte jedes einzelnen Hebelarmes.

Wenn man das Gewicht des Hebels in die Bedingungen des Gleichgewichtes der drei Arten des Hebels einführt, so hat man für den Hebel der ersten Art:

$$P \times AB + \text{Gewicht von } AB \times \tfrac{1}{2} AB$$
$$= Q \times AC + \text{Gewicht von } AC \times \tfrac{1}{2} AC,$$

für den Hebel der zweiten Art:

$$P \times AB = Q \times AC + \text{Gewicht von } AB \times \tfrac{1}{2} AB,$$

und für den Hebel der dritten Art:

$$P \times AB = Q \times AC + \text{Gewicht von } AC \times \tfrac{1}{2} AC.$$

Um diese Formeln algebraisch auszudrücken, wollen wir den Hebelarm der Kraft P, nämlich AB gleich p, den des Widerstandes oder des Gewichtes Q nämlich $AC = q$ und das Gewicht der Längeneinheit des Hebels $= m$ setzen. Substituirt man diese Werthe in die vorhergehenden Formeln, so erhält man:

$$Pp + \tfrac{1}{2} mp^2 = Qq + \tfrac{1}{2} mq^2,$$

$$Pp = Qq + \tfrac{1}{2} mp^2$$

$$Pp = Qq + \tfrac{1}{2} mq^2.$$

§. 86. Vermittelst dieser drei Gleichungen kann man die verschiedenen Aufgaben über den geradlinigen Hebel, wenn zwei parallele Kräfte oder eine Kraft und ein Widerstand von parallelen Richtungen daran wirken, lösen, und wir wollen nun diese Formeln auf einige Beispiele anwenden.

Beispiel 1. — Wenn die Länge l eines Hebels der ersten Art, die daran wirkenden parallelen Kräfte P, Q und das Gewicht m der Längeneinheit des Hebels gegeben sind, die Lage des Unterstützungspunctes A so zu bestimmen, daß das Gleichgewicht stattfindet.

Man hat hier die Gleichung:

$$Pp + \tfrac{1}{2} mp^2 = Qq + \tfrac{1}{2} mq^2,$$

oder

$$Pp = Qq - \tfrac{1}{2} m (p^2 - q^2).$$

Wenn der Hebel eine homogene, cylindrische oder prismatische Stange ist (Fig. 49), so liegt sein Schwerpunct G in der Mitte derselben, und wenn man die Entfernung GA des Schwerpunctes vom Unterstützungspuncte mit x bezeichnet, so hat man:

$$x = p - \tfrac{1}{2} l, \; p = \tfrac{1}{2} l + x,$$

$$x = \tfrac{1}{2} l - q, \; q = \tfrac{1}{2} l - x$$

$$p^2 - q^2 = (\tfrac{1}{2} l + x)^2 - (\tfrac{1}{2} l - x)^2 = 2lx.$$

Substituirt man die Werthe von p und q in die vorhergehende Gleichung, so bekommt man:

$$P(\tfrac{1}{2} l + x) = Q(\tfrac{1}{2} l - x) - lmx,$$

und wenn man die angezeigten Rechnungen verrichtet und den Werth von x sucht, so erhält man:

$$x = \frac{\frac{1}{2} l (Q - P)}{P + Q + lm}.$$

Wird der Werth von x in den Ausdruck des Hebelarmes q substituirt, so verwandelt sich derselbe in:

$$q = \frac{1}{2}l - \frac{\frac{1}{2}l(Q-P)}{P+Q+lm} = \frac{\frac{1}{2}l(lm+2P)}{P+Q+lm}.$$

Wir wollen nun den Zahlenwerth des mit q bezeichneten Hebelarmes suchen, wenn die gegebenen Größen folgende Werthe haben:

$$l = 1 \text{ Meter}, \quad m = 1,5 \text{ Kilogr.},$$
$$P = 3 \text{ Kilogr.}, \quad Q = 32 \text{ Kilogr.}$$

Werden diese Werthe für die entsprechenden Buchstaben in die letzte Gleichung substituirt, so erhält man:

$$q = \frac{0,5(1,5+6)}{3+32+1,5} = 0^m, 1027;$$

d. h. wenn die Länge des Hebels 1 Meter und das Gewicht der Längeneinheit desselben, welches in diesem Beispiele das Gewicht des ganzen Hebels ist, 1, 5 Kilogr. beträgt und man gibt dem Unterstützungspuncte eine Entfernung von $0^m, 1027$ vom Angriffspuncte eines Gewichtes von 32 Kilogr. und läßt an dem andern Ende des Hebels ein Gewicht von 3 Kilogr. wirken; so findet das Gleichgewicht statt.

Wenn man das Gewicht des Hebels unberücksichtigt ließe, so hätte man:

$$q = \frac{lP}{P+Q} = \frac{3}{35} = 0^m, 0857.$$

§. 87. Wenn man zwei Gewichte an einem schweren Hebel der ersten Art ins Gleichgewicht bringen soll, so nimmt das als Kraft betrachtete Gewicht desto mehr ab, je größer sein Hebelarm wird, und wenn man diesem Hebelarme eine hinreichende Länge geben könnte, so wäre sein eignes Gewicht schon hinreichend, um dem am andern Ende des Hebels angebrachten Gewichte, welches den Widerstand bildet, das Gleichgewicht zu halten.

Um die Länge eines Hebelarmes zu finden, welcher einem gegebenen Gewichte das Gleichgewicht zu halten vermag, wollen wir die Gleichung:

$$Pp + \frac{1}{2}mp^2 = Qq + \frac{1}{2}mq^2$$

wieder nehmen.

Setzt man darin $P = 0$ und leitet daraus den Werth von p ab, so kommt:

$$p = \sqrt{\frac{Qq + \frac{1}{2}mq^2}{\frac{1}{2}m}} = \sqrt{\frac{2Qq}{m} + q^2}$$
$$= \sqrt{q\left(\frac{2Q}{m} + q\right)}.$$

Wenn man:

$$Q = 32 \text{ Kilogr.}, \quad m = 1,5 \text{ Kilogr.}, \quad q = 0^m, 06,$$

setzt, so erhält man:

$$p = \sqrt{0,06\left(\frac{64}{1,5} + 0,06\right)} = \sqrt{2,5636} = 1^m, 601.$$

Man kann sich leicht überzeugen, ob der eben berechnete Werth von p den Bedingungen des Gleichgewichtes genügt. Wir wollen zunächst das Moment dieses Hebelarmes berechnen, so erhalten wir:

$$\tfrac{1}{2}\, mp^2 = \frac{1,5}{2} \times 2,5636 = 1,9227.$$

Substituirt man ferner für die Buchstaben ihre Werthe in den zweiten Theil der ursprünglichen Gleichung, so kommt:

$$Qq + \tfrac{1}{2}\, mq^2 = q\,(Q + \tfrac{1}{2}\, mq)$$
$$= 0,06\,(32 + 0,75 \times 0,06) = 1,9227.$$

Das Moment des Hebelarmes p ist also gleich der Summe der Momente des Widerstandes Q und des Hebelarmes q desselben, und folglich befindet sich der Hebel im Gleichgewichte.

Beispiel 2. — Wenn bei einem Hebel der zweiten Art die Länge $AB = p$ des Hebelarmes der Kraft (Fig. 50), das Gewicht m der Längeneinheit des Hebels, der Widerstand Q, welcher im Puncte C des Hebels wirkt, und der Hebelarm $AC = q$ dieses Widerstandes gegeben sind, die Kraft P zu finden, welche in dem Endpuncte B des Hebels nach einer zu der Wirkungsrichtung des Widerstandes Q parallelen Richtung wirken muß, damit das Gleichgewicht stattfindet.

Die Bedingung des Gleichgewichtes wird bei dem Hebel der zweiten Art durch die Gleichung:

$$Pp = Qq + \tfrac{1}{2}\, mp^2$$

ausgedrückt, und wenn man daraus den Werth von P ableitet, so erhält man:

$$P = \frac{Qq + \frac{1}{2}\, mp^2}{p} = \frac{Qq}{p} + \tfrac{1}{2}\, mp.$$

Um diese Formel auf einen besondern Fall anzuwenden, wollen wir $AB = p = 1$ Meter, $m = 1\,{}^1/_2$ Kilogr., $Q = 50$ Kilogr., $AC = q = 0^m,3$ setzen, und wenn diese Werthe für die Buchstaben in die vorhergehende Formel gesetzt werden, so bekommt man:

$$P = \frac{50 \times 0,3}{1} + \tfrac{1}{2} \times 1,5 \times 1 = 15 + 0,75 = 15,75.$$

Die gesuchte Kraft ist also einem Gewichte von 15, 75 Kilogr. gleich.

§. 88. Beispiel 3. — Die Länge zu finden, welche man dem Hebelarme AB (Fig. 50) geben muß, um eine gegebene Kraft P und ein gegebenes Gewicht Q an einem Hebel der zweiten Art ins Gleichgewicht zu bringen.

Die Auflösung dieser Aufgabe ist in der Gleichung:

$$Pp = Qq + \tfrac{1}{2}\, mp^2$$

enthalten, worin p die unbekannte Größe ist. Ordnet man diese Gleichung nach den Potenzen von p und dividirt durch $^1/_2\, m$, so verwandelt sie sich in:

$$p^2 - \frac{2P}{m} p = - \frac{2Qq}{m},$$

woraus folgt:

$$p = \frac{P}{m} \pm \sqrt{\frac{P}{m^2} - \frac{2Qq}{m}} = \frac{P}{m} \pm \frac{1}{m} \sqrt{P^2 - 2mQq}.$$

Wenn man den Buchstaben, welche bekannte Größen ausdrücken, dieselben Werthe beilegt, als in dem vorhergehenden Beispiele, nämlich:

$$P = 15,75 \text{ Kilogr.}, \quad Q = 50 \text{ Kilogr.}, \quad m = 1,5 \text{ Kilogr.},$$
$$q = 0^m,3,$$

setzt, so erhält man:

$$p = \frac{15,75}{1,5} \pm \frac{1}{1,5} \sqrt{(15,75)^2 - 2 \times 1,5 \times 50 \times 0,3}$$
$$= \frac{15,75 \pm 14,25}{1,5} = 10,5 \pm 9,5,$$
$$p = 10,5 + 9,5 = 20, \quad p = 10,5 - 9,5 = 1.$$

Die Gleichung gibt außer dem in dem vorhergehenden Beispiele angenommenen Werthe $p = 1$ Meter noch einen andern Werth von $p = 20$ Meter und wir wollen für diesen Hebelarm den zugehörigen Werth der Kraft P suchen. Da die übrigen Größen dieselben bleiben, so haben wir:

$$P = \frac{50 \times 0,3}{20} + \frac{1}{2} \times 1,5 \times 20 = \frac{15}{20} + 15 = 15,75.$$

Wir finden für die Kraft P denselben Werth 15, 75 Kilogr. wieder, und wenn folglich diese Kraft an einem Hebel der zweiten Art in einer Entfernung von 1 Meter oder von 20 Meter vom Unterstützungspuncte angebracht wird; so hält sie einem Gewichte von 50 Kilogr., welches in einer Entfernung von $0^m,3$ vom Unterstützungspuncte angebracht ist, das Gleichgewicht.

Wenn man die Länge p des Hebelarmes größer als 20 Meter nähme und z. B. $p = 25$ Meter setzte, so fände man $P = 19,35$ Kilogr. Wenn also der Widerstand derselbe bleibt, so muß die in einer Entfernung von 25 Meter vom Unterstützungspuncte angebrachte Kraft P größer sein, als die in einer Entfernung von 20 Meter angebrachte.

§. 89. Unter allen Werthen von p gibt es einen, für welchen die Kraft P, die dem Gewichte Q das Gleichgewicht halten soll, den möglichst kleinsten Werth hat, und man kann diesen Werth von p oder die Länge des der kleinsten Kraft entsprechenden Hebelarmes auf folgende Weise finden.

Nach der Gleichung der Aufgabe hat man:

$$P = \frac{Qq}{p} + \tfrac{1}{2} mp = Qqp^{-1} + \tfrac{1}{2} mp,$$

und wenn man diesen Werth von P, worin p die einzige veränderliche Größe ist, differentiirt und das Differential $= 0$ setzt, so kommt:

$$- Qqp^{-2} dp + \tfrac{1}{2} mdp = 0,$$

woraus folgt: $$p = \sqrt{\frac{Qq}{\frac{1}{2}m}} = \sqrt{\frac{2Qq}{m}}.$$

Wenn man für die in dieser Formel vorkommenden Buchstaben die im letzten Beispiele angegebenen Zahlen substituirt, so findet man die Länge des Hebels:

$$p = \sqrt{\frac{2 \times 50 \times 0,3}{1,5}} = \sqrt{20} = 4^m, 472.$$

Substituirt man den Werth von p in die Gleichung der Aufgabe, so erhält man:

$$P = \sqrt{2mQq},$$

woraus sich ergibt:

$$P = \sqrt{2 \times 1,5 \times 50 \times 0,3} = \sqrt{45} = 6,708 \text{ Kilogr.},$$

als der Werth der Kraft, welche am Ende des Hebels, dessen Länge wir eben berechnet haben, angebracht werden muß. Wenn man die Länge des Hebels vergrößerte, so wäre, da die übrigen Größen dieselben bleiben, zur Herstellung des Gleichgewichtes eine größere Kraft, als die durch 6, 708 Kilogr. ausgedrückte, erforderlich.

§. 90. Der Hebel der zweiten Art wird ein Hebel der dritten Art, wenn man die Kraft und den Widerstand mit einander vertauscht. Zum Gleichgewichte ist im Allgemeinen erforderlich, daß sich die Kräfte umgekehrt wie ihre Hebelarme verhalten, woraus folgt, daß bei dem Hebel der dritten Art die Kraft größer sein muß, als der Widerstand, weil der Hebelarm des letztern größer ist, als der der erstern. Dieser Hebel kann folglich nicht angewandt werden, wenn man Kraft ersparen will; allein es kommt nicht immer darauf an, mit der möglichst kleinsten Kraft die größte Wirkung hervorzubringen, und es gibt viele Fälle, wo ein Hebel der dritten Art angewandt werden muß; denn derselbe kommt z. B. an dem Rade der Scheerenschleifer, an einem Spinnrade, ꝛc. vor, wo die Tritte, durch welche diese Maschinen in Bewegung gesetzt werden, Hebel der dritten Art sind. Der Widerstand dieser Hebel ist so gering, daß man ohne zu große Anstrengung einen hinreichenden Druck mit den Füßen ausüben kann, um die Maschine in Bewegung zu setzen und mit den Händen gleichzeitig die zu leistende Arbeit zu verrichten.

Von keiner Maschine wird so häufig Anwendung gemacht, als vom Hebel, und in fast allen zusammengesetzten Maschinen kommt derselbe vor und bildet einen oder mehrere Haupttheile derselben. Bei vielen Arbeiten wird der Hebel der ersten Art mit einfachen Nebenvorrichtungen zum Heben und Umwenden großer Steine oder anderer bedeutender Lasten angewandt, welche man nicht würde bewegen können, wenn man auch so viel Menschen awenden wollte, als sich unmittelbar darauf anwenden lassen, und dieser Hebel dient überhaupt zur Vergrößerung der Wirkung der Kräfte, um größere Widerstände als sie selbst überwinden zu können.

Instrumente zum Wägen der Körper.

§. 91. Auf dem Principe des Hebels beruhen fast alle Instrumente, welche zum Wägen der Körper dienen. Wir wollen etwas näher auf die Theorie dieser Instrumente eingehn und auf die Regeln, wornach man beurtheilen kann, ob die Fehler der erhaltenen Resultate wegen der Mangelhaftigkeit der Construction die zulässigen Grenzen nicht überschreiten.

Die Schwere ist eine Kraft, welche fortwährend auf die Körper wirkt und sie gegen den Mittelpunct der Erde zu treibt. Der Erfahrung zufolge wirkt diese Kraft auf jedes Massentheilchen eines Körpers mit derselben Intensität; denn wenn man vermittelst einer Luftpumpe, oder durch andere Mittel die in einer Glasröhre enthaltene Luft fortschafft, und dann darin zwei verschiedene Körper, z. B. ein Stück Metall und eine Feder oder einen Körper von sehr geringer Dichtigkeit fallen läßt, so fallen beide mit derselben Geschwindigkeit, was bei dem Falle dieser Körper in der Luft nicht stattfindet, worin das Stück Metall fast eben so schnell fällt als in leerem Raume, während die Geschwindigkeit der Feder durch den Widerstand der Luft beträchtlich vermindert wird.

Jedes materielle Theilchen eines Körpers unterliegt der Wirkung der Schwere und die Resultante aus allen diesen Wirkungen oder aus allen diesen einzelnen Kräften, welche einander gleich und deren Richtungen zu einander parallel sind, wird das Gewicht des Körpers genannt, dessen Größe von der Dichtigkeit und dem Volumen abhängig ist. Um die Größe dieses Gewichtes des Körpers zu finden, muß man denselben mit bekannten Gewichten ins Gleichgewicht bringen, zu welchem Zwecke mnn sich eines der Instrumente bedient, die wir nun beschreiben wollen.

Von der Wage.

§. 92. Die Wage (Fig. 51) ist ein Instrument, worin der Hebel *BC* der ersten Art den Hauptbestandtheil bildet und der Wagebalken genannt wird. Derselbe ist senkrecht mit einer Axe *A* von gehärtetem Stahle durchbrochen, welche ihn in zwei Theile theilt, die die Arme des Wagebalkens genannt werden, und welche man einander möglichst gleich zu machen sucht, indem man ihnen gleiche Längen, ähnliche Formen, gleiche Volumina und gleiche Gewichte gibt. Die vorspringenden Theile der Axe haben die Form eines dreiseitigen Prismas, wovon eine scharfe Kante nach unten gekehrt ist. Diese Kanten müssen nach dem Grade der Empfindlichkeit, welchen man der Wage geben will, mehr oder weniger scharf sein; allein sie müssen doch so stark bleiben, daß sie unter der zu tragenden Last nicht schartig werden.

Zur Angabe der Empfindlichkeit und des Gleichgewichtes der Wage ist über der Axe ein Zeiger *AE* angebracht, welcher auf dieser Axe und auf dem Wagebalken senkrecht ist.

Die Fassung des Wagebalkens, welcher der Kloben oder Biegel genannt wird, ist vermittelst einer Schraube auf dem obern Ende *L* der Säule *IL* befestigt, die auf dem Fuße *MN* senkrecht ist, welchen man auf einen Tisch stellt. Das Instrument muß eine unveränderliche

Lage behalten, wenn man von der Wage Gebrauch macht, und die Axe der Säule muß in der Verticale liegen, welche durch den Schwerpunct des Wagebalkens geht. Dieser Biegel oder Kloben besteht aus zwei parallelen Schenkeln, die senkrecht auf ihren Oberflächen mit zwei einander entsprechenden Löchern durchbrochen sind, welche in der gehörigen Höhe liegen, damit sich der Wagebalken frei bewegen kann. Der untere Theil jedes Loches ist mit einem Zapfenlager von gehärtetem Stahle versehn.

Wenn der Wagebalken in den Biegel gelegt wird, so liegen die Schärfen der Axe auf den Zapfenlagern, und da sich alsdann der Wagebalken frei drehen kann, so macht er eine Reihe allmählig abnehmender Schwingungen, deren Ausdehnung von dem Zeiger *AE* auf einem oberhalb angebrachten, eingetheilten Kreisbogen angegeben wird. Haben die Schwingungen aufgehört, so ist der Wagebalken im Gleichgewichte, hat eine horizontale Richtung und sein Zeiger zeigt auf den Nullpunct der Kreistheilung.

Dem Wagebalken kann man sehr verschiedene Formen geben; aber es sind auch mehrere durchaus nothwendige Bedingungen dabei zu erfüllen, und namentlich muß derselbe möglichst wenig Masse enthalten, aber auf der andern Seite doch die hinreichende Stärke haben, damit er sich nicht biegt.

Wenn man den Wagebalken *BC* neigt und dann denselben der Wirkung der Schwere überläßt, so muß derselbe eine fortwährend abnehmende schwingende Bewegung annehmen, bis er zur Ruhe kommt und dann die horizontale Lage wieder annimmt. Soll diese Bedingung erfüllt werden, so muß der Schwerpunct *G* des Wagebalkens etwas unter den scharfen Kanten der Axe liegen; denn wenn derselbe auf der Verbindungslinie dieser scharfen Kanten läge, so würde das Gleichgewicht auch noch stattfinden, wenn man den Wagebalken eine beliebige Neigung gegeben hätte, und es würde folglich keine schwingende Bewegung stattfinden. Wenn der Schwerpunct des Wagebalkens über der eben erwähnten geraden Linie läge, so würde die kleinste, demselben ertheilte Bewegung das Umschlagen desselben bewirken, so daß er nicht von selbst ins Gleichgewicht wieder würde kommen können.

Die Enden *B* und *C* des Wagebalkens sind so eingerichtet, daß sie Haken aufnehmen können, woran man die beiden Wagschalen ***P*** und ***Q*** aufhängt, welche einander ähnlich sind und dasselbe Gewicht haben.

Diese Wage ist von selbst im Gleichgewichte und wenn man in eine ihrer Schalen, z. B. in die Schale ***Q*** einen Körper legt, welcher nicht schwerer ist, als das größte Gewicht, welches man mit dieser Wage bestimmen kann, und in die andere Schale ***P*** bekannte Gewichte legt, um das Gleichgewicht herzustellen; so ist die ganze oder gebrochene Zahl, welche die Größe dieser Gewichte ausdrückt, dem Gewichte des in die Wagschale ***Q*** gelegten Körpers gleich.

Man lernt die Empfindlichkeit dieser Wage kennen, wenn man in eine ihrer Schalen das kleinste Gewicht legt, welches einen merklichen Ausschlag derselben bewirken kann, so daß der Zeiger in Folge seiner Schwingungen nicht in den Nullpunct der Kreistheilung zurückkehren kann. Hat man z. B. in jede Wagschale 3 Kilogr. gelegt und

man braucht nur 1 Decigr. in eine der Wagschalen zu legen, um das Gleichgewicht aufzuheben, so folgt, daß die Wage für $\frac{1}{30000}$ des in einer ihrer Wagschalen enthaltenen Gewichtes empfindlich ist.

§. 93. Die beiden Arme einer Wage sind niemals einander vollkommen gleich, von was für einem geschicklichen Künstler sie auch gemacht sein mag, und es wird immer ein kleiner Unterschied stattfinden, welchen man niemals ganz beseitigen kann. Wenn man sehr genaue Wägungen anzustellen hat, so kann man die von der Ungleichheit der Arme des Wagebalkens herrührenden Fehler doch immer vermeiden. Nachdem man nämlich einen Körper in der Wagschale Q gewogen hat, lege man denselben in die andere Wagschale P und das bekannte Gewicht in die Wagschale Q. Wenn alsdann der Hebelarm AC größer ist als der andere Hebelarm AB, so ist das Gewicht des Körpers kleiner als die Summe der bekannten Gewichte der ersten Wägung und man muß folglich einen Theil dieser Gewichte hinwegnehmen, um das Gleichgewicht bei der zweiten Wägung herzustellen. Nach diesen Resultaten der doppelten Wägung kann man nun das Gewicht des Körpers berechnen.

Es seien N und N' die bekannten Gewichte, welche den Körper bei beiden Wägungen im Gleichgewichte gehalten haben, und M sei das wahre Gewicht dieses Körpers, so hat man nach der Theorie des Hebels (§. 84):

$$M : N = AB : AC$$
$$N' : M = AB : AC,$$

und da diese beiden Proportionen ein gemeinschaftliches Verhältniß haben, so geben die beiden andern Verhältnisse:

$$M : N = N' : M,\ M = \sqrt{N \times N'},$$

d. h. um das wahre Gewicht M des successive in beiden Wagschalen gewogenen Körpers zu erhalten, muß man das Gewicht der ersten Wägung durch das der zweiten multipliciren und aus dem Producte die Quadratwurzel ziehen.

Das folgende Verfahren verdient vor dem eben beschriebenen den Vorzug, weil es eben so genaue Resultate gibt und keine Rechnung erfordert.

Zuerst bringt man den in die eine Wagschale gelegten Körper mit beliebigen in die andere Wagschale gelegten Gewichten oder schweren Körpern ins Gleichgewicht und dann nimmt man den zu wägenden Körper aus seiner Wagschale heraus und legt bekannte Gewichte an seine Stelle, bis das Gleichgewicht wieder hergestellt ist; so sind diese Gewichte zusammengenommen offenbar dem gesuchten Gewichte des Körpers gleich.

§. 94. Bei vielen Versuchen hat man einen Körper im Wasser zu wägen und alsdann nimmt man statt der Wagschale Q die kleine Wagschale Q' (Fig. 52), welche an ihrer untern Seite in der Mitte mit einem Haken versehen ist. Durch diese Einrichtung wird die gewöhnliche Wage eine hydrostatische, und um sie ins Gleichgewicht zu bringen, braucht man nur in die kleine Wagschale Q' eine hinrei-

chende Menge Gewichte oder beliebige schwere Körper zu legen, um den Wagebalken in die horizontale Lage zu bringen. Den zu wägenden Körper kann man alsdann vermittelst eines Haares an dem Haken der Wagschale Q' aufhängen und in ein mit Wasser gefülltes Gefäß tauchen lassen, welches man unter die Wagschale Q' stellt, in welchem man die zur Herstellung des Gleichgewichtes erforderlichen Gewichte legt.

§. 95. Zu den täglichen Wägungen der in der Industrie und dem Handel vorkommenden Substanzen, welche nach dem Gewichte verkauft werden, bedient man sich solcher Wagen, womit man ungefähr einen Grad von Genauigkeit erreichen kann, welcher hinreichend ist, daß die Summe der Fehler keinen merklichen Einfluß auf das Resultat hat. Bei diesen gewöhnlichen Wägungen wendet man die Methode der doppelten Wägungen, welche die von der Ungleichheit der Arme der Wage herrührenden Fehler beseitigt, nicht an, weil diese Methode zu viel Zeit erfordert. Es ist daher nothwendig, daß die scharfen Kanten, auf welchen der Wagebalken ruhet, möglichst genau in seiner Mitte liegen, und wenn diese Bedingung nicht erfüllt würde, so wäre die Wage falsch. Es läßt sich leicht finden, ob eine Wage diesen Fehler hat; denn wenn sie mit ihren leeren Schalen im Gleichgewichte ist, so braucht man nur die Stellen dieser Wagschalen zu vertauschen, weil das Gleichgewicht sofort aufgehoben wird, wenn die beiden Arme des Wagebalkens nicht dieselbe Länge haben. Man kann auch die Richtigkeit einer Wage prüfen, wenn man die Lagen zweier Körper, die einander das Gleichgewicht halten, in den beiden Wagschalen vertauscht; denn durch diese Verlegung jedes Körpers in die andere Wagschale wird das Gleichgewicht aufgehoben, wenn die Arme der Wage einander nicht gleich sind.

§. 96. Die großen Wagen haben quadratische Schalen, welche an ihren vier Ecken durch Seile, Ketten oder eiserne Stäbe mit dem Wagebalken verbunden sind. Sie dienen zum Wägen der Tonnen, Kisten, Säcke und überhaupt aller Güter, welche im Großen verkauft werden und die größten Lasten, welche man mit den stärksten dieser Wagen wiegt, übersteigen kaum 1500 Kilogr. Wenn man annimmt, daß die Empfindlichkeit der Wage $\frac{1}{2000}$ der auf einer Wagschale befindlichen Last beträgt, so muß man bei diesen großen Wägungen, wenn die Wage in Gleichgewichte ist, in die eine Wagschale ungefähr 750 Gramm legen, um einen merkbaren Ausschlag zu bewirken, und wenn man alsdann dieses Gewicht wieder wegnimmt, so muß der Wagebalken wieder in seine horizontale Lage zurückkehren.

Man hat bemerkt, daß, wenn man nach starken Wägungen, wobei die Schale mit der Waare die mit den Gewichten empor zieht, diese auf den Boden herabsinken läßt und sie dann wieder allmählig hebt, um den Wagebalken in die horizontale Lage zurückzubringen, sich derselbe wieder nach der Seite der Gewichte neigt, und daß man, um denselben nach der andern Seite zu neigen, ungefähr ein Gewicht von 1 Kilogr. hinzufügen muß.

Oft sind die großen Wagen dem Wetter ausgesetzt und man gibt sich nicht die nöthige Mühe, um sie gegen Veränderungen zu schützen, welche sie ungenau machen und häufige Verbesserungen erfordern.

Wenn man sich derselben bedienen will, so findet man gewöhnlich, daß einer der Arme mit seiner Schale leichter ist, als der andere, so daß man Gewichte hinzusetzen muß, um das Gleichgewicht der Wage herzustellen. Die Engländer, welche bei ihren gebräuchlichen Maschinen auch die geringsten Einzelnheiten nicht unberücksichtigt lassen, haben zur Erleichterung dieser Correctionen ein sehr einfaches Mittel erfunden, welches in einem längs des einen Armes des Wagebalkens verschiebbaren Gewichte besteht, das man in der entsprechenden Entfernung mit einer Druckschraube befestigt.

Von der römischen oder Schnellwage.

§. 97. Die römische oder Schnellwage besteht aus einer eisernen Stange *BC* (Fig. 53), welche einen Hebel der ersten Art bildet, und durch eine Axe, deren vorspringende Theile in scharfe Kanten auslaufen, in zwei ungleiche Arme *AB*, *AC* getheilt wird. Diese Stange drehet sich in einem ähnlichen Biegel *AS*, wie der der gewöhnlichen Wage und ihre horizontale Lage wird wie bei dieser durch einen über der Axe angebrachten Zeiger angedeutet; aber die Schnellwage hat nur eine Wagschale oder einen Haken *LM* an dem kleinsten Arme *AB*, woran die zu wägenden Körper aufgehangen werden, und welcher an einer ebenfalls scharfkantigen Axe hängt. An dem größten Hebelarm *AC* befindet sich ein bestimmtes Gewicht *P*, welches sich längs dieses Hebelarmes vermittelst eines nach innen scharfkantig zulaufenden Ringes *D* verschieben läßt.

Die Schale einer gewöhnlichen Wage, in welche die bekannten Gewichte gestellt werden, wird in der Schnellwage durch das constante Gewicht *P*, dessen Wirkung größer oder kleiner ist, je nachdem es von der Aufhängungsaxe *A* entfernt oder derselben genähert wird, ersetzt. Sind die verschiedenen eben angegebenen Theile einer Schnellwage mit der gehörigen Sorgfalt construirt, so ist der lange Arm *AC* noch in Theile zu theilen, welche die relativen Werthe des constanten oder Laufgewichtes **P** angeben.

Betrachten wir zunächst die Stange *BC*, welche die beiden Arme der Schwellwage bildet, als einen Hebel ohne Schwere und hängen an dem Haken *LM* successive Körper von den Gewichten **Q**, **Q'**, **Q''**, **Q'''**, ꝛc. auf und bringen endlich für jedes dieser Gewichte das Laufgewicht *P* successive in die Lagen *E*, *F*, *G*, *H*, ꝛc., für welche das Gleichgewicht stattfindet; so haben wir folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} \times AL &= P \times AE \\ \mathbf{Q'} \times AL &= P \times AF \\ \mathbf{Q''} \times AL &= P \times AG \\ \mathbf{Q'''} \times AL &= P \times AH. \end{aligned}$$

Ziehen wir die erste dieser Gleichungen von der zweiten, die zweite von der dritten und die dritte von der vierten ab, so kommt:

$$\begin{aligned} (Q' - Q) \times AL &= \mathbf{P} \times (AF - AE), \\ (Q'' - Q') \times AL &= \mathbf{P} \times (AG - AF), \\ (Q''' - Q'') \times AL &= \mathbf{P} \times (AH - AG). \end{aligned}$$

Wenn die Gewichte **Q**, **Q'**, **Q''**, **Q'''** eine arithmetische Progression bilden, so hat man:

$$Q' - Q = Q'' - Q' = Q''' - Q'',$$

und die Entfernungen AE, AF, AG, AH bilden auch eine arithmetische Progression, deren Differenz das Intervall zwischen zwei successiven Lagen des constanten Gewichtes P ist, und folglich muß dieses Gewicht um gleiche Intervalle verrückt werden, woraus sich zur Eintheilung der Schnellwage folgende Regeln ergeben:

An den Haken M hänge man das kleinste Gewicht Q, welches mit der Schnellwage gewogen werden kann, bringe das Laufgewicht P in eine solche Lage, daß das Gleichgewicht stattfindet und bemerke diesen Punct durch einen Strich E. Hierauf substituire man das Gewicht Q' für das Gewicht Q und bringe dieses zweite Gewicht mit dem Laufgewichte P ins Gleichgewicht, so erhält man einen andern Punct F, welchen man wieder durch einen Einschnitt bezeichnet. Alsdann theile man das Intervall zwischen den Puncten E und F in eben so viel gleiche Theile, als die Differenz $Q' - Q$ Gewichtseinheiten enthält und um die Eintheilung der Schnellwage zu vollenden, braucht man die Eintheilung zwischen den Puncten E und F nur so oft auf den noch übrigen Theil FC des langen Armes zu tragen, als dieses angeht.

§. 98. Wir haben bisher die Stange BC als einen Hebel ohne Gewicht betrachtet und wir wollen nun sehen, welche Veränderungen die erhaltenen Resultate erfahren, wenn das Gewicht des Hebels in Rechnung gebracht wird.

Es sei p das Gewicht des Armes AC der Schnellwage, welches in dem Schwerpuncte c dieses Armes wirkend angenommen wird, q das Gewicht des Armes AB, welches in seinem Schwerpuncte b angebracht ist, und m sei das Gewicht des Hakens LM; so wird das Gleichgewicht der Schnellwage, da die übrigen Größen dieselben bleiben als im ersten Falle, durch folgende Gleichungen ausgedrückt (§. 84):

$$Q \times AL + q \times Ab + m \times AL = P \times AE + p \times Ac,$$
$$Q' \times AL + q \times Ab + m \times AL = P \times AF + p \times Ac,$$
$$Q'' \times AL + q \times Ab + m \times AL = P \times AG + p \times Ac.$$

Es ist leicht einzusehen, daß, wenn man die erste Gleichung von der zweiten und die zweite von der dritten abzieht, die von dem Gewichte des Hebels abhängigen Glieder verschwinden, und daß man die Formeln wieder erhält, welche wir im ersten Falle erhalten haben, wo das Gewicht des Wagebalkens nicht in Betracht gezogen wurde.

§. 99. Wenn man von der Schnellwage Gebrauch machen will, so hängt man sie an ihrem Biegel AS auf, der zu wägende Körper wird an dem Haken LM aufgehangen, und das Laufgewicht P in eine solche Lage gebracht, daß das Gleichgewicht stattfindet, so drückt die dem Ringe D entsprechende Zahl das Gewicht des an dem Haken LM aufgehangenen Körpers aus.

Die Theilung des großen Armes der Schnellwage gibt von selbst die Grenzen an, zwischen welchen die Gewichte der Körper liegen müssen, welche man direct mit der Wage wägen kann. Vermittelst der in Figur 53 dargestellten Schnellwage kann man Körper wägen, deren Gewicht 10 bis 60 Kilogr. beträgt, indem man sich eines einzigen Laufgewichtes bedient; aber wenn man ein oder mehrere Zusatz-

gewichte anwendet, so kann man weit schwerere Körper, als die auf der Scale angegebenen Gewichte damit wägen.

Wenn man an der Axe *a* ein solches Gewicht aufhängt, daß, wenn das Laufgewicht *P* in den ersten Theilungspunct *E* gebracht ist, das Gewicht des an dem Haken *M* hängenden Körpers 60 Kilogr. beträgt, wenn die Wage im Gleichgewichte ist, und man bringt alsdann das Laufgewicht in den letzten Theilungspunct der Scale, so hält dasselbe einem an dem Haken *M* aufgehangenen Gewichte von 110 Kilogr. das Gleichgewicht. Wenn man noch andere Zusatzgewichte hinzufügt, so kann man die Kraft der Schnellwage noch bedeutend vergrößern, wobei aber zu bemerken ist, daß die Belastung derselben immer kleiner sein muß, als das Gewicht, welches eine merkliche Biegung des großen Armes bewirken könnte.

§. 100. Der schwierigste Theil der Construction einer Schnellwage besteht in der gehörigen Einrichtung der scharfen Kanten. Man verfertigt sie, wie bei der gewöhnlichen Wage, aus Stahl, indem die Schärfe der Aufhängungskante in der Linie liegen muß, welche durch die tiefsten Puncte der Einschnitte der Scale gehet, während die scharfen Kanten, worauf der Haken mit den zu wägenden Körpern und die Zusatzgewichte ruhen, etwas unter der Aufhängungsaxe liegen müssen.

Es gibt Schnellwagen von verschiedenen Dimensionen. Diejenigen, welche zum Wägen kleiner Quantitäten Waaren bestimmt sind, haben oft zwei Aufhängungsaxen und zwei Scalen auf den entgegengesetzten Seiten des Wagebalkens, wovon die eine die schwache und die andere die starke Seite genannt wird; allein durch diese Einrichtung wird die Schnellwage zu complicirt und es ist zweckmäßiger, nur eine einzige Scale anzuwenden, indem man die Anwendung des Instrumentes, in soweit es die Stärke des Balkens gestattet, durch Zusatzgewichte erweitert.

Die Schnellwage schwingt wenig und ist nicht so empfindlich, als eine gute gewöhnliche Wage, womit man dasselbe Gewicht wägen kann. Wenn die gewöhnliche Wage bei genauen Wägungen den Vorzug verdient, so verdient dagegen die Schnellwage bei den meisten der täglichen Anwendungen, wo diese Genauigkeit nicht erforderlich ist, in mehreren Rücksichten den Vorzug. Sie erfordert keinen Vorrath von Gewichten, welche man bei den gewöhnlichen Wagen haben muß; sie läßt sich leichter transportiren und führt schneller zum Ziele, aber ihr Hauptvorzug bestehet darin, daß man sehr schwere Körper damit wägen kann, wozu keine gewöhnliche Wage mit zwei gleichen Armen geeignet ist.

Die gewöhnliche und die Schnellwage sind die gebräuchlichsten Instrumente zum Wägen der Körper und sie gewähren alle in den Naturwissenschaften, Künsten und Gewerben erforderliche Genauigkeit, allein durch Untersuchungen über die verschiedenen Verbindungsarten der Hebel ist man zur Construction anderer Instrumente gelangt, welche wegen ihrer eigenthümlichen Vorzüge zum Wägen der Körper angewandt werden. Eine der merkwürdigsten dieser Hebelverbingungen kommt bei der Brückenwage vor, wovon wir eine kurze Beschreibung und Berechnung mittheilen wollen.

§. 101. Die Brückenwage, wovon Fig. 54 der Grundriß und Fig. 55 einen Breitendurchschnitt darstellt, besteht aus einer rechteckigen Platte *TT*, welche die Brücke genannt wird, deren Länge ungefähr 5 Meter und deren Breite 2^m, 75 beträgt und auf welche die Fuhrwerke oder jede andere zu wägende Last gebracht werden, und unter dieser Brücke befindet sich ein Hebelsystem, welches den Mechanismus bildet und das Gewicht der Last auf eine einfache und bequeme Weise angibt.

Die Brücke *T* besteht aus zwei durch Riegel, die sich in der Mitte verstärken, verbundenen Balken, wodurch ein Rahmen gebildet wird, den man mit zwei Reihen von Bohlen bedeckt, zwischen welche Kupferplatten gelegt sind, damit das Regenwasser nicht eindringen kann. Diese Bohlen sind auf dem Rahmen mit Schraubenbolzen befestigt, welche ungefähr 8 Centimeter darüber hinausragen und die Stäbe *v* dienen dazu, daß die Pferde festen Fuß fassen können.

Diese Brücke liegt über einer Vertiefung von ungefähr 2 Meter Tiefe und deren obere rechteckige Basis etwas größer ist, als der Rahmen, damit derselbe in die Vertiefung hineintreten kann, und auf allen vier Seiten ein Zwischenraum von 1 oder 2 Centimeter bleibt, und die Reibung vermieden wird, wenn sich der Rahmen durch die Feuchtigkeit ausdehnt und damit auch die äußere Luft in die Vertiefung treten kann. Die Brücke ist gegen die Mitte zu etwas erhaben, damit das Regenwasser nicht darauf stehen bleibt, welches durch Rinnen abgeleitet wird, damit es nicht in die Vertiefung fließt.

In der Mitte und in jeder Ecke der Vertiefung ist eine Säule von Quadersteinen errichtet, worauf der Balancier und die beiden Winkelhebel ruhen, welche den Mechanismus der Brückenwage bilden. Der mittlere Pfeiler, welcher die Unterlage des Balanciers trägt, hat eine Höhe von 1^m, 6 und jeder der vier übrigen Pfeiler, woran sich die Biegel der Winkelhebel befinden, hat eine Höhe von 1^m, 5.

§. 102. Unter der Brücke sind zwei gußeiserne Querstücke *H* angebracht, welche, wie die Riegel, sich gegen die Mitte zu verstärken und wovon jedes zwei rechtwinklige Zweige *f*, *f* hat, deren mit stählernen Lagern versehene Enden sich auf die scharfen Kanten der durch die beiden Schenkel jedes Winkelhebels gehenden Stäbe *n*, *n* stützen. Auf diesen beiden Querstücken, welche die Biegel genannt werden, ruhet die Brücke.

Der Balancier *AD* ist ein großer gußeiserner Hebel, durch welchen in normaler Richtung eine stählerne Axe geht, deren vorspringende scharfkantige Theile auf den Pfannen der Unterlage *B* des mittlern Pfeilers *K* ruhen und dieses ist die Unterlage der Rotationsaxe des Balanciers. Außerdem kommt noch im Puncte *C* eine Axe vor, deren vorspringende Theile ebenfalls scharfkantig sind, aber in einem entgegengesetzten Sinne von denen der ersten Axe. Die beiden Theile *CA* und *BD* von ungleichen Längen sind von unten nach oben gebogen, damit der Schwerpunct unter dem Drehungsmittelpuncte liegt.

Am Ende *A* des Hebels befindet sich eine Dille mit einer Nute, die mit einem Schraubenbolzen befestigt wird und zur Aufnahme des Stabes dient, der von dem einen Ende des Wagebalkens, welcher innerhalb des Bureau's an einem Kreuzhaken aufgehangen ist, getragen

wird und das andere Ende des Wagebalkens trägt die Platte *M*, auf welche bekannte Gewichte gestellt werden. Um den längern Theil *BA* mit allen darauf wirkenden Stücken ins Gleichgewicht zu setzen, bringt man an dem Ende *D* des kürzern Theiles *BD* ein Gewicht *S* an, welches vermittelst eines Hakens an dem Ringe *t* aufgehangen ist. Dieses Gegengewicht besteht aus mehreren gußeisernen Stücken von verschiedener Dicke, damit man es größer oder kleiner machen kann, um dasselbe mit den an dem Ende des Balanciers wirkenden Gewichten ins Gleichgewicht zu bringen.

An dem längern Theile *BA* des Balanciers ist ein Laufgewicht *r* von 2 oder 3 Kilogr. vermittelst eines Bandes aufgehangen und dient als Regulator, dessen Wirkung seiner Entfernung vom Rotationsmittelpuncte proportional zunimmt, und nachdem es an die dem Gleichgewichte entsprechende Stelle gebracht ist, wird es mit einer Druckschraube befestigt. Es würde vortheilhaft sein, einen ähnlichen Regulator an den Balken großer Wagen anzubringen, um sie damit zu tariren, wenn das Gleichgewicht durch die Wirkung der Feuchtigkeit auf die Wagschalen gestört ist.

Die beiden Winkelhebel oder Schenkel *Cehii* liegen zu beiden Seiten des Balanciers senkrecht auf seiner Richtung; durch jeden der beiden Arme dieser Winkelhebel gehen zwei eiserne Stäbe *mm* und *nn*, deren Enden aus Stahl bestehen und in entgegengesetztem Sinne scharfkantig auslaufen; die scharfen Kanten der Stäbe *mm* ruhen auf den Lagern der Biegel der Pfeiler *L*, *L* und um diese Lager drehen sich die Winkelhebel, wenn sie durch die Last auf der Brücke niederwärts bewegt werden, wo alsdann die Schärfen der Stäbe *nn* nachgeben und durch den Druck der ihnen entsprechenden Biegel bewegt werden.

Die an dem Balancier liegenden Enden der Winkelhebel sind abgerundet und mit Gabeln versehen, um ein durch einen Bolzen befestigtes Stück, um welchen sich das Ende frei drehen kann, aufzuhängen. Dieses Stück trägt an seinen Enden einen Ring, in welche Ringe man die vorspringenden Theile der Axe *C* treten läßt, um die Winkelhebel an dem Balancier zu befestigen, so daß sich diese Hebel nicht abwärts bewegen können, ohne den Balancier mit fortzuziehen, und wenn dieser durch den an dem Wagebalken befestigten Stab wieder gehoben wird, so werden zu gleicher Zeit auch die Winkelhebel gehoben, so daß also die schwingende Bewegung der Hebel auf den Balancier übertragen wird, und es kommt alsdann bloß noch darauf an, das Verhältniß des Gewichtes, welches die Wage ins Gleichgewicht bringt, zu dem auf der Brücke befindlichen Gewichte zu kennen, um dieses letztere Gewicht zu bestimmen.

§. 103. Bei der Bestimmung der Bedingungen des Gleichgewichtes der Brückenwage, wenn sich auf der Brücke ein Fuhrwerk oder irgend eine andere Last befindet, ist das Gewicht der Hebel nicht in Rechnung zu bringen, weil die Wage vor der Belastung der Brücke gehörig tarirt ist, um die Hebel ins Gleichgewicht zu bringen.

Der Winkelhebel *Cehii* kann als ein geradliniger Hebel *Cb* betrachtet werden, dessen Unterstützungspunct im Puncte *b* des Stabes *mm* liegt, worauf der Widerstand oder der Druck *q* im Puncte *c* des Stabes *nn* wirkt, und wenn man die Kraft, welche diesem Drucke

das Gleichgewicht zu halten vermag, mit p bezeichnet; so hat man nach der Theorie des Hebels (§. 84):

$$p \times Cb = q \times cb,\ p = \frac{q \times cb}{Cb}.$$

Der zweite Winkelhebel würde eine ähnliche Gleichung, wie die eben gefundene, geben, wodurch an dem gesuchten Verhältnisse nichts geändert wird.

Jeder dieser beiden Winkelhebel, welche am Puncte C des großen Hebels oder des Balanciers AD befestigt sind, übt auf den letztern einen Druck p aus, welcher den Balancier auf den Lagern des Supportes B zu drehen strebt und durch die Kraft P aufgehoben werden muß, welche im Puncte A von unten nach oben wirkt oder durch die Gewichte, welche auf die Platte M gestellt werden, die an dem einen Arme der Wage aufgehangen ist, deren anderer Arm mit dem an dem Balancier befestigten Stabe verbunden ist. Hiernach gibt das Gleichgewicht des Balanciers folgende Gleichung:

$$P \times AB = p \times BC,\ P = \frac{p \times BC}{AB},$$

und wenn man für p seinen aus der vorhergehenden Gleichung abgeleiteten Werth substituirt, so erhält man:

$$P = \frac{BC \times bc}{AB \times bC} \times q.$$

Das Verhältniß der Kraft P zu dem Widerstande q ist von dem Coefficienten $\frac{BC \times bc}{AB \times bC}$ von q abhängig; aber die Axen oder scharfen Kanten der Hebel liegen so, daß $AB = 10bc$ und $bC = 10bc$ ist, so daß

$$\frac{BC \times bc}{AB \times bC} = \frac{BC \times bc}{10BC \times 10bc} = \frac{1}{10 \times 10} = \frac{1}{100} = 0{,}01,$$

und folglich

$$P = 0{,}01.q$$

ist, woraus erhellet, daß die Kraft P nur $\frac{1}{100}$ des Widerstandes q beträgt; d. h. ein auf die Wagschale M gestelltes Gewicht hält einem 100mal größern Gewichte auf der Brücke das Gleichgewicht.

§. 104. Wenn ein Fuhrwerk auf die Brückenwage gefahren wird, um es zu wiegen, so muß man demselben eine solche Stellung geben, daß sein Schwerpunct ungefähr der Mitte der Brücke entspricht, weil sich die Brücke winden würde, wenn sie auf der einen Seite stärker belastet wäre, als auf der entgegengesetzten, und die scharfen Aufhängungskanten würden aus der Lage verrückt werden, welche sie auf ihren Unterlagen haben müssen.

Die Schwingungen der Brücke sind sehr klein, weil die Hebelarme, welche zwischen dem Stabe mm, dessen scharfe Kanten auf den festen Lagern ruhen und dem Stabe nn, dessen scharfe Kanten den Druck der an den über diesen Kanten liegenden Biegel befindlichen Lagern erhalten. Aber das Ende C des Winkelhebels, welcher an dem Balancier befestigt ist, durchläuft einen 10mal größern Raum, als

der ist, welchen die scharfen Kanten des Stabes *nn* vermöge des darauf wirkenden Druckes beschreiben, und der Raum, welchen das Ende *A* des Balanciers durchläuft, ist wieder 10mal größer, als der von dem Puncte *C* beschriebene Raum. Der Wagebalken macht also vermöge der ihm mitgetheilten Bewegung des Endpunctes des Balanciers beträchtliche Schwingungen, obgleich die der Brücke sehr gering sind.

Alle Theile der Brückenwage sind in der gehörigen Stärke construirt, um den größten Lasten, welche auf Fuhrwerken transportirt werden können, zu widerstehen. Die scharfen Kanten der Winkelhebel des Balanciers sind nicht sehr scharf, so daß sich die Hebel wegen der Reibung dieser scharfkantigen Aufhängungsaxen auf den Unterlagen nicht mit derselben Leichtigkeit drehen, wie bei einer gewöhnlichen Wage. Wenn alle Theile des Mechanismus einer Brückenwage sich in einem guten Zustande befinden und das Gleichgewicht ohne Belastung stattfindet, so muß ein auf die Brücke gestelltes Gewicht von 1 Myriagramm einen merklichen Ausschlag des Wagebalkens bewirken.

Da die scharfkantigen Axen der Hebel stumpfwinklig sind, so können sie die Lasten der schwersten Fuhrwerke tragen, ohne schartig zu werden; allein der Mechanismus der Brückenwage könnte durch die bei dem Belasten der Wage mit Fuhrwerken stattfindenden Stöße beschädigt werden, und um diesen Nachtheil zu beseitigen, sind an den vier Ecken der Brücke Hebeschrauben angebracht, womit die Brücke während des Beladens gehoben wird und worauf sie ruhet. Diese Hebeschrauben sind in der Zeichnung nicht angegeben; sie werden gedrehet, wenn das Fuhrwerk, welches man wiegen will, bereits auf der Brücke steht, um sie wieder auf den Mechanismus herabsinken zu lassen, und wenn die Wägung geschehen ist, so drehet man die Schrauben wieder, um die Brücke zu heben, ehe das Fuhrwerk herabgefahren wird. Wenn die vier Hebeschrauben nicht gleichzeitig gedrehet werden, so müssen wenigstens zwei an derselben Seite der Brücke und dann die beiden andern gleichzeitig gedrehet werden, damit die Brücke nicht diejenige schiefe Lage annimmt, bei welcher die scharfen Kanten auf ihre Unterlagen einen ungleichen Druck ausüben.

Von der Rolle.

§. 105. Die Rolle ist eine kreisrunde Scheibe von Holz oder Metall, welche mitten an ihrem Umfange eine halbkreisförmige Vertiefung hat, die man Schnurlauf nennt, und in welche man ein Seil oder eine Kette gehen läßt. Wenn die Rolle aus Holz besteht, so hat sie die Form eines vollen Cylinders von einer geringen Höhe, und wenn sie aus Eisen, Messing oder einem andern Metalle besteht; so hat sie die Form eines Rades mit Speichen, um sie leichter zu machen. Durch die Mitte der Rolle geht die Axe, um welche sie sich drehen muß, und welche so eingerichtet sein muß, daß bei der drehenden Bewegung der Rolle die möglichst kleinste Reibung stattfindet und endlich muß die Axe die hinreichende Stärke haben, um den auf sie wirkenden Druck aushalten zu können.

Von den Rollen wird in vielen Fällen Anwendung gemacht und namentlich, wenn es darauf ankommt, schwere Körper entweder aus

der Tiefe, oder auf eine gewisse Höhe zu heben. Auch gibt die Rolle die Mittel an die Hand, eine Kraft nach der vortheilhaftesten Richtung wirken zu lassen, und wenn diese Kraft in der Kraft der Menschen oder Pferde besteht, so kann man die Anzahl derselben auch beträchtlich vergrößern.

Zur Hebung der Steine und anderer Baumaterialien bedient man sich häufig des in Figur 56 dargestellten sehr einfachen Apparates. Derselbe besteht aus einem verticalen Maste *AB*, an dessen obern Ende zwei Kreuzstücke *DE*, *IH* befestigt sind. Das erste dieser Stücke trägt zwei Rollen *m* und *m'*, über welche man ein Seil gehen läßt, an dessen einem Ende die zu hebende Last *Q* befestigt wird, während an dem andern Ende die Kraft *P* wirkt. Wenn diese Kraft in der Kraft der Menschen besteht, so können diese an dem Seile von oben nach unten ziehen; aber wenn man eine Leitrolle *m''* anbringt, so können sie auch nach jeder andern bequemern Richtung an dem Seile ziehen.

§. 106. Man kann die vorspringenden Theile der Axe einer Rolle so befestigen, daß diese Axe durch die Stücke des Mechanismus, wovon sie einen Theil bilden muß, selbst getragen wird; aber bei den meisten Anwendungen drehet sich die Rolle frei zwischen den beiden Schenkeln einer Fassung oder eines Biegels. Das über den Umfang der Rolle hinausragende Ende des Biegels läuft in einen Haken oder Ring aus, und es gibt überhaupt zwei Arten von Rollen, nämlich feste und bewegliche Rollen.

Die feste Rolle ist diejenige, deren Biegel *GI* (Fig. 57) mit dem Haken *K* an einem unbeweglichen Hindernisse befestigt ist. Um alsdann mit einer solchen festen Rolle eine Last *Q* zu heben, legt man um die Rolle ein Seil *QFHE*, wovon das eine Ende an der zu hebenden Last befestigt wird, während an dem andern Ende die Kraft wirken muß. Die Richtungen *EF*, *FQ*, nach welchen die Kraft *P* und der Widerstand oder die Last *Q* wirken, berühren den Umfang der Rolle.

Eine bewegliche Rolle ist diejenige, deren Biegel *GI* (Fig. 58) an dem zu überwindenden Widerstande oder der zu hebenden Last *Q* befestigt und mit derselben beweglich ist. Man legt um die Rolle alsdann ein Seil *KFHE*, dessen eines Ende an einem festen Puncte *K* befestigt ist und an dessen anderem Ende eine Kraft *P* wirkt, welche zugleich die Rolle und die Last zu heben strebt.

Aus der festen und beweglichen Rolle setzt man Maschinen zusammen, welche Flaschenzüge oder Kloben genannt werden, vermittelst welcher man eine beträchtliche Last mit einer mäßigen Kraft heben und dieser Kraft die vortheilhafteste Richtung geben kann.

§. 107. Die Principien, worauf die Bedingungen des Gleichgewichtes aller dieser Maschinen beruhen, ergeben sich aus denen für die einfache Rolle, und wir wollen daher zunächst die Bedingungen des Gleichgewichtes der einfachen Rolle suchen und sie dann auf die aus mehreren einfachen Rollen zusammengesetzten Maschinen oder auf die Flaschenzüge anwenden.

Aufg. Die Bedingungen zu finden, welche erfüllt werden müssen, damit zwei an den beiden Enden eines über

eine Rolle gehenden Seiles wirkende Kräfte im Gleichgewichte sind. — Aufl. Die Rolle sei eine feste und ihr Biegel *GI* (Fig. 57) mit einem Seile *IK* an einem Haken *K* aufgehangen. *P* und *Q* seien zwei Kräfte, welche an dem über die Rolle *GEHF* gehenden Seile wirken, so können wir *P* als eine Kraft betrachten, welche die Last *Q* vermittelst des daran befestigten Seiles zu heben strebt und die Seile *EP*, *FQ* berühren den Umfang der Rolle oder sind zwei Tangenten an demselben.

Das Gleichgewicht kann nur dann stattfinden, wenn die Kraft *P* und der Widerstand oder die Last *Q* einander gleich sind; denn wenn dieses nicht der Fall wäre, so würde die kleinere Kraft die größere hinter sich herziehen, weil sich die Rolle nach der Voraussetzung frei um ihre Axe drehen kann und das Seil vollkommen biegsam und unausdehnbar ist.

Wenn man sich die Seilstücke *PE*, *QF* bis zu ihrem Zusammentreffen im Punct *A* verlängert denkt, so kann man sich die beiden Kräfte *P* und *Q* in diesem Puncte angebracht vorstellen. Es seien *Ab*, *Ac* die geraden Linien, welche diese Kräfte ausdrücken, so drückt die Diagonale *AD* des Parallelogrammes *AbDc* die Resultante *R* der Kräfte *P* und *Q* aus und zugleich auch den Druck, welchen diese beiden Componenten auf die Axe *G* der Rolle ausüben. Aber wenn das Gleichgewicht stattfindet, so muß die Resultante *R* durch den Widerstand dieser Axe aufgehoben werden; folglich muß die Richtung *AD* der Resultante durch die Mitte *G* der Axe gehen, und da sich der Biegel *GI* frei um die Axe der Rolle drehen kann, so nimmt derselbe die Richtung der Diagonale *AD* an.

Da die Kräfte *P* und *Q* einander gleich sind, so ist das Parallelogramm *AbDc* eine Raute, das Dreieck *ADb* gleichschenklig und der Winkel *AbD* das Supplement von *bAc*.

Die durch die Seiten *Ab*, *AD* des Dreieckes *AbD* ausgedrückten Kräfte *P* und *R* verhalten sich wie die Sinus der diesen Seiten gegenüberliegenden Winkel und man hat folglich die Proportion:

$$P : R = \sin. DAb : \sin. AbD \text{ oder } \sin. bAc.$$

Es ist aber $bAc = 2\,DAb$, folglich $\sin. bAc = \sin. 2\,DAb = 2 \sin. DAb \cos. DAb$.

Substituirt man diesen Werth von $\sin. bAc$ in die vorhergehende Proportion und läßt den gemeinschaftlichen Factor $\sin. DAb$ hinweg, so kommt:

$$P : R = 1 : 2 \cos. DAb, \quad R = 2P \cos. DAb.$$

Durch diese Formel könnte man eine der darin vorkommenden drei Größen bestimmen, wenn die beiden andern bekannt sind; allein zur Erleichterung der Rechnung wollen wir eine andere Formel suchen, welche keine trigonometrischen Größen enthält.

Es seien *E* und *F* die Puncte, worin die Seilstücke *EP*, *FQ* den Umfang der Rolle berühren. Nach diesen Berührungspuncten wollen wir die Halbmesser *GE*, *GF* ziehen und dann die Linie *EF*, so sind die Seiten der beiden Dreiecke *AbD*, *GEF* resp. auf einander senkrecht, folglich diese beiden Dreiecke einander ähnlich und der Winkel $DAb = GEL$. Das rechtwinklige Dreieck *GEL* gibt, ferner:

$1 : cos.\,GEL$ oder $cos.\,DAb = GE : EL$ oder $^1/_2\,EF$,

woraus folgt: $$cos.\,DAb = \frac{\frac{1}{2}EF}{GE} = \frac{EF}{2GE},$$

und wenn man diesen Werth von $cos.\,DAb$ in die vorhergehende Formel substituirt, so erhält man:

$$R = 2P \times \frac{EF}{2GE} = \frac{P \times EF}{GE},$$

woraus folgt: $$R : P = EF : GE,$$

d. h. die Resultante aus den beiden gleichen Kräften P und Q oder der Druck auf die Axe der Rolle verhält sich zu einer dieser Kräfte, wie die Sehne, welche die beiden Berührungspuncte E und F verbindet, zu dem Halbmesser der Rolle.

Wenn die Richtungen der Kräfte P und Q nicht parallel sind, so ist der Druck auf die Axe der Rolle kleiner, als das Doppelte einer dieser Kräfte. Wenn z. B. der Winkel $DAb = GEL = 60°$ ist, so ist $cos.\,DAb = cos.\,60° = ^1/_2$, folglich $EF = GE$, und mithin $R = P$. Alsdann umschließt das Seil nur den sechsten Theil des Umfanges der Rolle und der Druck auf ihre Axe ist der Kraft P oder der Last Q gleich.

Wenn die Richtung der Kraft P und die der Last Q zu einander parallel sind, so umschließt das Seil die Hälfte des Umfanges der Rolle und man hat:

$$EF = 2GE,\ R = 2P = P + Q.$$

In diesem Falle wirkt also auf die Axe der Rolle ein Druck, welcher der Summe der beiden Kräfte gleich ist, die an den beiden Enden des Seiles nach entgegengesetztem Sinne wirken.

Wir haben bisher das eigene Gewicht der Rolle unberücksichtigt gelassen, und wenn man dasselbe in Rechnung bringen wollte, so müßte man es als eine an ihrem Mittelpuncte angebrachte verticale Kraft betrachten und diese Kraft mit der Resultante R der beiden Kräfte P und Q zusammensetzen. Allein bei den gewöhnlichen Anwendungen ist das Gewicht der Rolle gegen das damit zu hebende Gewicht so gering, daß man es ohne einen merklichen Fehler in dem Resultate der Rechnung unberücksichtigt lassen kann.

§. 108. Es sei $GEHF$ (Fig. 58) eine bewegliche Rolle, die zur Ueberwindung eines Widerstandes oder zum Heben einer Last Q, welche unmittelbar oder vermittelst eines Seiles IQ an dem Biegel GI befestigt ist, angewandt werden soll. Das eine Ende des über die Rolle gehenden Seiles $PEHFK$ wird an einem festen Puncte K befestigt und an dem andern Ende des Seiles wirkt eine Kraft P. Wenn das Gleichgewicht stattfindet, so sind die beiden Seilstücke EP, FK gleich stark gespannt; denn wenn dieses nicht der Fall wäre, so würde die Rolle nach der Seite der schwächsten Spannung fortgleiten und das Gleichgewicht würde nicht stattfinden.

Die Seilstücke EP, FK sind zwei Tangenten in den Puncten E und F des Umfanges der Rolle, und wenn diese Seilstücke bis zu

ihrem Zusammentreffen im Puncte *A* verlängert werden, so geht die Richtung des Biegels durch den Durchschnittspunct *A* und theilt den Winkel *PAK* in zwei gleiche Theile.

Der Druck, welchen die Last *Q* auf die Axe der Rolle ausübt, ist dem Gewichte dieser Last gleich. Wenn man dieses Gewicht durch die gerade Linie *AD* ausdrückt und durch den Punct *D* die geraden Linien *Dc*, *Db* resp. zu *AP*, *AK* parallel zieht, so werden die Spannungen der Seilstücke *EP*, *FK* durch die Seiten *Ab*, *Ac* der Raute *AbDc* ausgedrückt. Das Dreieck *ADb* ist gleichschenklig und der Winkel *AbD* das Supplement des Winkels $DbE = bAc = 2DAb$; folglich hat man:

$$Ab : AD = \sin. DAb : \sin. 2DAb \text{ oder } 2\sin. DAb : \cos. DAb,$$

und wenn man den gemeinschaftlichen Factor $\sin. DAb$ hinweg läßt und bemerkt, daß die geraden Linien *Ab*, *AD* den Kräften *P*, *R* proportional sind, so erhält man:

$$P : R = 1 : 2\cos. DAb,\ R = 2P\cos. DAb.$$

Diese Formel für das Gleichgewicht der beweglichen Rolle ist dieselbe als die, welche wir für das Gleichgewicht der festen Rolle gefunden haben.

Wenn man aus dem Mittelpuncte *G* der Rolle nach den Berührungspuncten *E*, *F* der Seilstücke *EP*, *FQ*, die Halbmesser *GE*, *GF* und dann die Verbindungslinie *EF* zieht, so sind die Dreiecke *ADb*, *EGF* einander ähnlich, weil ihre Seiten resp. auf einander senkrecht sind und man hat:

$$Ab : AD = GE : EF,$$

$$P : R = GE : EF,\ P = \frac{R \times GE}{EF},$$

d. h. um vermittelst einer beweglichen Rolle einer Last das Gleichgewicht zu halten, muß sich die anzuwendende Kraft zu der Last wie der Halbmesser der Rolle zu der Sehne des von dem Seile umschlungenen Bogens ihres Umfanges verhalten oder mit andern Worten, man erhält diese Kraft, wenn man das Gewicht der Last mit dem Halbmesser der Rolle multiplicirt und das Product durch die Sehne des von dem Seile umschlungenen Bogens dividirt.

Wenn man das Gewicht der Rolle in Rechnung bringen wollte, so brauchte man es bloß zu dem der Last hinzuzufügen.

Bei den Anwendungen der beweglichen Rolle zur Ueberwindung eines Widerstandes, z. B. zum Loßreißen eines Pfahles aus der Erde, oder zum Fortziehen oder Heben einer Last, hängt der Vortheil der Kraft von der Länge des von dem Seile umschlungenen Bogens *EHF* oder seiner Sehne *EF* ab. Wenn der Bogen *EHF* ein Halbkreis ist, so sind die Seilstücke *EP*, *FK* parallel und *EF* ist ein Durchmesser oder das Doppelte des Halbmessers *GE* und in diesem Falle wird der Ausdruck der Kraft:

$$P = \frac{R \times GE}{2GE} = {}^1/_2 R,$$

d. h. sie braucht nur halb so groß zu sein, als das Gewicht der Last und dieses ist der vortheilhafteste Fall, welcher bei einer beweglichen Rolle vorkommen kann. Dagegen ist aber auch der Weg, welchen die Kraft zu durchlaufen hat, doppelt so groß, als der, welchen die an dem Biegel der Rolle aufgehangene Last gleichzeitig durchläuft. Was man also an Kraft gewinnt, verliert man an Zeit und dieser Satz findet bei allen Maschinen statt.

§. 109. Um die Last **Q** mit dem Seile zu heben, welches über die festen Rollen des Mastes *AB* (Fig. 56) geht, kann man das Ende *D* dieses Seiles an dem obern Querstücke befestigen, es dann über die bewegliche Rolle *n* gehen lassen, die Last **Q** an dem Biegel der Rolle befestigen und das Seil, woran die Kraft wirken soll, über die festen Rollen gehen lassen. Bei dieser Einrichtung kann die Kraft eine doppelt so große Last haben, als ohne die bewegliche Rolle, wogegen sie aber auch einen doppelt so großen Weg durchlaufen muß, oder die Geschwindigkeit der Last ist nur halb so groß, als die der Kraft.

Nach dem über die Eigenschaften der festen Rolle Gesagten ist einleuchtend, daß diese Rolle keinen wirklichen Gewinn an Kraft verschaffen, sondern nur ihre Richtung verändern kann. So kann man z. B., statt eine Last unmittelbar von unten nach oben empor zu ziehen, mit Hilfe einer festen Rolle denselben Zweck durch den Zug von oben nach unten erreichen, und wenn man noch eine andere feste Rolle anwendet, welche eine Leitrolle genannt wird, so kann man die Kraft nach horizontaler oder nach einer beliebigen andern Richtung wirken lassen.

In Folge dieser bloßen Veränderung der Richtung der Kraft können die Menschen ihre Kräfte mit weniger Anstrengung anwenden, und wenn es die Umstände gestatten, so kann man statt der Menschen Pferde oder Ochsen anwenden, deren Kraft weniger kostspielig ist.

Aber wenn man die bewegliche Rolle anwendet, so verhält sich die Kraft, welche erforderlich ist, um eine gegebene Last im Gleichgewichte zu erhalten, zu dieser Last, wie der Halbmesser der Rolle zu der Sehne des von dem Seile umschlungenen Bogens ihres Umfanges. Die Kraft muß also größer, gleich, oder kleiner als das Gewicht der Last sein, je nachdem der Halbmesser der Rolle größer, gleich, oder kleiner, als die erwähnte Sehne ist.

110. Wenn man einen starken Widerstand zu überwinden oder eine beträchtliche Last zu heben, aber nur eine mäßige Kraft zu seiner Disposition hat, so muß man eine passende Vorrichtung mit mehreren beweglichen Rollen anwenden.

Es sei **Q** (Fig. 59) eine an dem Biegel der beweglichen Rolle befestigte Last; um diese Rolle sei ein Seil gelegt, welches im Puncte *K* an einem festen Balken *AB* befestigt ist, und an dem andern Ende von einer Kraft **P′** gezogen wird. Statt dieser Kraft *P′* sei eine zweite bewegliche Rolle angebracht, über welche ein Seil geht, welches mit dem einen Ende an dem Puncte *K′* des unbeweglichen Balkens befestigt ist, und an dessen andern Ende eine Zugkraft *P″* wirkt. Statt dieser Zugkraft sei wieder eine dritte bewegliche Rolle angebracht, über welche ein Seil geht, welches mit dem einen Ende in dem Puncte *K″* an dem festen Balken *AB* befestigt ist, während an dem andern Ende desselben eine Zugkraft *P* wirkt. Zur Veränderung der Richtung

der Kraft P kann man eine feste Rolle L anwenden, so daß diese Kraft statt von unten nach oben zu ziehen, von oben nach unten ziehen kann. Die feste oder Leitrolle bewirkt keine Veränderung in der Intensität der Kraft, sondern sie dient nur dazu, ihr die vortheilhafteste Richtung zu geben.

§. 111. Um das Verhältniß der Kraft P zu der Last Q zu finden, wenn das Gleichgewicht stattfindet, wollen wir jede der beweglichen Rollen einzeln betrachten. Da die Kraft P' an dem über die erste bewegliche Rolle gehenden Seile der Last Q das Gleichgewicht hält, so hat man, wenn man von dem Mittelpuncte G dieser Rolle nach den Berührungspuncten E und F die Halbmesser GE, GF und zugleich die Verbindungslinie EF zieht, die Proportion:

$$P' : Q = GE : EF,$$

und wenn man für jede der übrigen beweglichen Rollen dieselbe Construction vornimmt, so erhält man:

$$P'' : P' = G'E' : E'F'$$
$$P : P'' = G''E'' : E''F''.$$

Werden die correspondirenden Glieder dieser Proportionen in einander multiplicirt und die gemeinschaftlichen Factoren des ersten Verhältnisses hinweggelassen, so kommt:

$$P : Q = GE \times G'E' \times G''E'' : EF \times E'F' \times E''F'';$$

d. h. die Kraft verhält sich zur Last, wie das Product aus den Halbmessern aller beweglichen Rollen zu dem Producte der Sehnen der von den Seilen umschlungenen Bogen. Die Kraft P ist daher für dieselbe Last Q am kleinsten, wenn die beweglichen Rollen so eingerichtet sind, daß alle Seile zu einander parallel sind (Fig. 60); denn alsdann wird jede der Sehnen EF, $E'F'$, $E''F''$ dem Durchmesser oder doppelten Halbmesser gleich und die letzte Proportion verwandelt sich in:

$$P : Q = GE \times G'E' \times G''E'' : 2GE \times 2G'E' \times 2G''E''$$
$$= 1 : 2^3 = 1 : 8.$$

Aus diesem Resultate erhellet, daß die Kraft, welche ein gegebenes Gewicht vermittelst 3 beweglicher Rollen im Gleichgewichte zu erhalten vermag, nur $^1/_8$ dieses Gewichtes zu betragen brauchte, wenn die Reibung und Steifigkeit der Seile keinen Widerstand veranlaßten.

Bezeichnet n die Anzahl der wie in Figur 60 eingerichteten beweglichen Rollen, so hat man:

$$P : Q = 1 : 2^n, \quad P = \frac{Q}{2^n}.$$

Wenn z. B. 10 bewegliche Rollen angewandt würden, so wäre nur eine Kraft von 1 Kilogr. erforderlich, um einer Last von 1024 Kilogr. das Gleichgewicht zu halten.

Die auf die Puncte K, K', K'', woran die Seile befestigt sind und auf die Axe der Leitrolle L ausgeübten Druckkräfte lassen sich leicht bestimmen. Zunächst ist leicht einzusehen, daß die Summe aller dieser Druckkräfte der Summe aus dem Gewichte der Last Q und der diesem Gewichte das Gleichgewicht haltenden Kraft P gleich ist.

Die Spannung des Seiles KF oder der Druck auf den Punct K ist $= {}^1/_2\, Q$; auf den Punct K' wird ein Druck $= {}^1/_4\, Q$, auf den Punct K'' ein Druck $= {}^1/_8\, Q$ und endlich wird auf die Axe der festen oder Leitrolle L ein Druck $= 2.\, {}^1/_8\, Q = {}^1/_4\, Q$ ausgeübt, und wenn man alle diese Druckkräfte zusammenaddirt, so hat man:

$$ {}^1/_2\, Q + {}^1/_4\, Q + {}^1/_8\, Q + {}^1/_4\, Q = Q + {}^1/_8\, Q = Q + P. $$

§. 112. Bei einer Verbindung von beweglichen Rollen, wie die in Figur 60 dargestellte, welche zur Ueberwindung eines Hindernisses oder zum Heben einer Last angewandt wird, wird die erforderliche Kraft desto kleiner, je größer die Anzahl der beweglichen Rollen ist; aber wenn man ein Gewicht auf eine gewisse Höhe heben will, so muß der Angriffspunct der Kraft auch einen desto größern Weg durchlaufen, je größer die Anzahl der Rollen ist, so daß man an Zeit verliert, was man an Kraft gewinnt. Bei einer einzigen beweglichen Rolle EHF würde der Angriffspunct der Kraft P' einen Weg von 2 Meter durchlaufen müssen, um die Last Q auf eine Höhe von 1 Meter zu heben; denn wenn man sich das Seil KF als eine unbiegsame gerade Linie denkt und die Kraft P' die Last Q um 1 Meter hebt, so daß der Durchmesser EF der Rolle auf KF senkrecht bleibt, so beträgt die Länge des unter EF liegenden Stückes von KF genau 1 Meter, und wenn sich dieser Theil des Seiles KF um die Rolle wickelt, so ist klar, daß der Angriffspunct der Kraft P' einen Weg von 2 Meter Länge durchlaufen muß, um die Last Q um 1 Meter zu heben. Der Weg, welchen der Angriffspunct der Kraft P' durchläuft, ist also doppelt so groß, als der der Last Q. Aus demselben Grunde muß der Angriffspunct der Kraft P'' einen doppelt so großen Weg durchlaufen, als der der Kraft P', also einen 4mal so großen Raum, als die Last Q, und die Kraft P, welche einen doppelt so großen Weg als P'' durchlaufen muß, durchläuft also einen 8mal größern Raum, als die Last Q.

§. 113. Wenn man mehrere Rollen in demselben Biegel anbringt, so erhält man eine sogenannte Flasche. Figur 61 stellt zwei Flaschen MN und $M'N'$ dar, wovon jede drei Rollen hat und diese beiden Flaschen bilden einen Flaschenzug. An dem Biegel der ersten Flasche befinden sich zwei Ringe K und L, um dieselben daran aufhängen zu können und zugleich befindet sich daran ein Ring I, woran das eine Ende des Seiles befestigt wird, welches beide Flaschen zu einem Flaschenzuge mit einander verbindet, indem es durch die Nuten oder Schnurläufe aller Rollen geht. Die bewegliche Flasche $M'N'$ ist mit zwei Haken versehen, woran die Last Q aufgehangen wird, welche man durch eine Kraft P heben will, die am Ende des Seiles wirkt, welches über die Rolle A der festen Flasche geht. Wir wollen nun die Bedingungen suchen, welche erfüllt werden müssen, damit die Kraft P und die Last Q im Gleichgewichte sind.

Die an dem Seile angebrachte Kraft P bringt eine solche Wirkung hervor, daß alle Seilstücke zwischen der festen und der beweglichen Flasche gleich stark gespannt sind, und zwar ist die Spannung eines jeden Seilstückes der Intensität der Kraft P gleich; denn nach dem in §. 108 über die bewegliche einfache Rolle Gesagten sind die Seilstücke

$C'I$, $C'C$ gleich stark gespannt und dasselbe gilt von den Seilstücken $C'C$ und $B'C$, $B'C$ und $B'B$, u. s. f.

Wir wollen die beiden Axen OX, OY ziehen, wovon die erste horizontal und die zweite vertical ist, und um die Spannungen der Seilstücke parallel zu diesen Axen zu zerlegen, wollen wir auf der Richtung des Seilstückes $C'I$ von dem Puncte aus, wo es die Axe der x trifft, die Länge $nl = t$ zur Darstellung seiner Spannung nehmen, welche, wie wir bewiesen haben, für alle andern Seilstücke dieselbe und der Intensität der Kraft P gleich ist. Construiren wir das Rechteck $lmnk$, dessen Seiten zu den Axen parallel sind, und setzen der Kürze wegen den Winkel $lnm = a$, so gibt das rechtwinklige Dreieck nml:

$$1 : cos.\, a = nl \text{ oder } t : nm = t\, cos.\, a,$$

welches der Ausdruck der verticalen Componente der Spannung des Seiles $C'I$ ist. Die zu der Axe der x parallele Componente brauchen wir nicht zu berechnen, weil in dem Falle des Gleichgewichtes, womit wir uns beschäftigen, alle zu dieser Axe parallelen Componenten sich gegenseitig aufheben.

Zerlegt man ebenso die Spannungen der übrigen Seilstücke und bezeichnet die Winkel, welche sie mit der Verticale bilden, resp. mit a', a'', *etc.*, so werden die verticalen Componenten resp. ausgedrückt durch:

$$t\, cos.\, a',\ t\, cos.\, a'',\ t\, cos.\, a''',\ t\, cos.\, a^{IV},\ t\, cos.\, a^{V}.$$

Die Last Q muß der Summe der verticalen Componenten der Spannungen aller Seilstücke gleich sein, so daß man folgende Gleichung hat:

$$Q = t\,(cos.\, a + cos.\, a' + cos.\, a'' + cos.\, a''' + cos.\, a^{IV} + cos.\, a^{V}),$$

und da die Spannung t der Kraft P gleich ist, so hat man auch folgende Proportion:

$$P : Q = 1 : cos.\, a + cos.\, a' + cos.\, a'' + cos.\, a''' + cos.\, a^{IV} + cos.\, a^{V},$$

d. h. die Kraft verhält sich zur Last, wie sich die Einheit oder der Halbmesser der Tafeln der natürlichen Sinus zur Summe der Cosinus der Winkel verhält, welche die Richtungen der Seilstücke mit der Verticale bilden.

Der Winkel lnm, welchen das Seilstück $C'I$ mit der Verticale bildet, ist das Complement des Winkels lnk, welchen dasselbe Seilstück mit der Axe der x bildet. Es ist also $cos.\, lnm = sin.\, lnk$, woraus folgt, daß man statt der Cosinus der Winkel, welche die Seilstücke mit der Verticale bilden, die Sinus der Winkel nehmen könnte, welche dieselben Seilstücke mit der Axe der x bilden.

§. 114. Wenn die Rollen der beiden Flaschen denselben Durchmesser und in den Biegeln MN, $M'N'$ eine solche Lage haben, daß die Entfernung ihrer Mittelpuncte doppelt so groß ist, als der Durchmesser einer Rolle; so sind alle Seilstücke mit einander parallel, die Winkel a, a', a'', *etc.* sind Null und der Cosinus eines jeden derselben dem Halbmesser oder der Einheit gleich. Bei dieser Einrichtung, welche die vortheilhafteste ist, verwandelt sich die vorhergehende Proportion in:

$$P : Q = 1 : 6,$$

woraus hervorgeht, daß die Spannung jedes Seilstückes oder die Intensität der Kraft $^1/_6$ des Gewichtes der Last beträgt. Das Seil könnte auch an dem Biegel der beweglichen Flasche befestigt sein, wo man alsdann nur 5 Seile hätte und die Kraft $^1/_5$ der Last betrüge.

Der Punct, worin das Seil an dem Biegel der beweglichen Flasche befestigt wird, kann als eine Rolle von sehr kleinem Durchmesser betrachtet werden, so daß die beiden Seilstücke dieser Rolle mit einander zusammenfallen. Zu dem Gewichte der Last Q muß man noch das der beweglichen Flasche hinzufügen, wenn letzteres nicht ohne merklichen Fehler unberücksichtigt bleiben kann. Bezeichnet man dieses Gewicht mit q und die Anzahl der Seilstücke mit n, so hat man die Formel:

$$P = \frac{Q + q}{n},$$

worin folgende Regel enthalten ist: Um die Kraft zu finden, welche vermittelst eines Flaschenzuges einer gegebenen Last das Gleichgewicht halten kann, dividire man die Summe aus dem Gewichte dieser Last und dem der beweglichen Flasche durch die Anzahl der Seile oder Rollen beider Flaschen.

Die horizontalen Flaschenzüge sind sehr wenig im Gebrauch, weil sie sehr voluminös sind; allein ihre Einrichtung eignet sich sehr gut dazu, die Bedingungen zu finden, welche erfüllt werden müssen, damit zwischen der an der beweglichen Flasche aufgehangenen Last und der an dem Seile, welches über die letzte Rolle der festen Flasche geht, angebrachten Kraft das Gleichgewicht stattfindet. Diese Bedingungen sind für alle Arten von Flaschenzügen dieselben, und lassen sich folglich auch leicht auf die verticalen Flaschenzüge, womit wir uns nun beschäftigen wollen, anwenden.

§. 115. Man hat zur Construction der verticalen Flaschenzüge verschiedene Combinationen der Rollen erdacht und eine der einfachsten ist in Figur 62 angegeben. Der Biegel der festen Flasche enthält die beiden über einander liegenden Rollen A und B, indem der Durchmesser der ersten doppelt so groß ist, als der der zweiten. Dieser Biegel läuft an seinem untern Ende in einen Haken I aus, und es befindet sich an seinem obern Theile ein Ring K, um denselben vermittelst eines Hakens oder vermittelst eines Seiles oder einer Kette an dem festen Hindernisse LM aufhängen zu können.

Die beiden Rollen A' und B' der beweglichen Flasche sind denen der festen gleich, aber haben eine umgekehrte Lage. Der Biegel der beweglichen Flasche endigt sich an seinem untern Theile in einen Haken N und an seinem obern Theile befindet sich ein horizontales Querstück RS, welches aus zwei durch Bolzen verbundenen Zweigen besteht.

Das Seil befestigt man an dem Haken der festen Flasche, läßt dasselbe durch das Querstück RS und dann successive über alle Rollen der beweglichen und festen Flasche gehen, wo das Querstück als Leitung der Seile dient. Die Last Q wird an dem Haken N der beweglichen Flasche aufgehangen und die Kraft P, welche dieser Last das Gleichge-

wicht halten soll, wirkt an der Verlängerung des über die Rolle *A* gehenden Seiles.

Bei dieser Einrichtung der Flaschenzüge hat man vier fast parallele Seilstücke; das Gewicht der beweglichen Flasche kann unberücksichtigt bleiben und nach dem über die horizontalen Flaschenzüge Gesagten wird das Gleichgewicht zwischen der Kraft *P* und der Last *Q* durch folgende Formel ausgedrückt:

$$P = \frac{Q}{4},$$

woraus hervorgeht, daß eine Kraft, welche dem vierten Theile der Last gleich ist, dieser das Gleichgewicht zu halten vermögte, wenn nicht ein Theil dieser Kraft zur Ueberwindung der von der Reibung und von der Steifigkeit der Seile herrührenden Widerstände verbraucht würde.

Man könnte in jeder Flasche noch eine oder mehrere Rollen hinzufügen, und wenn man bemerkt, daß die Durchmesser aller in demselben Biegel enthaltenen Rollen nach einer arithmetischen Progression zunehmen müssen, deren Differenz dem Durchmesser der kleinsten Rolle gleich ist, damit die Seilstücke zu einander parallel werden, so würde der Flaschenzug auf diese Weise verstärkt. Aber alsdann müßte man die Biegel verlängern und die Flaschenzüge würden in verticaler Richtung eine solche Länge bekommen, daß man sie in vielen Fällen gar nicht anwenden könnte.

§. 116. Um die Unannehmlichkeit wegen der zu großen Länge der Biegel zu vermeiden, hat man Flaschenzüge mit Rollen von demselben Durchmesser construirt, worin die Rollen derselben Flasche an derselben Axe sitzen. Die Projectionen zweier auf diese Weise eingerichteten Flaschen sind in Figur **63** und **64** angegeben. Der Biegel einer jeden enthält drei Rollen von gleichen Durchmessern; die Rollen der obern Flasche sitzen an der Welle *DE* und die der untern oder beweglichen Flasche an der Axe *D′E′*.

Das Seil wird an dem Biegel der obern Flasche befestigt, dann über die erste Rolle der beweglichen Flasche geleitet, hierauf über die correspondirende Rolle der festen Flasche u. s. f., bis es über alle Rollen beider Flaschen geht. Alsdann wird die obere Flasche vermittelst eines Ringes *L* ihres Biegels an einem festen Gegenstande befestigt, die zu hebende Last an dem Haken *N* der beweglichen Flasche aufgehangen und die Zugkraft wirkt nach der Verlängerung des über die Rollen gehenden Seiles. In diesem letzten Flaschenzuge können die Seilstücke zu einander nicht parallel sein; allein ihre gegenseitigen Neigungen sind sehr gering und werden desto kleiner, je größer die gegenseitige Entfernung der Flaschen ist. Man kann daher diese kleinen gegenseitigen Neigungen der Seilstücke unberücksichtigt lassen, und diese Seilstücke als die Richtungen ebenso vieler gleicher paralleler Kräfte betrachten. Die Bedingungen des Gleichgewichtes sind dieselben, als für die Flaschenzüge der ersten Art (§. **114**), und folglich muß die Kraft dem Quotienten aus dem Gewichte der Last und der Anzahl der Seile oder der Rollen beider Flaschen gleich sein. In dem vorhinbetrachteten Flaschenzuge hat man sechs Seilstücke, und folglich beträgt

der theoretische Werth der Kraft ein Sechstel der Last. Wenn man die Anzahl der Rollen in beiden Flaschen vergrößerte, so könnte die Kraft noch geringer sein, allein dieser Vortheil würde durch die zu überwindenden Widerstände und wegen der Zunahme des zu durchlaufenden Raumes bald compensirt werden, und die Erfahrung hat gelehrt, daß es nicht vortheilhaft ist, Flaschen von mehr als vier Rollen anzuwenden und in den gewöhnlichen Fällen nur zwei oder drei.

Von der Radwelle.

§. 117. Die Radwelle besteht aus einem Cylinder *abcd* (Fig. 65), an dessen beiden Grundflächen sich zwei andere Cylinder *A* und *B* von einem kleinern Durchmesser befinden, und welche Zapfen genannt werden. Der Cylinder geht durch den Mittelpunct *C* des Rades *CIMK*, womit er fest verbunden ist, so daß die Axen des Rades, des Cylinders und seiner Zapfen eine und dieselbe gerade Linie bilden.

Die Radwelle ruhet auf einem Gestelle, welches dem Wesentlichen nach aus zwei verticalen Pfeilern besteht und so eingerichtet ist, daß die Axe des Cylinders eine horizontale Richtung hat und seine Zapfen können sich in Einschnitten oder Löchern, welche sich am obern Ende der verticalen Pfeiler befinden, frei bewegen. Dieses Gestell ist in der Figur nicht angegeben, sondern sie enthält bloß die Theile der Maschine, welche zur Auseinandersetzung ihrer Theorie erforderlich sind.

Um die Radwelle in Bewegung zu setzen, bringt man an einem Puncte der Oberfläche des Cylinders einen Haken an, woran das eine Ende eines Seiles befestigt wirb, während das andere Ende an der zu hebenden Last *Q* befestigt wird. Wir wollen annehmen, daß ein anderes Seil mit einem Ende an einem Puncte des Radumfanges befestigt sei, welcher, wie bei einer Rolle, mit einer Nute versehen ist, worin sich wenigstens so viele Windungen des Seiles befinden, als das Rad Umdrehungen machen muß, um die Last auf die gewünschte Höhe heben zu können. Diese Einrichtung der Radwelle hat in der Praxis ihre Nachtheile; allein sie gibt das Mittel an die Hand, dasselbe theoretische Resultat, als das, welches man durch die gebräuchlichen und weiter unten anzugebenden Verfahrungsarten erhält, auf die einfachste Weise zu finden. Wenn man nun eine Kraft *P* zur Abwickelung des Seiles des Rades anwendet, so ist die Richtung *MP* desselben, welche in der Ebene des Rades liegt, eine Tangente an seinem Umfange, die Kraft drehet die Radwelle und das an der Last *Q* befestigte Seil wickelt sich auf den Cylinder, wodurch diese Last gehoben wird.

§. 118. Aufg. Das Verhältniß der nach der Tangente *MP* am Umfange des Rades wirkenden Kraft *P* zu dem Gewichte der an dem Seile *NQ*, welches sich auf den Cylinder rollt, aufgehangene Last zu bestimmen, wenn die Kraft und die Last im Gleichgewichte sind. — Aufl. Das an der Last befestigte Seil *NQ* berührt die Oberfläche des Cylinders im Puncte *N* und wir wollen durch diesen Punct parallel zu der Ebene des Rades eine durch das Seil gehende Ebene legen, welche in dem Cylinder

einen Durchschnitt bildet, dessen Mittelpunct in dem Puncte D liegt, wo diese Ebene die Axe des Cylinders trifft, so ist der nach dem Berührungspuncte gezogene Halbmesser DN horizontal. Durch den Mittelpunct C des Rades wollen wir nach der Oberfläche des Cylinders einen andern zu DN parallelen Halbmesser CL ziehen, und zwar nach entgegengesetztem Sinne, so daß, wenn der erste Halbmesser hinter der Axe liegt, der zweite vor derselben liegt. Im Endpuncte L des Halbmessers CL wollen wir die unbegrenzte Verticale FLF' ziehen, welche zu NQ parallel ist, in dem Puncte L zwei Kräfte F und F', wovon jede dem Gewichte der Last Q gleich ist und welche nach den entgegengesetzten Richtungen LF, LF' wirken, anbringen, so daß $Q = F = -F'$ ist, wodurch an dem Systeme nichts geändert wird, weil sich diese beiden Kräfte gegenseitig aufheben.

Wir wollen die gerade Linie LN ziehen, welche die Axe des Cylinders im Puncte E durchschneidet. Da die beiden Halbmesser DN und CL gleich und parallel sind, so können die geraden Linien CD und LN als die beiden Diagonalen eines Parallelogrammes betrachtet werden, und folglich theilen sich diese Linien im Puncte E gegenseitig in zwei gleiche Theile.

Die beiden gleichen und parallelen Kräfte Q und F haben eine Resultante $R = Q + F = 2Q$, welche durch den Widerstand der Unterstützungspuncte aufgehoben wird, weil ihr Angriffspunct E, die Mitte von LN, auf der Axe des Cylinders liegt, und es bleiben also nur die beiden Kräfte P und F' übrig. Den Halbmesser MC des Rades und den Halbmesser CL des Cylinders kann man als einen Winkelhebel MLC betrachten, dessen Unterstützungspunct C in der Axe der Radwelle liegt. Da die Richtungen MP und LF' der an dem Hebel MCL wirkenden Kräfte P und F' resp. auf den Armen MC und CL dieses Hebels senkrecht sind, so hat man (§. 21):

$$P : F = CL : CM;$$

aber da $F' = Q$ und $CL = DN$ ist, so verwandelt sich diese Proportion in:

$$P : Q = DN : CM;$$

d. h. wenn eine Kraft einer Last vermittelst der Radwelle das Gleichgewicht hält, so verhält sich die Kraft zu dem Gewichte der Last, wie der Halbmesser der Welle zu dem des Rades.

Am vortheilhaftesten ist es, wenn die auf das Rad wirkende Kraft eine solche Richtung hat, daß sie den Umfang des Rades berührt; denn wenn die im Puncte M des Radumfanges angebrachte Kraft nach einer andern Richtung, als nach der der Tangente MP wirkte, so würde die Richtung dieser Kraft die Oberfläche des Rades durchschneiden und das aus dem Mittelpuncte C auf diese neue Richtung gefällte Perpendikel oder der Hebelarm der Kraft kleiner sein, als der Halbmesser CM, und folglich müßte die nach dieser neuen Richtung wirkende Kraft größer sein, als die nach der Tangente MP wirkende Kraft P.

§. 119. Betrachten wir die Kräfte des Systemes wieder in ihrem ursprünglichen Zustande und nehmen an, daß die durch das Seil NQ

gelegte Ebene, welche in dem Cylinder einen auf der Axe senkrechten Durchschnitt bestimmt, parallel zu sich selbst verrückt wird, bis sie mit der durch die Mitte des Rades gelegten Ebene zusammenfällt (Fig. 66); so fällt der Halbmesser *DN* der Welle mit *CM* zusammen und man kann ***P***, ***Q*** als zwei Kräfte betrachten, welche in den Endpuncten des Winkelhebels *MCN* nach den auf seinen Armen senkrechten Richtungen *MP*, *NQ* wirken, so daß sich die Kräfte ***P*** und ***Q*** im Falle des Gleichgewichtes umgekehrt wie ihre Hebelarme verhalten und man folglich die Proportion hat:

$$P : Q = CN : CM,$$

welche mit der bereits früher gefundenen übereinstimmt, woraus folgt, daß sich bei der Radwelle die Wirkung der Kraft bis zu der zu hebenden Last gerade so fortpflanzt, wie wenn diese Kraft und Last in derselben Ebene wirkten.

Aus dem vorhin über die Bedingungen des Gleichgewichtes der Radwelle Bewiesenen sieht man, daß diese Maschine im Grunde auf den Hebel der ersten Art zurück kommt, woran noch einige Nebenvorrichtungen angebracht sind, um Lasten auf eine große Höhe heben zu können, was mit dem bloßen Hebel nicht möglich sein würde.

§. 120. Man kann die Radwelle auf mehrere verschiedene Arten einrichten und z. B. statt des Rades hölzerne oder eiserne Stangen oder Hebel anwenden, welche man in die an den Enden der Welle befindlichen Löcher senkrecht auf ihre Axe steckt. Diese Einrichtung der Radwelle wird häufiger angewandt, als die mit dem Rade, z. B. bei mehreren Fuhrwerken und insbesondere bei den Karren, welche zum Transporte der Kaufgüter dienen. Desselben Mittels bedienen sich auch die Maurer und Zimmerleute, um die Steine, Hölzer und übrigen Baumaterialien in die Höhe zu heben.

Wenn die Lasten, welche man heben will, nur eine mäßige Kraft erfordern, so wendet man an jedem Ende der Welle eine Kurbel an, vermittelst welcher Menschen die Welle drehen.

Die Regel, welche wir zur Berechnung des Gleichgewichtes der eigentlichen Radwelle, wo die Kraft an dem Umfange des großen Rades wirkt, gefunden haben, gilt auch bei allen übrigen Einrichtungen dieser Maschine hinsichtlich der Wirkungsart der Kraft, und man braucht statt des Halbmessers des Rades, welcher das vierte Glied der allgemeinen Proportion (§. 119) bildet, nur den Abstand der Axe der Welle von dem Angriffspuncte der Kraft, d. h. die Länge des Hebel- oder die des Kurbelarmes zu setzen.

§. 121. Aufg. Die Druckkräfte zu finden, welche die Zapfen *A* und *B* auf ihre Lager ausüben, wenn die an der Radwelle angebrachten Kräfte im Gleichgewichte sind. — Aufl. Um diese Druckkräfte zu finden, muß man jede der auf die Radwelle wirkenden Kräfte in zwei andere so zerlegen, daß die eine Componente auf den Zapfen *A* und die andere auf den Zapfen *B* wirkt. Statt des Gewichtes der Last ***Q*** ist eine im Puncte *E* der Axe der Welle angebrachte Kraft $R = 2Q$ und eine im Puncte *L* nach der Richtung *LF'*, welche der der Schwere entgegengesetzt ist, wirkende Kraft $F' = Q$ gesetzt. Wenn die Richtungen dieser Kräfte ***P*** und *F'* (Fig. 66) verlängert werden, so durchschneiden sie sich im Puncte *g*.

Es seien *gh* und *ge* die geraden Linien, welche diese Kräfte darstellen, so wird ihre Resultante durch die Diagonale *fg* des Parallelogrammes *gefh* ausgedrückt und die Verlängerung dieser Diagonale muß durch den Mittelpunct *C* des Rades gehen. Wir wollen diesen Punct zum Angriffspuncte der Resultante der Kräfte *P* und *F'* nehmen, und diese Resultante in zwei nach den zu *MP* und *LF'* (Fig. 65 und 66) parallelen Richtungen *CP'* und *CF''* wirkende Kräfte zerlegen; so haben wir statt der beiden Kräfte *P* und *Q*, welche in den Puncten *M* und *N* angebracht waren, die in dem Puncte *E* der festen Axe angebrachte Kraft $R = 2Q$ und die in dem Puncte *C* angebrachten beiden Kräfte $P' = P$ und $F'' = Q$, und es kommt nun bloß noch darauf an, jede dieser beiden Kräfte in zwei andere zu zerlegen, deren Richtungen zu den ihrigen parallel und welche in den Puncten angebracht sind, wo die Zapfen *A* und *B* auf ihre Lager drücken.

Zur Vereinfachung der Rechnungen wollen wir annehmen, daß die Kraft *P'* oder *P* nach der Richtung der Verticale wirkt, d. h. wir wollen diese Kraft als ein Gewicht betrachten, so reduciren sich die beiden im Puncte *C* angebrachten und nach entgegengesetztem Sinne wirkenden Kräfte *P* und *Q* auf eine einzige Kraft $Q - P$, welche nach der Richtung *CF''* der größern wirkt.

Wenn man die im Puncte *E* der Axe der Welle angebrachte Kraft $R = 2Q$ in zwei andere zu ihr parallele Kräfte *U* und *V* zerlegt, wovon die erste auf den Zapfen *A* und die zweite auf den Zapfen *B* wirkt, so hat man:

$$AB : BE = 2Q : U.$$

Nun ist aber:

$$BE = BD - DE = BD - \tfrac{1}{2}DC = BD - \tfrac{1}{2}(BD - BC)$$
$$= \tfrac{1}{2}(BD + BC),$$

und wenn man diesen Werth von *BE* in die vorhergehende Proportion substituirt, so verwandelt sie sich in:

$$AB : \tfrac{1}{2}(BD + BC) = 2Q : U = \frac{(BD + BC).\,Q}{AB}.$$

Die andere Componente wird durch die Proportion:

$$AB : AE = 2Q : V$$

bestimmt, worin:

$$AE = AC - CE = AC - \tfrac{1}{2}DC = AC - \tfrac{1}{2}(AC - AD)$$
$$= \tfrac{1}{2}(AC + AD)$$

ist, und wenn man diesen Werth für *AE* substituirt, so erhält man:

$$AB : \tfrac{1}{2}(AC + AD) = 2Q : V = \frac{(AC + AD).\,Q}{AB}.$$

Die Componenten *U'* und *V'* der auf den Punct *C* wirkenden Kraft $Q - P$ findet man durch die beiden folgenden Proportionen:

$$AB : BC = Q - P : U' = \frac{BC.\,(Q - P)}{AB},$$

$$AB : AC = Q - P : V' = \frac{AC.\,(Q - P)}{AB}.$$

Es sei X die Resultante aus den Kräften, welche wir eben auf den Zapfen A verlegt haben und Y die Resultante der auf den Zapfen B wirkenden Kräfte, so hat man, wenn man bemerkt, daß die Componenten der Kraft $Q - P$ nach einem der Schwere entgegengesetzten Sinne wirken, zur Berechnung der auf die Zapfenlager ausgeübten Druckkräfte die folgenden Formeln:

$$X = U - U' = \frac{(BD + BC).\,Q - BC\,(Q - P)}{AB}$$

$$= \frac{BD \times Q + BC \times P}{AB},$$

$$Y = V - V' = \frac{(AC + AD).\,Q - AC\,(Q - P)}{AB}$$

$$= \frac{AD \times Q + AC \times P}{AB},$$

welche sich auf folgende Weise in Worten ausdrücken lassen. Der Druck eines Zapfens auf sein Lager ist gleich dem Quotienten aus der Summe der Producte der Last und der Kraft und den Theilen der Axe, welche zwischen dem Angriffspuncte jeder dieser Kräfte und dem andern Zapfen liegen und aus der Länge der Axe.

§. 122. Um die Gesammtdruckkräfte auf die Zapfenlager zu erhalten, muß man zu den vorhergehenden Ausdrücken noch die von dem Gewichte der Radwelle, welches man als eine an ihrem Schwerpuncte angebrachte verticale Kraft betrachten kann, herrührenden Druckkräfte hinzufügen; allein es wird leichter sein, das Gewicht der Welle und das des Rades besonders zu berechnen.

Es sei Q' das Gewicht der Welle, welches man als eine verticale Kraft betrachten kann, deren Angriffspunct in der Mitte der Axe AB liegt, und von deren auf die Zapfen AB wirkenden Componenten jede $= {}^1/_2\,Q'$ ist.

Ferner sei Q'' das an dem Schwerpuncte G des Rades angebrachte Gewicht desselben, so sind dessen auf die Zapfen A und B wirkenden beiden Componenten $\frac{BC \times Q''}{AB}$ und $\frac{AC \times Q''}{AB}$.

Addirt man nun $\frac{BC \times Q''}{AB} + {}^1/_2\,Q'$ zu dem Werthe von X, und $\frac{AC \times Q''}{AB} + {}^1/_2\,Q''$ zu dem Werthe von Y; so verwandeln sich die Formeln für die Druckkräfte auf die Zapfenlager in:

$$X = \frac{BD \times Q + BC.\,(P + Q'')}{AB} + {}^1/_2\,Q',$$

$$Y = \frac{AD \times Q + AC.\,(P + Q'')}{AB} + {}^1/_2\,Q'.$$

Diese Formeln enthalten die Größen BD und AD, welche nicht constant sind, weil sich die Lage des Punctes D bei jeder Windung des Seiles um die Welle ändert.

Wenn man die beiden vorhergehenden Gleichungen zusammenaddirt, so erhält man:

$$X + Y = Q + P + Q'' + Q',$$

d. h. die Summe der Druckkräfte auf die beiden Zapfenlager ist gleich der Summe aus den auf die Radwelle wirkenden Kräften und ihrem Gewichte.

§. 123. Wir haben vorausgesetzt, daß nur eine einzige Kraft P, welche in tangentialer Richtung an dem Rade wirkt, der Last Q das Gleichgewicht hält, welche an dem sich auf die Welle wickelnden Seile befestigt ist, und wir haben die Proportion gefunden:

$$P : Q = DN : CM,$$

woraus folgt:

$$CM \times P = DN \times Q.$$

Der erste Theil dieser Gleichung ist das Moment der Kraft und der zweite drückt das Moment der Last aus. Wenn also zwei Kräfte an der Radwelle im Gleichgewichte sind, so sind die Momente dieser Kräfte einander gleich, und wenn die Last durch eine beliebige Anzahl an der Radwelle angebrachter Kräfte im Gleichgewichte gehalten würde, so wäre die Summe der Momente aller dieser Kräfte dem Momente der Last gleich.

Die bei der Radwelle angewandten Seile haben so große Durchmesser, daß man die bei der Berechnung des Verhältnisses der Kraft zur Last in Betracht ziehen muß, wenn zwischen diesen beiden Kräften das Gleichgewicht stattfindet. Betrachten wir bloß das Seilstück NQ, woran dir Last Q befestigt ist, und welches sich auf die Welle wickelt; so kann man annehmen, daß diese Last an der Axe des Seiles aufgehangen ist, deren Entfernung von der Oberfläche der Welle dem Halbmesser des Seiles gleich ist. Man muß also in der Proportion:

$$P : Q = DN : CM$$

statt des Halbmessers DN der Welle, $DN +$ dem Halbmesser des Seiles nehmen, so daß also zum Gleichgewichte eine größere Kraft erforderlich ist.

Von der Erdwinde.

§. 124. Eine Erdwinde ist eine Radwelle, deren Welle $abcd$ (Fig. 67) vertical steht. Diese Welle ist in einem Gestelle $DEAFF'E'$ errichtet, indem der untere Zapfen B der Welle frei in einem in der Mitte eines untern Querbalkens befindlichen Loche beweglich ist und der obere Zapfen A von einem größern Durchmesser, als der des Zapfens B durch einen halbkreisförmigen Einschnitt, gegen welchen er sich nach der Richtung der Last stemmt, und welcher sich in einem andern Querbalken befindet, festgehalten wird. Auf der Verlängerung des Zapfens A ist ein Parallelepipedum oder ein Prisma efh angebracht, welches den Kopf der Erdwinde bildet. Dieser Kopf ist nach zwei aufeinander senkrechten Richtungen mit zwei übereinander liegenden viereckigen Löchern durchbrochen, durch welche Stangen oder Hebel gesteckt

werden, vermittelst welcher man die Welle dreht. Dieser Kopf ist mit zwei eisernen Bändern beschlagen, wovon das eine über und das andere unter den erwähnten Löchern liegt, damit derselbe dem Drucke widerstehen kann, welcher durch die auf die Hebel wirkenden Kräfte hervorgerufen wird.

Man kann die Erdwinde leicht transportiren und ihr eine schickliche Lage geben, um sie zum Transporte sehr schwerer Lasten auf einem horizontalen Boden oder auf geneigten Ebenen anwenden zu können; aber in allen diesen Fällen muß ihr Gestell gehörig befestigt sein, und das Mittel, welches man gewöhnlich zu diesem Zwecke anwendet, besteht darin, daß man einen Pfahl *K* in den Boden fest einsetzt, woran man alsdann das Gestell mit einem Seile befestigt.

Wenn das Gewicht der zu transportirenden Last nicht sehr groß ist, so bringt man sie mit Hebeln auf Rollen und legt um diese Last ein Seil, woran man das eine Ende des Seiles befestigt, welches sich auf die Welle der Erdwinde aufwickeln muß.

Um die Erdwinde in Thätigkeit zu setzen, muß man zunächst das Seil an der Welle befestigen, indem man mit diesem Seile drei Windungen um sich selbst macht, so daß jede Windung einen Kreis von etwas größern Durchmesser als der der Welle bildet. Diese drei concentrischen Windungen legt man auf das Loch, worin der Zapfen *B* zu stehn kommt, worauf man die Welle in das Gestell stellt und ein auf der Erde befindlicher Mensch zieht in *I* an dem Seile auf der der Last entgegengesetzten Seite, während andere Menschen ihre Kräfte auf die Enden der Hebel ausüben, um die Welle herumzudrehen. So wie sich das Seil auf die Welle wickelt und die Last gegen die Erdwinde zu fortrückt, wickelt der nach entgegengesetztem Sinne an dem andern Ende des Seiles ziehende Arbeiter dasselbe immer mehr von der Welle ab, und er kann diese Arbeit ohne zu große Anstrengung fortsetzen. Dieser Arbeiter übt zwar nur eine geringe Spannung auf das Seil aus; allein diese Spannung bringt in Verbindung mit der Reibung der drei Windungen des Seiles doch einen sehr merklichen Widerstand hervor.

§. 125. Die Bedingungen des Gleichgewichtes der Erdwinde sind dieselben, als die der Radwelle; denn diese beiden Maschinen beruhen auf demselben Principe und die Proportion, welche wir für das Gleichgewicht der zweiten gefunden haben, ist unmittelbar auch auf die erste anwendbar. Wir wollen annehmen, daß die auf die Hebel wirkenden vier Kräfte P, P', P'' und P''' einander gleich sind, daß die Richtung einer jeden horizontal und auf ihrem Hebelarme senkrecht ist, und daß die Länge eines jeden dieser vier Hebelarme gleich R ist; so haben wir, wenn r den Halbmesser der Welle *abcd* bezeichnet, auf welche sich das an der zu transportirenden Last Q befestigte Seil aufwickelt (§. 118):

$$4P : Q = r : R,\ R \times 4P = r \times Q,$$

folglich:

$$4P = \frac{r}{R} \times Q.$$

Diese Formel zeigt, daß, wenn in der Erdwinde das Gleichgewicht stattfindet, die Summe der auf die Hebel wirkenden Kräfte dem Producte aus dem Gewichte der Last und dem Verhältnisse des Halbmessers

der Welle zu der Länge eines der Hebelarme, woran diese Kräfte wirken und welche als gleich lang vorausgesetzt werden, gleich ist. Die Länge des Hebels ist nämlich die Entfernung der Axe der Welle von dem Angriffspuncte der Kraft. Wenn die an jedem Hebel angebrachte Kraft auf mehrere Puncte desselben wirkt, und z. B. jeder Hebel durch zwei Menschen fortgeschoben wird, so nimmt man die mittlere Entfernung der Axe der Welle von den vier Puncten, wo die Hände dieser beiden Menschen angreifen, für den Werth von *R*. Wenn man für die Buchstaben Zahlen substituirt, um die in der Formel angedeuteten Rechnungen zu verrichten, so muß man bemerken, daß der Halbmesser des Seiles zu dem Halbmesser *r* der Welle addirt werden muß, weil der Widerstand der Last als nach der Axe des Seiles wirkend betrachtet werden kann.

Bei der in Figur 67 perspectivisch dargestellten Erdwinde besteht jeder der Schenkel *DEAF*, *E'F'* aus einem gekrümmten Stücke Holz, und diese Form wird gewöhnlich zu Paris und insbesondere in den Häfen der Seine bei dem Abladen großer Steine und anderer auf den Schiffen transportirter schwerer Lasten angewandt. Man construirt auch Erdwinden, deren Gestelle nur gerade Stücke enthalten, wie die, wovon in Figur 68 und 69 zwei Projectionen angegeben sind.

§. 126. Bei den gewöhnlichen Anwendungen der Erdwinde ist die Last gegen die Mitte ihrer Höhe parallel zu ihrer Grundfläche mit einem Seile umgeben, an welches man, wie aus Figur 67 zu ersehen ist, das Seil knüpft, welches sich auf die Welle aufwickelt. Aber wenn die Last aus einer Masse besteht, deren Widerstand oder Festigkeit beträchtlich genug ist, um einen großen Druck vertragen zu können, wie z. B. bei einem Block Marmor; so kann man statt des um die Last gelegten Seiles eine Verbindung von mehreren Eisenstücken anwenden, welche eine Vorrichtung bilden, wovon in Figur 69^{a} und 69$^{a'}$ der Grund- und Aufriß angegeben ist.

Um diesen Mechanismus anzuwenden, macht man zunächst in den Block an der Stelle, wo die Kraft angebracht werden soll, ein Loch von 4 Zoll Breite, 3 Zoll Höhe und ungefähr 5 Zoll Tiefe, indem die Breite des Bodens größer ist, als die der Oeffnung, so daß dieses Loch die Form eines vierseitigen Prismas hat, dessen beide Grundflächen gleiche Trapeze sind. In dieses Loch bringt man die beiden Stücke *b*, *b'*, indem man sie gegen die Seitenwände stützt und den Zwischenraum mit Keilen *c*, *c*, *c* ausfüllt, wodurch man einen Schwalbenschwanz erhält, welcher der Zugkraft widersteht, und woran man das Seil, welches sich auf die Welle der Erdwinde wickelt, vermittelst eines S förmigen Hakens, wie in Figur 69, oder unmittelbar an dem gekrümmten Stücke *d* befestigt, welches ein Ohr bildet, wovon die Haken der beiden Schenkel die vorspringenden Theile *e*, *e* des durch den äußern Theil des Schwalbenschwanzes gehenden Bolzen umfaßt.

Wenn man vermittelst der Erdwinde eine sehr schwere Last transportiren will, so kann man sich nicht, wie in Figur 67 angegeben ist, der Rollen bedienen, weil sie entweder zerdrückt, oder wenigstens in den Boden gedrückt würden, und um diese Nachtheile zu vermeiden, legt man die Last auf zwei starke Bohlen, welche auf andern in die

Quer gelegten und mit Seife bestrichenen Brettern fortgleiten, wie in Figur 69 angegeben ist.

§. 127. Wir haben schon bemerkt, daß, je mehr sich das an der Last befestigte Seil auf die Welle der Erdwinde wickelt, der an dem andern Ende ziehende Arbeiter dieses Seil desto mehr abwickelt, so daß dasselbe immer dieselbe Anzahl von Windungen auf der Welle bildet, aber deren ganze Länge successive auf- oder abwärts durchläuft, je nachdem der sich aufwickelnde Theil des Seiles über, oder unter dem sich abwickelnden Theile desselben liegt. Wenn der Theil des Seiles, welcher sich auf die Welle aufwickelt, bis zu einer ihrer Grundflächen, z. B. bis zu der obern Grundfläche gelangt ist, so muß man mit der Drehung der Welle aufhören und sie etwas nach entgegengesetztem Sinne drehen, damit das Seil auf derselben lose wird und man dasselbe herabschieben kann, worauf man die Drehung der Welle wieder wie zuvor fortsetzt. Da diese Operation oft wiederholt werden muß, so geht dadurch viel Zeit verloren, und wenn die Erdwinde zum Heben einer Last in verticaler Richtung oder auf einer geneigten Ebene angewandt wird, so muß man diese Last jedesmal festhalten, zu welchem Zwecke man sich gewöhnlich eines an einem festen Puncte befestigten und um das Seil, welches an der Last befestigt ist, gewickelten Hilfsseiles bedient.

§. 128. Ungeachtet dieser Unvollkommenheiten wird die eben beschriebene Erd- oder Schiffswinde doch häufig angewandt, weil sie sich mit wenigen Kosten herstellen läßt und ein sehr einfaches Mittel zur Verstärkung der Kraft bei dem Transporte schwerer Lasten darbietet. Jedoch ist zu bemerken, daß es vortheilhaft ist, eine hinreichend starke Kraft unmittelbar auf die Last wirken zu lassen, wenn es die Umstände gestatten und der zu durchlaufende Weg etwas beträchtlich ist, wie man aus den folgenden von Rondelet in seiner Kunst zu bauen angeführten Beispielen sieht.

Die beiden großen Steine, welche die Ecken des Giebels der neuen Kirche St. Genoveva oder des jetzigen französischen Pantheons bilden, wogen jeder 53,000 Pfund und sie wurden von dem Invalidenhafen durch die Boulevards nach St. Genoveva transportirt. Der eine dieser Steine wurde auf einen Wagen gelegt, um ihn um diese Länge von ungefähr 2600 Toisen zu transportiren, wobei man zwei Erdwinden anwandte, wovon jede durch 8 Menschen gedrehet wurde, welche sich alle 2 Stunden ablösten. Dieser Transport geschah in 11 Tagen und 7 Nächten und die täglichen Kosten der Arbeiter betrugen 768 Livres. Der andere Stein wurde auf denselben Wagen gelegt und von 63 Pferden um dieselbe Länge transportirt, indem dieser Transport 3 Stunden dauerte und die Kosten desselben 425 Livres oder 419 Fr. 75 Cent. betrugen.

Bei dem Transporte des ersten Steines wurde derselbe durch die an den Erdwinden arbeitenden Menschen täglich um $\frac{2600}{18} = 144\ ^1/_2$ Toisen fortbewegt, und wenn man die Kosten der Geräthschaften zu der Summe der Arbeitslöhne von 758 Fr. 52 Cent. addirt, so betragen die Transportkosten dieses ersten Steines fast doppelt so viel, als die des zweiten.

§. 129. Die Statue Ludwigs XIII. zu Pferde, welche sich mitten auf dem Königsplatze zu Paris befand, wurde während der Revolution zerstört und man hatte an derselben Stelle ein mit Kastanienbäumen umgebenes Bassin angelegt, in dessen Mitte ein Wasserstrahl emporsprang, welcher eine sehr schöne Garbe bildete. Aber nach der Zurückkehr der Bourbons wollte man successive die Monumente der alten Monarchie wiederherstellen und die französische Regierung ließ daher 1824 einen Marmorblock kommen, aus welchem eine neue Statue Ludwigs XIII. zu Pferde gehauen und an der Stelle der alten aufgestellt werden sollte. Nach einem Artikel in dem Moniteur vom 1. December 1824 ist dieser Marmorblock, welcher aus dem Hafen von Greve kam, der größte, welcher je aus den Carrarischen Bergwerken gezogen ist; er hatte 14 Fuß Höhe, 14 Fuß Breite und 5 Fuß Dicke und sein Gewicht betrug 110,000 Pfund. Diese Maaße stimmen nicht genau mit denen überein, welche wir durch eigene Messung gefunden und wonach wir das Gewicht des Marmorblockes auf folgende Art näherungsweise berechnet haben.

Man konnte diesen Marmorblock als aus zwei Theilen bestehend betrachten, wovon der eine ein rechtwinkliges Parallelepipedum war, welches eine Länge von 13 Fuß, eine Breite von 6 Fuß 6 Zoll und eine Dicke von 5 Fuß hatte, während der andere obere Theil eine unregelmäßige Form und eine Höhe von ungefähr 8 Fuß hatte. Der Inhalt des rechtwinkligen Parallelepipedum ist also gleich $13 \times 6,5 \times 5 = 422,5$ Cubikf., und wenn wir annehmen, daß das Volumen des obern unregelmäßigen Theiles $^2/_5$ oder $^4/_{10}$ von dem des Parallelepipedums beträgt, so ist das Volumen des ganzen Marmorblockes $= 422,5 + 0,4 \times 422,5 = 591,5$ Cubikf. Der Cubikfuß Carrarischer Marmor wiegt 190,176 Pfund, und wenn man diese letzte Zahl mit der multiplicirt, welche den körperlichen Inhalt des Marmorblockes in Cubikfußen ausdrückt, so findet man das Gewicht desselben $= 112489$ Pfund.

Nachdem man diesen Marmorblock aus dem Schiffe abgeladen hatte, worin er bis zu dem Hafen von Greve transportirt war, legte man denselben auf zwei Bohlen, welche eine Art von Schleife bildeten und auf 3 oder 4 Bohlen ruheten, welche an den Berührungsstellen mit Seife bestrichen waren, und der Marmorblock wurde auf den Bohlen mit einem Seile befestigt. In den untern parallelepipedischen Theil desselben wurden zwei Löcher gemacht, worin ähnliche Schwalbenschwänze, wie die weiter oben beschriebenen angebracht werden sollten (Fig. 69^z und $69'$), um daran die Transportgeräthschaften befestigen zu können. Diese Geräthschaften bestanden aus zwei Erdwinden, wovon jede durch 8 Menschen gedreht wurde; aber damit diese Kraft, eine so schwere Last zu bewegen, im Stande war, hatte man an der einen Winde zwei bewegliche Rollen hintereinander an dem entsprechenden Schwalbenschwanze und eine feste Rolle an der Winde selbst angebracht, indem das Seil, welches an dem Gestelle der Winde befestigt war, über die unmittelbar an dem Schwalbenschwanze befestigte bewegliche Rolle, dann über die feste Rolle, hierauf über die zweite bewegliche Rolle ging und sich endlich auf die Welle der Winde aufwickelte. An der zweiten Winde befand sich nur eine bewegliche Rolle.

Wenn man von dem von der Reibung und von der Steifigkeit der Seile herrührenden Widerstande abstrahirt, so verdoppelte jede bewegliche Rolle die Kraft der an den Winden arbeitenden Menschen, so daß diese Kraft bei der ersten Winde vervierfacht und an der zweiten verdoppelt wurde, wodurch sich aber auch die Geschwindigkeit der Last in demselben Verhältnisse verminderte und der Weg von etwa 455 Toisen wurde in 8 Tagen zurück gelegt, welches eine tägliche Geschwindigkeit von ungefähr 57 Toisen gibt.

§. 130. Wenn man die Erdwinde nicht successive an verschiedene Stellen zu bringen braucht bei den Anwendungen, welche man davon machen will, so ist ihre Construction von der vorhinbeschriebenen verschieden, indem das Gestell hinwegfällt und der Körper der Winde sich um eine verticale eiserne Axe drehet, und der Theil, auf welchen sich das Seil aufwickelt und die Schnecke genannt wird, ist nicht cylindrisch, sondern hat die Form eines abgestumpften Kegels, dessen große Grundfläche unten liegt.

Wenn die bewegende Kraft größer sein muß, als die der 8 Menschen, welche an den vier Enden der durch den Kopf der Winde gehenden beiden Stangen wirken, so gibt man dem obern Theile der Schnecke eine parallelepipedische Form, welche in das in der Mitte einer Platte von 6, 8 oder mehr Seitenflächen befindliche quadratische Loch tritt, wo sich in jeder dieser Seitenflächen ein quadratisches Loch befindet, in welches man einen Hebel steckt.

§. 131. Besonders am Bord der Schiffe macht man von der in Rede stehenden Winde Gebrauch, und namentlich zum Heben der Anker und bei verschiedenen anderen Operationen, wobei sie durchaus nothwendig ist. Eine so wichtige Maschine mußte natürlich die Aufmerksamkeit der Geometer und der praktischen Mechaniker auf sich ziehen, um sie noch mehr zu vervollkommnen, wozu auch insbesondere die Akademie der Wissenschaften zu Paris, welche mehr als irgend eine andere gelehrte Gesellschaft zur Erweiterung aller nützlichen Kenntnisse beigetragen hat, einen Impuls gab durch den im Jahre 1739 ausgesetzten Preis für die Construction einer Erd- oder Schiffswinde, welche alle Vortheile der ältern ohne ihre Nachtheile darbietet. Der wichtigste dieser Mängel besteht darin, daß man mit dem Drehen der Winde aufhören und das Seil derselben verschieben muß, wenn es das eine Ende der Welle erreicht hat. Zur Beseitigung dieses Mangels hatten aber die Concurrenten der erwähnten Preisfrage nur Mittel vorgeschlagen, welche andere Nachtheile hatten, so daß die Aufgabe nicht vollständig gelöst war. Da aber die Akademie fand, daß die ihr eingesandten Abhandlungen besonders in Beziehung auf die Theorie viel Werthvolles enthielten, so bekamen vier dieser Abhandlungen den Preis, drei andere erhielten das Accessit und im Jahre 1745 wurden diese sieben Abhandlungen herausgegeben.

Durch andere seit dieser Zeit in Frankreich und England angestellte Untersuchungen sind mehrere neue für den Seedienst bestimmte Schiffswinden veranlaßt, und die Vollkommenheit, mit welcher sie gegenwärtig construirt werden, so wie die Gewandtheit, mit welcher die Menschen daran arbeiten, sind zu allen Zwecken, welche man damit

erreichen will, hinreichend; aber gleichwohl bleibt immer noch ein weites Feld zu neuen Verbesserungen offen.

Die kleinen Schiffe haben nur eine Winde, aber die großen Kriegsschiffe haben deren zwei, wovon die eine wie auf den kleinen Schiffen eine einfache ist, während die andere, welche die große Winde genannt wird, zwei Schnecken hat, durch welche eine Welle von Schmiedeeisen geht, deren oberer Theil sich in einer Pfanne drehet. Die obere Schnecke befindet sich auf dem Verdecke und die untere in dem Zwischendecke. Der Kopf jeder Schnecke besteht aus einer Platte, welche mit Löchern durchbrochen ist, die senkrecht auf der Axe sind, und in welche man die Hebel steckt, damit man eine hinreichend große Anzahl von Menschen anwenden kann, um Lasten von 4 bis 5 Tonnen zu heben.

§. 132. Der von dem Angriffspuncte der Kraft an der Radwelle oder der Erdwinde durchlaufene Weg oder Raum verhält sich zu dem während derselben Zeit von der Last durchlaufenen Wege wie die Kraft zur Last.

Wir wollen die von der Kraft P und der Last Q durchlaufenen Wege mit E und e bezeichnen. Während der Angriffspunct der Kraft den von dem Endpuncte eines Halbmessers des Rades der Radwelle beschriebenen Kreisumfang durchläuft, beschreibt die Last einen Weg, dessen Länge dem Umfange der Welle gleich ist, und folglich verhalten sich die von der Kraft und Last durchlaufenen Wege, wie die Umfänge des Rades und der Welle, welche sich selbst, wie ihre Halbmesser verhalten, so daß man, wenn R den Halbmesser des Rades und r den der Welle bezeichnet, die Proportion hat:

$$E : e = R : r.$$

Wenn aber das Gleichgewicht zwischen der Kraft und der Last stattfindet, so hat man auch:

$$Q : P = R : r,$$

und da diese beiden Proportionen ein gemeinschaftliches Verhältniß haben, so sind die beiden andern Verhältnisse auch einnnder gleich; folglich:

$$E : e = Q : P.$$

Aus dieser Proportion sieht man, daß, wenn die Last Q zunimmt, indem die Kraft P dieselbe bleibt, der Exponent des Verhältnisses der durchlaufenen Räume wegen der Zunahme des Raumes E oder wegen der Abnahme des Raumes e ebenfalls zunimmt, woraus folgt, daß man, wenn man Kraft ersparen will, den von ihrem Angriffspuncte durchlaufenen Weg vergrößern oder den von der Last durchlaufenen Weg vermindern muß, und dieses ist ein Gesetz, welches bei allen Maschinen stattfindet.

Die Radwelle und die Erd- oder Schiffswinde gewähren den Vortheil, daß man eine mäßige Kraft anwenden kann, um eine sehr schwere Last zu heben, oder einen beträchtlichen Widerstand zu überwinden; allein diese Ersparung an Kraft muß ihre Grenzen haben; denn wenn die Kraft schon hinreichend klein ist, um ohne zu große Ermüdung ausgeübt werden zu können, so muß man den Halbmesser

des Rades der Radwelle oder den Hebel der Winde, woran diese Kraft wirkt, nicht mehr vergrößern, damit der von ihrem Angriffspuncte zu durchlaufende Weg nicht zu lang wird.

§. 133. Eine Welle mit einem Rade von einem großen Durchmesser ist eine starke Maschine, aber sie würde für die gewöhnlichen Anwendungen zu unbequem sein, und es kann daher von Nutzen sein, zu untersuchen, ob man nicht statt derselben ein System mehrerer kleiner Radwellen anwenden kann, welche dieselbe Wirkung hervorbringen können als eine sehr große Radwelle.

Es sei A, A', A'' (Fig. 70) eine Verbindung von drei Radwellen, welche so eingerichtet sind, daß die Axen ihrer Wellen zu einander parallel sind, und daß die Wirkung der an dem Seile BP des Rades der ersten Welle A angebrachten Kraft P vermittelst der Seile DB' und $D'B''$, wovon das erste von der Welle der ersten Radwelle über das Rad der zweiten und das zweite von der Welle der zweiten Radwelle auf das Rad der dritten geht, bis zu der Last Q fortgepflanzt wird, welche an dem sich auf die Welle der dritten Radwelle A'' wickelnden Seile $D''Q$ befestigt ist.

Wenn das System dieser drei Radwellen im Gleichgewichte ist, so müssen die an jeder derselben wirkenden Kräfte auch im Gleichgewichte sein. Bezeichnet also Q' die Spannung des Seilstückes DB', welches sich auf die Welle von A wickelt, so hat man wegen des Gleichgewichtes dieser Radwelle die Proportion:

$$P : Q' = CD : CB.$$

Bezeichnet ferner Q'' die Kraft, welche die Spannung des Seilstückes $D'B''$ ausdrückt, so hat man wegen des Gleichgewichtes der Radwelle A':

$$Q' : Q'' = C'D' : C'B',$$

und wegen des Gleichgewichtes der Radwelle A'', woran die beiden Kräfte Q'' und Q wirken:

$$Q'' : Q = C''D'' : C''B''.$$

Multiplicirt man diese drei Proportionen mit einander und läßt die gemeinschaftlichen Factoren der beiden Glieder des ersten Verhältnisses hinweg, so erhält man:

$$P : Q = CD \times C'D' \times C''D'' : CB \times C'B' \times C''B''.$$

Dasselbe Resultat findet man für eine beliebige Anzahl von Radwellen, woraus folgt, daß im Gleichgewichtszustande eines Systemes von Radwellen, welche wie die eben beschriebenen eingerichtet sind, sich die Kraft, welche nach der Tangente an dem Rade der ersten Welle wirkt, zu dem Gewichte der an dem Seile, welches sich auf die letzte Welle wickelt, befestigten Last wie das Product aus den Halbmessern aller Wellen zu dem Producte der Halbmesser aller Räder verhält.

Aus der eben gefundenen Proportion ergibt sich folgende Formel:

$$P = \frac{CD \times C'D' \times C''D''}{CB \times C'B' \times C''B''} \times Q.$$

Wenn in jeder Radwelle der Halbmesser der Welle $^1/_5$ von dem des Rades betrüge, so verwandelte sich diese Formel in:

$$P = \frac{1}{125} Q.$$

Die Kraft betrüge also nur $\frac{1}{125}$ der Last, d. h. ein Gewicht von 1 Kilogr. würde, an dem Rade von *A* angebracht, einem Gewichte von 125 Kilogr. das Gleichgewicht halten, welches an dem sich auf die Welle von *A''* wickelnden Seile aufgehangen wäre, wobei aber der Angriffspunct der Kraft einen Weg von 125 Meter durchlaufen müßte, während die Last nur auf 1 Meter Höhe gehoben würde (§. 131). Wegen der Länge des Seiles, woran die Kraft auf die erste Radwelle wirkt, kann man sich der zusammengesetzten Radwelle nicht bedienen, um mit einer mäßigen Kraft beträchtliche Wirkungen hervorzubringen. Es lassen sich sehr nützliche Anwendungen davon machen, um die Bewegung einer Welle auf eine andere in derselben Ebene liegende Welle zu übertragen, und man hat ein Mittel gefunden, denselben Zweck ohne Anwendung der Seile zu erreichen, wie man in folgenden §§. sehen wird.

Von den gezahnten Rädern.

§. **134.** Unter einem gezahnten Rade versteht man ein solches, dessen Umfang mit gleichen und gleich weit von einander entfernten, vorspringenden Theilen, welche man Zähne nennt, versehen ist. In die zwischen den Zähnen eines Rades befindlichen leeren Zwischenräume treten successive die Zähne eines andern in das erste eingreifenden Rades. Wenn die Kraft auf eins dieser Räder wirkt und demselben eine Rotationsbewegung ertheilt, so daß auf das andere Rad nach entgegengesetztem Sinne gedreht wird, so sagt man, daß das Rad, auf welches die Kraft wirkt, das andere Rad, in welches es eingreift, treibt. Bei sehr vielen Maschinen wirkt die Kraft vermittelst eines Rades oder einer Kurbel auf ein kleines gezahntes Rad, welches das Getriebe genannt wird, dessen Zähne in die eines andern größern Rades eingreifen, und die Kraft ist im Gleichgewichtszustande so vielmal kleiner, als die Last, so vielmal der Halb- oder Durchmesser des Getriebes in dem des Rades enthalten ist. Es würde oft mit Schwierigkeit verbunden sein, ein einziges Zahnrad von einem hinreichend großen Durchmesser anzuwenden, um der Kraft die erforderliche Intensität zu geben, oder andern Bedingungen zu genügen, sowohl wegen der Schwierigkeit der Construction dieses Rades, als wegen Mangel an Raum, und alsdann kann man statt desselben ein System kleinerer Räder und gehörig eingerichteter Getriebe anwenden, um den gewünschten Effect zu erhalten.

Die Bedingungen des Gleichgewichtes zwischen der auf ein System von Zahnrädern der eben angegebenen Art wirkenden Kraft und dem Gewichte einer Last lassen sich leicht finden.

§. **135.** Es sei Figur 71 ein System von Zahnrädern, welches aus einem Getriebe *N*, dessen Zähne in die des Rades *M'* eingreifen, besteht, wo sich an der Welle dieses Rades das Getriebe *N'* befindet,

welches in das Rad M' eingreift, dessen Welle den Cylinder N'' trägt, um welchen sich ein Seil wickelt, woran die Last Q aufgehangen ist. Die Axen oder Wellen dieser Zahnräder sind zu einander parallel und sie drehen sich in festen Zapfenlagern. Eine Kraft P ist an einer an der Axe des Getriebes N befestigten Kurbel angebracht und wirkt nach der auf dieser Kurbel, welche als der Halbmesser eines Rades M betrachtet werden kann, dessen Umfang von dem Angriffspuncte der Kraft beschrieben wird, senkrechten Richtung Pm.

Die Zahnräder sind eine bloße Modification von Radwellenverbindungen, worin die Wirkung der an dem Rade der ersten Welle angebrachten Kraft auf die übrigen Radwellen dnrch Seile übertragen wird, welche successive von einer Welle auf das Rad der folgenden gehen. Die Verzahnungen der Getriebe und der Räder vertreten die Stelle der Seile und bringen dieselbe Wirkung hervor, ohne die Nachtheile der Seilverbindungen zu haben; allein wenn dieser Mechanismus auch in der Praxis nicht vortheilhaft ist, so kann derselbe doch dazu dienen, die Regel zu finden, welche man anwenden muß, wenn man die Effecte berechnen will, und welche auch auf die Zahnräder anwendbar ist. Uebrigens kann diese Regel, welche auf dem Principe des Hebels beruht, auch auf folgende Weise direct bewiesen werden.

Es sei R die Länge des Kurbelarmes, woran die Kraft P angebracht ist, oder der Halbmesser des Rades M und r der Halbmesser des Getriebes N, so können diese Halbmesser R, r als die Arme eines Hebels betrachtet werden, dessen Drehungsmittelpunct auf der gemeinschaftlichen Axe des Rades M und des Getriebes N liegt. Wenn man die am Ende des kleinen Hebelarmes oder des Hebelarmes r wirkende Kraft mit F bezeichnet, so wird die Bedingung des Gleichgewichtes durch folgende Proportion ausgedrückt:

$$P : F = r : R.$$

Die Halbmesser R', r' des Rades M' und des Getriebes N' bilden die beiden Arme eines zweiten Hebels. Die Kraft F ist am Ende des Halbmessers R' angebracht, und wenn man die am Ende des Halbmessers r' wirkende Kraft mit F' bezeichnet, so hat man für das Gleichgewicht des eben erwähnten Hebels:

$$F : F' = r' : R'.$$

Betrachtet man die Halbmesser R'' und r'' des Rades M'' und des Getriebes N'' auf dieselbe Weise, so hat man einen dritten Hebel woran die Kraft F' und die Last Q einander das Gleichgewicht halten, und folglich verhält sich:

$$F' : Q = r'' : R''.$$

Werden die correspondirenden Glieder dieser drei Proportionen in einander multiplicirt und die gemeinschaftlichen Factoren der beiden Glieder des ersten Verhältnisses hinweg gelassen, so erhält man:

$$P : Q = rr'r'' : RR'R'';$$

d. h. die Kraft verhält sich zum Gewichte der Last wie das Product aus den Halbmessern aller Getriebe zu dem Producte aus den Halbmessern aller Räder.

Das eben gefundene Resultat ist dasselbe, als das bereits für das Gleichgewicht eines Systemes von Radwellen gefundene (§. 132) und es sind bloß für die Halbmesser der Wellen die der Getriebe an die Stelle getreten.

§. 136. Die Halbmesser, welche man bei der Berechnung der Zahnräder anwendet, endigen sich in den Berührungspuncten der einander fortschiebenden Zähne und man nennt sie mittlere Halbmesser, welche man oft nur mit Schwierigkeit würde genau messen können; allein man umgeht diese Schwierigkeit, wenn man statt der Zahl, welche die Länge jedes Halbmessers ausdrückt, die Zahl der Zähne des von demselben beschriebenen Kreisumfanges setzt. Durch diese Substitution wird das Resultat nicht geändert, weil sich die Halbmesser wie die Kreisumfänge, und folglich wie die Anzahl der auf diesen Kreisumfängen enthaltenen Zähne verhalten. Bezeichnen also D', D'' die Anzahlen der Zähne der Räder M', M'' und d, d' die der Getriebe N, N' und bemerkt man, daß die Halbmesser R, r'' des Rades M und der Welle N'', welche keine Zähne haben, beibehalten werden müssen; so verwandelt sich die vorhergehende Proportion, wenn man ihre Glieder umstellt, in:

$$RD'D'' : r''dd' = Q : P = \frac{r''dd'}{RD'D''} \times Q.$$

§. 137. Um diese Formel auf ein Beispiel anzuwenden, wollen wir den Werth der Kraft P suchen, welche vermittelst eines ähnlichen Rädersystemes, wie das in Figur 71 dargestellte, einer Last Q von einem Gewichte von 3000 Kilogr. das Gleichgewicht zu halten vermag.

Es sei $R = 14$ Zoll der Halbmesser der Kurbel, woran die Kraft wirkt oder der des Rades M, $r'' = 3$ Zoll der Halbmesser der Welle N'', $D' = D'' = 48$ die Anzahl der Zähne jedes der gleichen Räder M' und M'' und $d = d' = 10$ die Anzahl der Zähne jedes der Getriebe N und N'; so erhält man, wenn diese Zahlen statt der Buchstaben in die allgemeine Formel substituirt werden:

$$P = \frac{3 \times 10 \times 10}{14 \times 48 \times 48} \times 3000.$$

Verrichtet man die Rechnungen, so findet man 27, 9 Kilogr. für den Werth der Kraft, welche eine Last von 3000 Kilogr. an dem obigen Rädersysteme im Gleichgewichte zu erhalten vermag, und um die Last zu heben, müßte man diese Kraft um eine Größe vermehren, welche die von der Reibung und der Steifigkeit der Seile herrührenden Widerstände überwinden könnte.

Wir haben vorhin die Dicke des Seiles unberücksichtigt gelassen, und wenn man annimmt, daß der Durchmesser desselben $2^1/_2$ Zoll beträgt, so muß man den Halbmesser der Welle $= 3 + 1^1/_4 = 4^1/_4$ nehmen, und wenn die Rechnungen nach dieser Correction wiederholt werden; so findet man, daß die Kraft, welche derselben Last das Gleichgewicht zu halten vermag $= 39,527$ Kilogr. sein muß.

Wenn das Gewicht der Last Q die unbekannte Größe wäre und alle übrigen Größen bekannte, so müßte man dieses Gewicht nach folgender Formel berechnen:

$$Q = \frac{RD'D''}{r''dd'} \times P.$$

§. 138. Aufg. Das Verhältniß zwischen den in derselben Zeit von der nach der Tangente an dem Umfange des Rades M wirkenden Kraft P und von der an dem sich auf die Welle N'' wickelnden Seile aufgehangenen Last Q beschriebenen Wege oder Räume zu finden. — Aufl. Während das Rad M eine ganze Umdrehung um seine Axe macht, treibt das an derselben Axe befindliche in das Rad M' eingreifende Getriebe dieses Rad nur um einen Bogen herum, welcher so viel Zähne hat, als dieses Getriebe. Das Rad M' macht also nur eine Umdrehung, während das Getriebe N eine Anzahl von Umdrehungen macht, welche durch den Quotienten aus der Anzahl der Zähne des Rades und der des Getriebes ausgedrückt wird.

Wenn man die Anzahl der Umdrehungen, welche das Rad M' und das Getriebe N in derselben Zeit machen, mit T, t, und die Anzahl der Zähne dieses Rades und dieses Getriebes resp. mit D' und d bezeichnet; so hat man:

$$t = \frac{D' \times T}{d}.$$

Diese Formel ist der algebraische Ausdruck der eben gemachten Bemerkung und es ergibt sich daraus die Proportion:

$$t : T = D' : d;$$

d. h die Anzahl der Umdrehungen des Getriebes N und des Rades M', welche in einander eingreifen, stehen im umgekehrten Verhältnisse der Anzahlen ihrer Zähne.

Das Getriebe N' mit mit d' Zähnen macht dieselbe Anzahl T von Umdrehungen, als das Rad M' und greift in das Rad M'' von D'' Zähnen, und wenn man die Anzahl der Umdrehungen dieses letzten Rades mit T' bezeichnet; so hat man:

$$T : T' = D'' : d'.$$

Multiplicirt man die correspondirenden Glieder dieser beiden Proportionen in einander und läßt den gemeinschaftlichen Factor hinweg, so kommt:

$$t : T' = D'D'' : dd',$$

woraus folgt:

$$T' = \frac{dd'}{D'D''} \times t.$$

Wir wollen annehmen, daß das Getriebe N, woran die Kurbel befestigt ist, auf welche die Kraft wirkt, 30 Umdrehungen in der Minute macht, so daß $t = 30$ ist, und es sei $d = d' = 10$, $D' = D'' = 48$, so erhält man, wenn man diese Zahlen für die entsprechenden Buchstaben in die letzte Formel substituirt:

$$T' = \frac{10 \times 10}{48 \times 48} \times 30,$$

wo man die angedeuteten Rechnungen unmittelbar oder mit Hilfe der Logarithmentafeln verrichten kann, und auf diesem letzten Wege findet man:

$$\begin{aligned} log.\ 3000 &= 3,4771213 \\ 2\,log.\ 48 &= 3,3624825 \\ log.\ T' &= 0,1146388, \end{aligned}$$

also:

$$T' = 1,30208.$$

Aus diesem Werthe von T' sieht man, daß das Rad M'' oder die Welle N'', auf welche sich das Seil wickelt, woran die Last Q befestigt ist, etwas weniger, als $1^1/_3$ Umdrehung in der Minute macht. Der Halbmesser der Kurbel oder des Kreises M, welchen der Angriffspunct der Kraft beschreibt, ist $= 14$ Zoll $= {}^7/_6$ Fuß, also der Umfang $= 2 \times 3,1416 \times {}^7/_6 = 7,3304$ Fuß, und folglich durchläuft der Angriffspunct der Kraft in 1 Minute einen Raum von $30 \times 7,3304 = 219,912$ Fuß. Der Halbmesser der Welle N'', auf welche sich das Seil mit der Last wickelt, ist $= 4^1/_4$ Zoll $= {}^{17}/_{48}$ Fuß, also die Länge des Umfanges $= 2 \times 3,1416 \times {}^{17}/_{48} = 2,2253$ Fuß und der von der Last in 1 Minute durchlaufene Raum $= 1,30208 \times 2,2253 = 2,89752$ Fuß. Vergleicht man das Verhältniß der Kraft zur Last mit dem Verhältnisse der von denselben in 1 Minute durchlaufenen Räume, so findet man, daß das erste Verhältniß das Umgekehrte des zweiten ist, und wenn die Reibung keinen Verlust an Kraft bewirkte, so wäre dasselbe $= \frac{39,527}{3000} = 0,013175$ der Last; aber diese Last durchläuft in 1 Minute nur $\frac{2,89752}{219,912} = 0,013175$ des während derselben Zeit von dem Angriffspuncte der Kraft durchlaufenen Raumes.

§. 139. Aufg. Die Anzahlen der Zähne zu finden, welche die Räder M', M'' und die in diese Räder eingreifenden Getriebe N, N' haben müssen, um eine solche Räderverbindung zu bilden, daß, wenn das erste Getriebe N 30 Umdrehungen in der Minute macht, das letzte Rad M'' in derselben Zeit 8 Umdrehungen macht. — Aufl. Die Figur und die Bezeichnung der Größen, welche wir anwenden wollen, sind dieselben als in der vorhergehenden Aufgabe, welche mit der eben gestellten viel Aehnlichkeit hat, und deren Auflösung sich daher abkürzen ließe; allein wir wollen diese Aufgabe auf folgende Weise direct lösen.

Zunächst wollen wir bemerken, daß, wenn das Getriebe N, d Zähne hat, bei jeder Umdrehung desselben um seine Axe, das Rad M' um d Zähne gedrehet wird und daß dieses Rad folglich nach t Umdrehungen des Getriebes um $t \times d$ Zähne herumgedrehet ist. Ferner wollen wir bemerken, daß das Rad M', welches D' Zähne hat, auch das Getriebe N um D' Zähne herumdrehet, also nach T Umdrehungen um $T \times D'$ Zähne. Aber zu gleicher Zeit ist die Anzahl der Zähne des Getriebes, welche in das Rad eingreifen, gleich der Anzahl der Zähne des Rades, welche in das Getriebe eingreifen, und folglich ist:

$$t \times d = T \times D'.$$

Für das in das Rad M'' eingreifende Getriebe N' ergibt sich durch ähnliche Schlüsse:

$$T \times d' = T' \times D'',$$

und wenn man diese beiden Gleichungen in einander multiplicirt, so erhält man, indem man den gemeinschaftlichen Factor hinweg läßt:

$$tdd' = T'D'D''.$$

Diese Gleichung ist dieselbe, als die bei der Auflösung der vorhergehenden Aufgabe erhaltene und kann auch auf folgende Weise ausgedrückt werden:

$$\frac{t}{T'} = \frac{D'D''}{dd'};$$

d. h. das Verhältniß der Anzahl der Umdrehungen, welche das erste Getriebe N und das letzte Rad M'' in derselben Zeit machen, ist gleich dem zusammengesetzten Verhältnisse der Anzahlen der Zähne der beiden Räder M', M'' zu den Anzahlen der Zähne der beiden Getriebe N und N'.

Die eben für zwei Räder und zwei Getriebe gefundene Proportion würde auch für ein aus einer beliebigen Anzahl von Rädern und aus einer gleichen Anzahl von Getrieben zusammengesetztes Räderwerk stattfinden. Nach den Bedingungen der Aufgabe kennt man t und T', und wenn man für diese Buchstaben ihre Werthe in die letzte Formel setzt, so erhält man:

$$D'D'' = \frac{30\,dd'}{8}.$$

Setzt man $dd' = 10 \times 10$, so gibt diese Formel:

$$D'D'' = \frac{30 \times 10 \times 10}{8} = 15 \times 25 = 375.$$

§. 140. Die genaue Auflösung der Aufgabe würde erfordern, die Zahl, welche den Werth von $D'D''$ ausdrückt, in zwei Factoren zu zerlegen, welche man für die Anzahlen D', D'' der Zähne der Räder M', M'' nehmen könnte. Diese Zerlegung ist bei der ungeraden Zahl 375 nicht möglich und man muß daher eine andere Zahl suchen, welche so beschaffen ist, daß, wenn die Auflösung auch nicht in aller Strenge genau ist, der Fehler doch so klein wird, daß er vernachlässigt werden kann. Zur Bestimmung dieser Zahl wollen wir das Verfahren anwenden, welches man bei der Auflösung der unbestimmten Gleichungen des ersten Grades anwendet.

Da der zweite Theil der Gleichung:

$$D'D'' = \frac{30\,dd'}{8} = \frac{15\,dd'}{4}$$

eine ganze Zahl sein muß, so wollen wir annehmen, daß diese Bedingung erfüllt wird, wenn man zu dem Zähler eine Größe e addirt, und setzen:

$$D'D'' = \frac{15\,dd' + e}{4} = 3\,dd' + \frac{3\,dd' + e}{4}.$$

Ferner wollen wir setzen:

$$\frac{3dd' + e}{4} = f,\ dd' = \frac{4f - e}{3} = f + \frac{f - e}{3},$$

$$\frac{f - e}{3} = g,\ f = 3g + e.$$

Es ist nun leicht, die Nenner aus den vorhergehenden Formeln wegzuschaffen; denn substituirt man den letzten Werth von f in den von dd', so erhält man:

$$dd' = \frac{4(3g + e) - e}{3} = \frac{12g + 3e}{3} = 4g + e,$$

und die Substitution dieses Werthes gibt:

$$D'D'' = \frac{15(4g + e) + e}{4} = \frac{60g + 16e}{4} = 15g + 4e.$$

Die eben gefundenen Formeln enthalten die beiden Buchstaben g und e, welche unbestimmte Zahlen ausdrücken; aber die Werthe dieser Buchstaben sind nicht willkürlich, sondern sie müssen so beschaffen sein, daß die sich daraus ergebenden Anzahlen der Zähne der Räder und der Getriebe den Bedingungen der Aufgabe genügen und nach einigen Versuchen findet man für $g = 80$ und $e = 4$ folgende Werthe:

$$D'D'' = 15 \times 80 + 4 \times 4 = 1216 = 32 \times 38,$$
$$dd' = 4 \times 80 + 4 = 324 = 18 \times 18,$$

woraus erhellet, daß, wenn eins der Räder, z. B. das Rad M', 32 Zähne hat, das andere Rad M'', 38 Zähne und jedes der Getriebe N, N', deren 18 haben muß.

Um die Richtigkeit dieser Zahlen nachzuweisen, wollen wir in die Formel $T' = \frac{dd'}{D'D''} \times t$ für die Buchstaben die eben gefundenen Zahlen setzen, indem wir annehmen, daß die Zahl T' der Umdrehungen, welche das Rad M'' machen muß, die unbekannte Größe sei; so ergibt sich:

$$T' = \frac{18 \times 18}{32 \times 38} \times 30 = \frac{9720}{1216} = 7,993$$

statt 8 Umdrehungen, wovon aber das Resultat 7, 993 nur um weniger, als $\frac{1}{100}$ Umdrehung verschieden ist.

Von der gewöhnlichen Winde.

§. 141. Zu den Anwendungen der Räderwerke gehört auch die gewöhnliche Winde, vermittelst welcher ein einziger Mensch beträchtliche Lasten verrücken oder heben kann. Der Mechanismus der Winde besteht gewöhnlich aus einer an der einen Seite gezahnten Eisenstange, einem Zahnrade, zwei Getrieben und einer Kurbel. Dieser Mechanismus ist in einem Gehäuse $ABCD$ (Fig. 72) enthalten, welches aus einem einzigen Stücke Eichenholz verfertigt ist, in welches man der Länge nach eine rechtwinklige Vertiefung von einer hinreichenden Größe gemacht hat, damit sich die Zahnstange L frei darin be-

wegen kann, und eine kreisförmige Aushöhlung nahe an der obern Basis *AB* zur Aufnahme des Zahnrades *M* und der beiden Getriebe *N* und *N'*, wovon das eine, an der Axe der Kurbel befestigte in das Rad *M* eingreift, während das andere, an der Axe des Rades *M* befindliche in die Zahnstange *L* eingreift.

Es sei *P* die senkrecht auf die Kurbel der Winde wirkende Kraft und wir wollen annehmen, daß die Zahnstange *L* gegen einen Widerstand *Q* gestellt sei, so kann man sich vorstellen, als wirkte dieser Widerstand nach der Tangente des von dem Halbmesser des Getriebes *N'* beschriebenen Kreises und die Kraft *P* nach der Tangente des Rades, dessen Umfang mit einem dem Kurbelarme gleichen Halbmesser beschrieben ist. Die Ebene dieses Rades, die des Zahnrades und der Getriebe sind alle zu einander parallel, sowohl als ihre Axen, woraus folgt, daß die Bedingungen des Gleichgewichtes der Winde dieselben sind, als die der zusammengesetzten Radwelle und der Räderwerke.

Wenn man den Halbmesser der Kurbel mit *R*, den des Zahnrades *M* mit *R'* und die Halbmesser der Getriebe *N*, *N'* resp. mit *r*, *r'* bezeichnet; so hat man nach der in §. 135 bewiesenen Regel:

$$P : Q = rr' : RR';$$

d. h. die Kraft verhält sich zu dem Widerstande wie das Product aus den Halbmessern der beiden Getriebe zu dem Producte aus dem Halbmesser der Kurbel und dem des Zahnrades. Diese Proportion gibt:

$$Q = \frac{P.R.R'}{r.r'}.$$

Wenn man mit dem Zirkel in Figur 72 die in Rede stehenden Größen mißt und sie mit 24 multiplicirt, so findet man, daß der Halbmesser *R* der Kurbel = 9 Zoll, der des Zahnrades *R'* = 5 Zoll und dee Halbmesser der beiden Getriebe $r = r' = 1$ Zoll ist. Ferner sei die Kraft *P* = 15 Kilogr., so gibt die vorhergehende Formel, wenn man statt der darin vorkommenden Buchstaben ihre Zahlenwerthe setzt:

$$Q = \frac{15 \text{ Kilogr.} \times 9 \times 5}{1 \times 1} = 675 \text{ Kilogr.}$$

Eine an der Kurbel der Winde wirkende Kraft von 15 Kilogr. hält also einer Last von 675 Kilogr. das Gleichgewicht, d. h. die Kraft bringt eine 45mal größere Wirkung hervor, als wenn sie unmittelbar und ohne Anwendung der Winde auf die Last wirkte.

Man könnte auch das Zahnrad *M* und das Getriebe *N'* hinweg lassen, indem man das an der Axe der Kurbel befindliche Getriebe *N* in die Zahnstange *L* eingreifen ließe und alsdann hätte man eine einfache Winde, bei welcher sich die Kraft zur Last wie der Halbmesser des Getriebes zu dem der Kurbel verhält, d. h. man hat:

$$r : R = P : Q = \frac{PR}{r},$$

und wenn man für die Buchstaben die Zahlen im letzten Beispiele setzt, so hat man:

$$Q = \frac{15 \times 9}{1} = 135.$$

Der Vortheil der einfachen Winde beträgt also nur $^1/_5$ von dem der zusammengesetzten Winde, weswegen auch die letztere den Vorzug erhalten hat und allgemein angewandt wird. An der Axe der Kurbel wird auch ein Sperrad und eine in dasselbe eingreifende Sperrklinke angebracht, damit sich die Zahnstange nicht rückwärts bewegen kann, wenn die Kraft an der Kurbel aufhört zu wirken. An dem untern Theile des Zahnstange befindet sich gewöhnlich ein vorspringendes Stück, dessen man sich bedient, wenn die zu hebende Last an ihrer untern Fläche ergriffen werden muß.

Von dem Krahn.

§. 142. Unter einem Krahn versteht man eine Maschine, welche zum Heben von Lasten bestimmt ist. Diese Maschine ist gewöhnlich fest, aber zugleich so eingerichtet, daß man sie in horizontalem Sinne drehen kann, so daß die auf eine gewisse Höhe gehobene Last durch die Drehung des Krahnes in einem beliebigen Puncte des von derselben beschriebenen Kreisumfanges gebracht werden kann.

In den meisten Werkstätten, worin schwere Stücke zu bearbeiten sind, und besonders in den Eisengießereien, muß man sich des Krahnes bedienen. Der Mechanismus dieser Maschine besteht jetzt allgemein in einem einfachen oder zusammengesetzten Räderwerke mit zwei Kurbeln, welche sich in der gehörigen Höhe befinden, damit Menschen ihre Kräfte leicht darauf ausüben können. Figur 73 stellt einen Aufriß von einem der hölzernen Krahne in der großen Gießerei von Charenton dar. Die beiden Enden *A* und *B* der verticalen Welle *AB* sind mit eisernen Bändern beschlagen, um den an diesen Enden befindlichen Zapfen der Welle eine hinreichend feste Lage zu geben. Der untere Zapfen besteht aus Stahl, und muß so gearbeitet sein, daß er sich mit der möglichst geringsten Reibung in seinem Lager bewegt, welches sich in einem Steine auf der Mauer befindet, die das Fundament des Krahnes bildet. Der obere Zapfen drehet sich in einem eisernen Bande, welches mit zwei Schraubenbolzen an einem festen Balken befestigt ist.

Der Arm *DE* des Krahnes ist senkrecht auf der verticalen Welle, womit er durch einen aus drei eisernen Bändern bestehenden Beschlag verbunden ist. Zwei dieser Bänder sind auf beiden Seiten des Armes *DE* mit Bolzen befestigt, ihre Verlängerungen umschließen die verticale Welle und die überragenden Theile sind abgerundet und mit Schrauben versehen, woran das dritte Band mit Schraubenmuttern befestigt wird. Das schiefe Band *GH*, welches die verticale Welle und den Arm *DE* verbindet, dient zur Unterstützung dieses Arms, damit er die daran aufgehangenen Lasten tragen kann. Bei diesem Krahne wird die Wirkung der bewegenden Kraft vermittelst einer Kette auf die zu hebende Last fortgepflanzt, und seit ungefähr 30 Jahren hat man in England angefangen, statt der Seile, welche man auf den Schiffen anwendet, eiserne Ketten zu gebrauchen, was die Erfahrung auch in vielen andern Fällen als vortheilhaft bestätigt hat.

Die Radwelle, wovon Figur 73^a eine Projection darstellt, und woran das eine Ende der Kette befestigt ist, ist nach ihrer Axe mit der Welle des Zahnrades M durchbrochen. Die Kette läßt man über die an dem Arme DE des Krahnes befindliche Leitrolle V gehen, leitet sie dann über die bewegliche Rolle U, an deren Biegel sich ein Haken befindet, woran man die zu hebende Last Q aufhängt, und das andere Ende der Kette ist vermittelst des Hakens S an dem Arme DE des Krahnes befestigt. Dieser Haken und die Leitrolle V lassen sich an dem Arme DE verschieben, um sie daran in die gehörige Lage bringen zu können.

§. 143. Aufg. Die Bedingungen des Gleichgewichtes zwischen der an einer der Kurbeln wirkenden Kraft P und der an dem Arme DE vermittelst des Hakens der beweglichen Rolle U aufgehangenen Last Q zu finden. — Aufl. Wir wollen den Halbmesser der Kurbel mit R, den des Getriebes N mit r, den des in das Getriebe N eingreifenden Zahnrades M mit R' und den der Welle, auf welche sich die Kette wickelt, mit r' bezeichnen; so haben wir, wenn F die im Berührungspuncte der Zähne des Getriebes N und des Rades M und F' die am Ende des Halbmessers der Welle wirkende Kraft bezeichnet, nach §. 135:

$$P : F = r : R$$
$$F : F' = r' : R'.$$

Multiplicirt man diese beiden Proportionen in einander, läßt den gemeinschaftlichen Factor F hinweg und bemerkt, daß wegen der beweglichen Rolle $F' = {}^1/_2 Q$ ist; so erhält man:

$$P : {}^1/_2 Q = rr' : RR', \quad P = \frac{Q.r.r'}{2R.R'}.$$

Die Last ist eine Platte der hydraulischen Presse, deren Gewicht $Q = 880$ Kilogr. ist, und wovon in Figur 73^b eine Seitenansicht angegeben ist. Ferner ist:

$$R = 0^m,40, \quad R' = 0^m,42, \quad r = 0^m,06, \quad r' = 0^m,086,$$

und wenn diese Zahlen statt der Buchstaben substituirt werden, so gibt die allgemeine Formel:

$$P = \frac{880 \times 0,06 \times 0,086}{2 \times 0,4 \times 0,42} = 13,5,$$

so daß die Kraft, welche einer Last von 880 Kilogr. das Gleichgewicht halten kann, gleich 13, 5 Kilogr. sein muß.

Hat man nun die Last auf eine bestimmte Höhe gehoben und man will sie an eine andere Stelle bringen, so befestigt man zunächst die Kurbel mit dem Haken der im Puncte C der verticalen Welle befestigten kleinen Kette und drehet dann den Krahn um seine Axe.

§. 144. Die Hauptbedingungen, welche man bei der Anwendung der Räderwerke in den Maschinenconstructionen zu erfüllen haben kann, sind: 1) die Wirkung der Kraft zu vergrößern oder zu verkleinern, um der Kraft das gehörige Verhältniß zu dem zu überwindenden Widerstande zu geben; 2) die Geschwindigkeit der Kraft so zu reguliren, daß sie die gewünschte Größe hat und 3) die Richtung der Bewegung

so abzuändern, daß sie von einer Welle auf eine andere übertragen werden kann, was für einen Winkel ihre Axen auch mit einander bilden mögen, wofern sie nur in derselben Ebene liegen.

Bisher haben wir nur Räderwerke betrachtet, welche aus Stirnrädern zusammengesetzt sind, deren Zähne auf dem Umfange des Kranzes in der Richtung der Halbmesser liegen, und bei jedem Räderwerke dieser Art sind die Wellen oder Axen der Räder und ihrer Getriebe alle zu einander parallel. Aber wenn man die Zahnräder zur Uebertragung der Rotationsbewegung einer Welle auf eine andere Welle anwenden will, welche nicht zu der ersten parallel ist, sondern wo die beiden Axen der Wellen zwar in derselben Ebene liegen, aber hinreichend verlängert sich in einem Puncte durchschneiden, welchen man als den gemeinschaftlichen Mittelpunct zweier Kegel betrachten kann, und man durchschneidet jeden dieser Kegel mit zwei auf seiner Axe senkrechten Ebenen, so daß der gegenseitige Abstand dieser Ebenen der Dicke des Rades gleich ist und die Durchschnittsebenen beider Kegel sich in der gemeinschaftlichen Erzeugungslinie durchschneiden; so bilden die zwischen diesen Ebenen liegenden abgestumpften Kegel zwei sogenannte Kegel- oder Winkelräder, deren Zähne die Richtungen der von der Spitze des Kegels nach dem Umfange der Grundfläche gezogenen geraden Linien haben. Diese allgemeinen Begriffe werden sogleich an den folgenden Beispielen klarer werden.

§. 145. Anwendung der Räderwerke zur Uebertragung der Bewegung der verticalen Welle eines Göpels auf andere Maschinen. — Unter einem Göpel versteht man eine Maschine, welche mit der Erd- oder Schiffswinde viele Aehnlichkeit hat und das beste bekannte Mittel an die Hand gibt, um beliebige Maschinen in Bewegung zu setzen, wenn man die Kraft der Thiere als bewegende Kraft anwenden will. Gewöhnlich wendet man zur Bewegung des Göpels Pferde an, aber man kann auch Ochsen und andere Thiere anwenden.

Die Figuren 74 und 75 stellen den Grund- und Aufriß eines Göpels für zwei Pferde dar. Die verticale Welle *AB* besteht aus Gußeisen, ihr unterer Zapfen *B* geht in ein Zapfenlager, welches in einem Mauerwerk befestigt ist und der obere Zapfen *A* drehet sich in einem Bande, welches mit Bolzen an einem Stück Holz befestigt ist, das selbst an den in den Mauern des Gebäudes festliegenden Balken festsitzt. Ein Eisenstück *mn*, in welches die verticale Welle geht, dient zur Befestigung der beiden in derselben Richtung horizontal liegenden Stangen *LM*, *L'M'* und die Enden dieser Stangen treten in die gußeisernen Stücke *M*, *M'*, welche durchbrochen sind, um die Stiele der Bogen *HIK*, *H'I'K'* von Schmiedeeisen, welche sich in diesen Löchern drehen können und an ihren obern Theilen mit Splinten versehen sind, aufzunehmen. Der Körper jedes Pferdes wird von einem der Bogen oder Gabeln umschlossen und an dem Kummte desselben werden die Zweige der Gabeln mit Seilen oder Riemen befestigt.

Um den Armen des Göpels, oder den Stangen *LM*, *L'M'* eine gehörige feste Lage zu geben, wendet man zwei schräge Bänder *XY*, *X'Y'* an, welche mit Bolzen an den Schenkeln eines an dem untern Theile der verticalen Welle befindlichen gußeisernen Stückes befestigt

sind. Der obere Theil dieser Welle geht in das sich im Mittelpuncte des Winkelrades *DE* befindende Loch, welches mit Nuten versehen ist, in welche die vorspringenden Theile der Welle zu liegen kommen und mit Splinten befestigt werden, damit die Rotationsbewegung der Welle, welche durch die Pferde gedrehet wird, auf die andere Welle übertragen wird.

Das erste Winkelrad *DE* greift in das Rad *EG* und drehet dasselbe herum, welches letztere mit dem Stirnrade *ST* durch die Welle *NO* verbunden ist, welche an diesen beiden Rädern mit Splinten befestigt wird, wie die verticale Welle an dem Rade *DE*. Die Welle *NO* drehet sich in Zapfenlagern, welche sich an einem Gestelle von Holz befinden, und mit Bolzen und Schrauben daran befestigt sind. Das Zahnrad *ST* greift in ein Getriebe *TV* (Fig. 74), welches an einer zweiten zu der ersten parallel liegenden Welle *N'O'* befestigt ist, die durch die Mittelpuncte des Getriebes *TV* und der Rolle *U* geht.

Um die stetige Rotationsbewegung auf eine Maschine zu übertragen, legt man um die Rolle *U* einen Riemen ohne Ende, welcher über die an der Maschine angebrachte Rolle *u* geht, so daß dieser etwas angespannte Riemen die Bewegung der ersten Rolle auf die zweite überträgt.

Der eben beschriebene Göpel ist im Jahre 1825 in den Werkstätten von J. Collier construirt, und dazu bestimmt, die Scheeren und übrigen Maschinen in der Tuchfabrik in Bewegung zu setzen und der Preis derselben ist = 3000 Franken. Die verticale gußeiserne Welle hat nur ein geringes Volumen, aber doch eine weit größere Festigkeit, als die hölzernen Wellen, welche man gewöhnlich anwendet. Der einfache und solide Beschlag dieses Göpels und seine gute Construction können den Nachtheil wegen der kürzern Stangen oder Hebel, welche weit kürzer sind, als die gewöhnlichen von 4 oder 5 Meter, wenn es der Raum gestattet, compensiren. Es ist ein doppeltes Räderwerk angewandt, um der liegenden Welle die gehörige Geschwindigkeit zu ertheilen, während in den meisten Göpeln diese Geschwindigkeit unmittelbar durch ein einziges Räderwerk, welches aus dem Winkelrade und seinem Getriebe besteht, hervorgebracht wird; aber alsdann muß man ein Rad anwenden, dessen Durchmesser ungefähr 12mal größer ist, als der seines Getriebes, und durch die Unregelmäßigkeit der Bewegung der Pferde entstehen nachtheilige Stöße, welche durch das zweite Räderwerk vermindert werden.

§. 146. Aufg. Die Bedingungen des Gleichgewichtes zwischen der Kraft und dem Widerstande bei dem Göpel, sowie die Geschwindigkeit der liegenden Welle, welche die Bewegung auf die Maschinen überträgt, durch Rechnung zu bestimmen. — Aufl. Es bezeichne *R* den Halbmesser oder Hebelarm *LM* des Göpels, *R'* den Halbmesser *CD* des an der verticalen Welle *AB* befindlichen Winkelrades, *P* die Kraft, mit welcher die beiden an dem Göpel angespannten Pferde die verticale Welle desselben zu drehen streben und *F* die im Berührungspuncte der Zähne der beiden Winkelräder wirkende Kraft; so wird die Bedingung des Gleichgewichtes der beiden Kräfte durch folgende Proportion ausgedrückt:

$$P : F = R' : R.$$

Wenn der Halbmesser des in das Rad DE eingreifenden Winkelrades EG mit R'', der des Stirnrades ST mit R''' und die im Berührungspuncte der Zähne dieses letzten Rades und seines Getriebes TV (Fig. 74) wirkende Kraft mit F' bezeichnet wird; so ergibt sich ebenso:

$$F : F' = R''' : R''.$$

Wenn ferner R^{IV} den Halbmesser des Getriebes TV, R^{V} den der Rolle U und Q die Kraft oder den Widerstand bezeichnet, welcher im Endpuncte des Halbmessers dieser Rolle wirkt; so hat man ebenso:

$$F' : Q = R^{V} : R^{IV},$$

und wenn man diese drei Proportionen in einander multiplicirt, so erhält man, indem man die gemeinschaftlichen Factoren der beiden Glieder des ersten Verhältnisses hinwegläßt:

$$P : Q = R' R''' R^{V} : R R'' R^{IV}.$$

Da die Factoren der beiden Glieder des zweiten Verhältnisses dieser Proportion bekannt sind, so gibt sie das Verhältniß der an dem Göpel wirkenden Kraft zu dem Widerstande oder Gewichte, welches diese Kraft im Gleichgewichte zu halten vermag.

§. 147. Die Geschwindigkeit des zweiten Winkelrades verhält sich zu der des ersten, wie die Anzahl der Zähne des ersten zu der Anzahl der Zähne des zweiten. Wenn t die Anzahl der Umdrehungen bezeichnet, welche das erste Rad in der Minute macht, ferner d die Anzahl seiner Zähne, t' die Anzahl der Umdrehungen, welche das zweite Rad in der Minute macht und d' die Anzahl seiner Zähne; so hat man die Proportion:

$$t' : t = d : d'.$$

Das Stirnrad ST macht während einer Minute dieselbe Anzahl t' von Umdrehungen, als das Winkelrad EG in derselben Zeit. Bezeichnet ferner d'' die Anzahl der Zähne des Rades ST und d''', t'' resp. die Anzahl der Zähne seines Getriebes TV (Fig. 74) und die Anzahl der Umdrehungen, welche dasselbe in der Minute macht; so hat man:

$$t'' : t' = d'' : d'''.$$

Multiplicirt man die correspondirenden Glieder dieser beiden Proportionen in einander und läßt den gemeinschaftlichen Factor t' hinweg, so kommt:

$$t'' : t = dd'' : d' d''',$$

d. h. die Anzahl der Umdrehungen des letzten Rades oder des Getriebes TV, während einer Minute verhält sich zu der Anzahl der Umdrehungen der verticalen Welle oder des Rades, durch dessen Mittelpunct die Axe dieser Welle geht, wie das Product aus den Anzahlen der Zähne des ersten und dritten Rades zu dem Producte aus den Anzahlen der Zähne des zweiten und vierten Rades.

Wenn man drei Paar Zahnräder hätte, so erhielte man eine Proportion, worin jedes Glied des zweiten Verhältnisses aus drei Factoren bestände.

Die letzte Proportion gibt:

$$t'' = \frac{t \times d \times d''}{d' \times d'''},$$

und um ein Zahlenbeispiel zu geben, wollen wir $t = 3$, $d = 84$, $d' = 32$, $d'' = 72$, $d''' = 18$ setzen, und wenn wir diese Zahlen für die Buchstaben substituiren und die Rechnungen verrichten, so finden wir:

$$t'' = \frac{3 \times 84 \times 72}{32 \times 18} = 31,5,$$

woraus erhellet, daß die liegende Welle $N'O'$ in der Minute 31, 5 Umdrehungen macht. Die Pferde beschreiben einen Kreis von dem Halbmesser $LM = R = 3^m,2$ und durchlaufen diesen Kreis in der Minute dreimal, so daß die Geschwindigkeit der Pferde 1 Meter in der Secunde beträgt.

§. 148. Der Göpel ist lange Zeit der einzige Beweger gewesen, welchen man in den Manufacturen, denen kein Wasserstrom zu Gebote stand, zur Uebertragung der Bewegung auf die Maschinen anwenden konnte, und die Anzahl der Pferde richtete sich nach der erforderlichen Kraft. Man hatte Göpel, deren verticale Welle mit sechs horizontalen Armen versehen war, an die man zwölf Pferde, je zwei und zwei neben einander, spannte. Es war eine doppelte Anzahl von Pferden erforderlich, um gehörig ablösen zu können und außerdem noch einige andere Pferde, welche man statt der etwa erkrankenden an die Stelle bringen konnte.

In den meisten Manufacturen sind diese Pferdegöpel seit ungefähr 20 Jahren durch Dampfmaschinen ersetzt; aber obgleich dieser letzte Beweger in dem Maschinenwesen eine förmliche Revolution bewirkt hat, so ist der Pferdegöpel dadurch noch nicht ganz überflüssig gemacht, sondern noch in vielen Etablissements, welche nicht fortwährend in Thätigkeit sind, und worin man keiner größern Kraft, als die der Pferde oder Ochsen bedarf, im Gebrauche.

Ueber die vorzüglichsten Maschinen, deren man sich in der Baukunst bedient.

§. 149. Wir haben bereits mehrere Maschinen, wie den Hebel, die gewöhnliche Winde, die Erd- oder Schiffswinde und die Rollen betrachtet, deren sich die Arbeiter bei Bauten häufig bedienen. Die Hebelade oder das Hebezeug wird häufig von den Maurern und Zimmerleuten zum Emporheben der Baumaterialien angewandt und ist nichts anders, als eine Radwelle, deren beide hölzernen Pfeiler ein gleichschenkliges Dreieck bilden. Sie sind oberhalb so weit von einander entfernt, daß man eine Rolle zwischen ihnen anbringen kann, welche sich um einen durch diese beiden Pfeiler gehenden eisernen Bolzen drehet. Die Verbindung geschieht durch horizontale, hölzerne Querstäbe, wovon der erste 8 Zoll über der Basis liegt, der zweite 5 Fuß 6 Zoll

davon entfernt ist und die folgenden jedesmal um 2 Fuß von einander abstehen und der Zusammenhang des Ganzen wird durch Splinte bewirkt.

Jeder Pfeiler ist in einer Höhe von 3 Fuß 6 Zoll mit einem Loche durchbrochen, welche Löcher zur Aufnahme der Zapfen der Welle dienen, und die Welle selbst ist, wie die der gewöhnlichen Erdwinde, nach zwei auf einander senkrechten Richtungen ebenfalls mit Löchern durchbrochen, in welche die Stangen oder Hebel gesteckt werden, welche zum Drehen dienen und die Halbmesser des Rades gewissermaßen darstellen.

Das Hebezeug läßt sich auseinander nehmen, um dasselbe nach dem Orte zu transportiren, wo man Gebrauch davon machen will, und nachdem dasselbe wieder zusammengesetzt ist, befestigt man es an schicklich liegenden festen Puncten mit Seilen, wo sich alsdann dasselbe nach der Seite der Last neigt, welche gehoben werden soll. Ueber die am obern Ende des Hebezeuges befindliche Rolle legt man ein Seil von einer hinreichenden Stärke, um den größten Lasten, welche man zu heben hat, widerstehen zu können. Dieses Seil wird mit seinem einen Ende an der Welle und mit dem andern Ende an der Last befestigt, welche man heben will, und wenn die Menschen ihre Kräfte und ihr Gewicht auf die Hebel wirken lassen, welche sie successive in die Löcher der Welle stecken, so wickelt sich das Seil mit der Last auf die Welle und die Last wird gehoben.

§. 150. Die Bedingungen des Gleichgewichtes sind bei dem Hebezeuge dieselben, als bei der Radwelle. Bezeichnet also P die Kraft eines Menschen oder das Gewicht, welches er heben kann, n die Anzahl der an den Hebeln arbeitenden Menschen, Q den Widerstand oder das Gewicht der Last, R die mittlere Länge der Hebel und r den Halbmesser der Welle; so hat man:

$$nP : Q = r : R, \quad Q = \frac{nP \times R}{r}.$$

Zu dem Halbmesser der Welle muß man den des Seiles addiren, und wenn sich das Seil ein oder mehrere Male um sich selbst wickelte, so könnte man, um die Rechnung genauer zu machen, auf die dadurch bewirkte Zunahme des Halbmessers der Welle Rücksicht nehmen, und wenn man endlich das wahre Resultat haben wollte, so müßte man auch die von der Reibung und der Steifigkeit des Seiles herrührenden Widerstände in Betracht ziehen.

Von den Krahnen und einigen andern Maschinen, welche man zum Heben der Baumaterialien anwendet.

§. 151. Die bei großen Bauten zum Heben der Baumaterialien angewandten Krahne werden aus Bauholz gemacht und bestehen aus einer verticalen Welle und einem schiefen Arme. Die verticale Welle ruhet auf einem gut befestigten Fuße und erhält ihre feste Lage durch starke Balken von Bauholz; an ihrer Spitze befindet sich ein eiserner, kegelförmiger Zapfen, welcher in ein in dem schiefen Arme befindliches Zapfenloch tritt, und durch Drehung der verticalen Welle kann man alsdann die Last, nachdem sie gehoben ist, in einen beliebigen Punct

des von dem Endpuncte des schiefen Armes des Krahnes beschriebenen Kreisumfanges bringen.

An dem Krahne wird eine Radwelle angebracht, deren Rad in der Nähe des Umfanges mit Spillen versehen ist, die auf der Ebene des Rades senkrecht und ungefähr 1 Fuß von einander entfernt sind. Das Seil wird mit einem Ende an der Welle befestigt, worauf man es über eine feste Rolle leitet, welche sich am Ende des schiefen Armes des Krahnes befindet, indem man dasselbe über schicklich angebrachte Leitrollen gehen läßt. Hierauf befestigt man die Verlängerung dieses Seiles an der zu hebenden Last, und wenn alsdann die Menschen das Spillrad drehen, so wickelt sich das Seil auf die Welle und die Last wird gehoben.

Wir beschränken uns auf diese allgemeinen Bemerkungen über die von dem Architecten construirten Krahne, welche ungeachtet vieler zu ihrer Vervollkommnung angestellter Untersuchungen ihren Zweck nur sehr unvollkommen erfüllen. Man hat daher statt der Krahne andere Maschinen angewandt, wovon sogleich die Rede sein wird, und welche einfach und solide construirt, sowie auch leicht anwendbar sind.

§. 152. Die neue Kirche St. Genoveva in Paris, welche im Jahre 1757 nach den Rissen von Soufflot, dessen Nachfolger Rondelet war, angefangen wurde, hat mehrere Male eine andere Bestimmung erhalten. Nach dem Decrete der Nationalversammlung vom 3. April 1797 sollte nämlich dieses neue Gebäude das zur Aufnahme der irdischen Ueberreste großer Männer bestimmte Pantheon werden, und während der Regierung der Bourbons wurde dieses Gebäude zum Pantheon eingerichtet und endlich hat man seit der Revolution vom Juli 1830 die zur Wiederherstellung des Pantheons nöthigen Arbeiten angefangen, welches Gebäude eins der Hauptmonumente der Architectur der Stadt Paris werden wird. Dieses ist das letzte Gebäude, wobei Krahne der vorhin kurz beschriebenen Art angewandt sind, und Rondelet erzählt in seiner Kunst zu bauen, daß er 7 solcher Krahne in Thätigkeit gesehen habe.

Die Magdalenenkirche zu Paris, welche im Jahre 1764 angefangen wurde, hat ebenfalls viele Veränderungen erfahren, sowohl durch die verschiedenen Plane der Architecten, welche successive den Bau derselben leiteten, als durch die veränderte Bestimmung dieses Gebäudes. Unter der Regierung von Bonaparte sollte daraus ein Siegestempel gemacht werden und die Kosten wurden auf 8 Millionen Franken angeschlagen. Die seit 1804 bis zu Anfang des Jahres 1813 vorgenommenen Arbeiten haben zwei Millionen Franken gekostet; allein dieses Project ist in Folge der durch die Wiederkehr der Bourbons nach Frankreich verursachten Umwälzungen und Unglücksfälle wieder aufgegeben und die Ausführung des ersten Entwurfes während der Restauration wieder aufgenommen, und wenn dieses Gebäude vollendet sein wird, so wird es eine der schönsten Kirchen von Paris.

§. 153. Bei dem Baue der Magdalenenkirche hat man statt der Krahne eine neue viel einfachere Maschine angewandt, deren Grund- und Aufriß in Figur 76 und 77 angegeben ist.

Diese neue Maschine besteht aus einer oder mehreren Flaschen, welche an der Spitze eines Gerüstes befestigt sind, welches die Form

einer vierseitigen abgestumpften Pyramide hat. Die Pfeiler sind 4 tannene Balken, die rechteckigen Grundflächen bestehen ebenfalls aus Bauholz und die Seitenflächen sind durch Querstücke, welche parallel zu der Grundfläche sind, und durch schiefe sich durchkreuzende Bänder befestigt. Die 4 tannenen Balken, welche die Pfeiler bilden, haben unten 1 Fuß und oben 8 Zoll 6 Linien ins Gevierte und sind 69 Fuß lang.

An der obern Grundfläche befindet sich ein starkes Querstück *L* von Eichenholz (Fig. 77), welches gehörig befestigt und mit einem Bolzen oder eisernem Bande versehen ist, welches unterhalb in einen Ring ausläuft, woran die feste Flasche *M* mit drei Rollen befestigt ist. Nachdem das Seil über die Rollen dieser festen Flasche und über die der beweglichen Flasche *N* gegangen ist, geht es über die an den Bändern des untern Theiles des Gerüstes befestigte Rolle *K*, von wo aus dasselbe über andere feste Rollen *K'*, *K''* geht, bis es zur Welle der Erdwinde gelangt, woran es mit einem Ende befestigt ist. Durch den untern Theil der Welle geht der horizontale Hebel *GOG'* (Fig. 76^b), mit Hilfe dessen die Maschine in Bewegung gesetzt wird.

Die Zeichnung stellt die Maschine so dar, wie sie zum Heben der Steine einer zu errichtenden Säule, deren Grundriß in Figur 76^a angegeben ist, eingerichtet war. Den zu hebenden Stein bringt man unter den Flaschenzug, und wir wollen annehmen, daß dieser Stein in dem Schafte der Säule zu liegen kommen soll, so hat er die Form eines halben Cylinders, ist in der Mitte seiner Dicke mit einem Loche durchbrochen, welches durch den Mittelpunct und durch die Mitte des Bogens geht, und in welches ein eiserner Stab gebracht wird, an dessen obern Theile sich ein Ring befindet, welchen man an den Haken der beweglichen Flasche hängt, während der untere Theil dieses Eisenstabes in die in der Mitte einer kleinen Eisenplatte, welche vermittelst eines durch den Eisenstab gehenden Splintes an dem Steine befestigt wird, befindliche Oeffnung tritt. Außerdem befinden sich in dem Gerüste noch andere Holzstücke, auf welche Bretter gelegt werden, um in der Höhe, bis auf welche der Stein gehoben werden muß, einen festen Stand zu haben. Wenn eine Säule vollendet ist, so hebt man das Gerüste der Maschine mit Hebeln, um dasselbe auf Rollen fortzuschieben, so daß die Maschine mit ihrem ganzen Zubehöre neben einer der übrigen zu errichtenden Säulen zu stehen kommt. Wir haben diese Maschine bei dem Baue der Magdalenenkirche in Paris mehrere Male beobachtet. Am 24. November 1824 hatte man 5 Pferde an einen Blockwagen gespannt, um einen der Steine des Kapitäls der Säule nach der Maschine zu fahren, und den 3. December darauf stellte man das Kapitäl der letzten Säule auf. Es wurden zwei Flaschenzüge und zwei Erdwinden, die eine auf der Süd- und die andere auf der Nordseite des Gebäudes in der Richtung der Maschine angewandt, um einen Stein von ungefähr 5000 Kilogr. Gewicht zu heben. Den 10. Mai 1826 wurden die Steine zu dem Plattgewölbe der äußern Gallerie zwischen der Mauer und den Säulen auf der westlichen Seite aufgewunden, und einer dieser Steine (Fig. 78) wurde auf einen Blockwagen von 4 Menschen und 2 Pferden unter die Maschine gebracht.

An der beweglichen Flasche befindet sich ein Haken mit 4 Zweigen, woran 4 gleiche Seile befestigt sind, wovon jedes an dem andern Ende einen Ring trägt. Um den Stein von dem Blockwagen abzuladen, legt man um denselben zwei Seile, welche man an der beweglichen Flasche befestigt, und damit derselbe nicht durch den Druck der Seile beschädigt wird, legt man an die Berührungsstellen kleine Strohsäcke. Hierauf wird die Erdwinde herum gedrehet, und wenn der Stein auf eine hinreichende Höhe gehoben ist, so ziehen die Arbeiter den Blockwagen weg, dann wird die Erdwinde nach entgegengesetztem Sinne gedrehet, damit der Stein auf den Boden herabsinkt, indem er mit dem einen Rande auf Steine oder Holzstücke zu liegen kommt, so daß er eine geneigte Lage hat. Der Stein wird mit drei rechtwinkligen Löchern durchbrochen, welche auf einer zu der größten Seite parallelen Linie liegen und $5^1/_2$ Zoll lang und 4 Zoll breit sind. In das mittlere Loch legt man zuerst ein Eisenstück (Fig. 79), welches über die beiden entgegengesetzten Seiten hinwegreicht, schiebt an die vorspringenden Theile die Ringe der beiden an dem vierzackigen Haken befestigten Seile und drehet die Erdwinde, um den Stein horizontal zu legen. Hierauf nimmt man den Eisenstab aus dem mittleren Loche heraus, legt denselben nebst einem zweiten gleichen in die beiden andern Löcher und schiebt die Ringe der vier Seile des vierzackigen Hakens an die vorspringenden Theile der beiden Eisenstäbe; so ist auf diese Weise der Stein an der beweglichen Flasche gehörig befestigt und diese ganze Arbeit müssen die Arbeiter in 15 Minuten verrichten können. An den Hebelarm der Winde werden alsdann die beiden Pferde gespannt, welche den Stein gezogen hatten, und wenn derselbe eine unregelmäßige Form hat, so kann man sein Volumen nur näherungsweise berechnen. Wir haben die Dimensionen eines andern ähnlichen Steines gemessen und gefunden, daß man sich wenig von der Wahrheit entfernt, wenn man denselben als ein rechtwinkliges Parallelepipedum betrachtet, dessen Grundfläche 5 Fuß $7^1/_2$ Zoll lang und 4 Fuß 4 Zoll breit ist, und dessen Höhe 1 Fuß 6 Zoll beträgt. Verwandelt man diese Zahlen in gewöhnliche Brüche und bildet das Product derselben, so findet man, daß das Volumen des Steines ungefähr

$$\frac{45}{8} \times \frac{13}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{15 \times 13}{16} = 36,56 \text{ Cubikfuß ist,}$$

und um das Gewicht des Steines zu finden, wollen wir bemerken, daß der Cubikfuß desselben ungefähr 160 Pfund wiegt, so daß man das eben gefundene Volumen nur durch 160 zu multipliciren braucht, um das gesuchte Gewicht zu erhalten, welches folglich $= 160$ Pfd. $\times 36,56 = 5849,6$ Pfd. ist.

Ein anderes Mal haben wir die Länge des Hebels GO (Fig. 77) der Erdwinde gemessen und diese Länge, von der Axe der Welle bis zu dem Puncte, wo das Pferd angespannt wird oder ungefähr 8 Zoll vom Ende des Hebels gemessen, $=$ 8 Fuß 5 Zoll gefunden, und dieses ist der Halbmesser des Kreises, welchen das Pferd beschreibt. Ferner haben wir beobachtet, daß das Pferd drei Umgänge in der Minute machte, woraus folgt, daß seine Geschwindigkeit 2 Fuß 7 Zoll in der Secunde betrug.

Steinbruchwinde.

§. 154. Die Maschine, deren man sich bedient, um die Steine aus dem Bruche zu fördern, ist eine Radwelle (Fig. 80 und 81), welche nach denselben Principien aus Bauholz construirt ist, wie die in §. 117 beschriebene und sie wird ein Steinbruchrad genannt, weil das Rad derselben, welches einen großen Durchmesser hat, am meisten in die Augen fällt, und um zugleich den speciellen Zweck der Maschine anzugeben. Das Rad ist mit Spillen versehen, welche auf seiner Ebene senkrecht sind, weswegen man dasselbe bei andern Anwendungen auch wohl das Spillrad nennt. Dieses Rad wird durch Menschen herumgedrehet, indem sie sowohl mit ihrem Gewichte, als mit den Händen an den höchsten Spillen, welche sie erreichen können, darauf wirken. Man muß eine hinreichende Anzahl von Menschen anwenden, damit das Moment ihres Gewichtes und ihrer Kraft größer ist, als das Moment des an dem sich auf die Welle wickelnden Seile befestigten Steines, weil, wenn diese beiden Momente einander gleich wären, das Gleichgewicht stattfinden würde (§. 118). Wir haben ein Steinbruchrad gesehen, woran 9 Menschen arbeiteten, aber die Summe ihrer Kräfte war zu gering, um den an dem Seile befestigten Stein heben zu können und es mußte daher noch ein zehnter Arbeiter angewandt werden, und von diesen 10 Arbeitern waren auf jeder Seite des Rades, welches nahe an seinem Umfange 90 Spillen hatte, die um 1 Fuß von einander abstanden, 5 angebracht. Die Anzahl der Spillen und die Größe des Umfanges dieses Rades sind ungewöhnlich; denn in andern Steinbrüchen haben diese Räder nur ungefähr 60 Spillen und das in Figur 80 und 81 dargestellte hat 16 Fuß im Durchmesser und 45 Spillen.

§. 155. Wenn die Kraft P am Umfange des Rades nach der Richtung der Tangente oder senkrecht auf dem horizontalen Halbmesser CA in dem Endpuncte desselben wirkte; so würde die Bedingung des Gleichgewichtes, wenn Q das Gewicht des an dem auf dem Halbmesser CB der Welle in seinem Endpuncte senkrechten Seile aufgehangenen Steines bezeichnet, durch folgende Proportion ausgedrückt:

$$P : Q = CB : CA.$$

Aber die an dem Rade von 8 Fuß Halbmesser angebrachten Arbeiter können auf keine über dem horizontalen Halbmesser CA liegende Spille wirken, wofern sie nicht auf die Spillen steigen, und alsdann nähern sich ihre Schwerpuncte dem Mittelpuncte des Rades.

Wir wollen annehmen, daß Cd der Halbmesser ist, durch dessen Endpunct die Resultante p der Kräfte oder Gewichte geht, welche auf das Rad wirken, so ist diese Resultante nach der Verticale dp gerichtet, deren Verlängerung den horizontalen Halbmesser CA in a schneidet. Man kann sich also vorstellen, daß der Angriffspunct dieser Resultante p in dem Puncte a des horizontalen Halbmessees CA liegt, so daß man Ca statt CA zum vierten Gliede der vorhergehenden Proportion nehmen muß, wodurch man erhält:

$$Q = \frac{P \times Ca}{CB}.$$

Man kann die Kraft eines Menschen, welcher durch sein eigenes Gewicht wirkt, auf 60 Kilogr. anschlagen, und wenn diese Kraft in dem Endpuncte *a* des Hebels *Ca* von der Länge von 6 Fuß 9 Zoll oder 81 Zoll angebracht ist und der Halbmesser *CB* der Welle 8 Zoll beträgt; so hat man:

$$Q = \frac{60 \times 81}{8} = 7,5 \times 81 = 607,5 \text{ Kilogr.}$$

Hieraus sieht man, daß ein Mensch an den Spillen eines Rades von 8 Fuß im Durchmesser ein Gewicht von 607, 5 Kilogr. im Gleichgewichte erhalten kann. Wir haben aber bei dieser Berechnung den Halbmesser des Seiles nicht in Betracht gezogen, welcher zu dem der Welle hinzuaddirt werden muß. Wenn man aber von dem Gleichgewichte zu der Bewegung übergehen wollte, so müßte man auch noch den von der Steifigkeit des Seiles und von der Reibung herrührenden Widerstand in Rechnung bringen, wodurch das Gewicht, welches ein Mensch zu heben im Stande wäre, ungefähr auf 500 Kilogr. reducirt würde.

Das Spillrad macht in der Minute unter der Wirkung der daran angebrachten Menschen ungefähr eine Umdrehung, und da der Halbmesser der Welle 8 Zoll beträgt, so beträgt die Länge ihres Umfanges 4 Fuß 2 Zoll 3 Linien oder 1^m, 36 und dieses ist die verticale Höhe, um welche der Stein in einer Minute gehoben wird.

Das Spillrad wird nicht bloß zum Emporziehen der Steine aus den Steinbrüchen angewandt und hat zuweilen 2 Räder, wo es alsdann von dem Architecten ein Kreuzhaspel genannt wird. Derselbe kann nur durch Menschen in Bewegung gesetzt werden, und jedesmal, wo es die Umstände gestatten, ist es vortheilhaft, die Erdwinde statt desselben anzuwenden, um die Unglücksfälle zu vermeiden, welchen die an dem Spillrade arbeitenden Menschen ausgesetzt sind, wenn das Seil zerreißt. Uebrigens kann man an der Erdwinde Menschen und Pferde anwenden, wenn man sie wie die in Figur 77 dargestellte einrichtet, deren man sich bei dem Baue der Magdalenen-Kirche in Paris bedient hat, wodurch man eine größere Kraft mit geringern Kosten erhält.

Tragbare Radwelle mit Zahnrädern.

§. 156. Die vor ungefähr 20 Jahren in England von Manby und Wilson eingeführte tragbare Radwelle wird in Werkstätten, wo man große Lasten zu heben hat, und bei Bauten allgemein angewandt. Diese Radwelle (Fig. 82 und 83) befindet sich in einem Gerüste, welches aus zwei gußeisernen Stücken *A*, *A* bestehet, welche die Form gleichschenkliger Dreiecke haben, auf ihren kleinern Seiten ruhen und mit drei Eisenstäben *a*, *b*, *c* parallel zu einander verbunden sind. Diese Stäbe haben Absätze und ihre Enden laufen in Schrauben aus, so daß man das Ganze durch Schraubenmuttern fest verbinden kann. Die Welle *B*, auf welche sich das Seil wickelt, ist zu den drei Verbindungsstäben parallel und durch dieselbe gehet nach ihrer Axe ein vierkantiger Eisenstab, woran das Zahnrad *C* befestigt ist. Die Zapfen dieser Welle drehen sich in kupfernen, an den dreieckigen Stücken des

Gestelles angebrachten Kreisen. Das Getriebe D, welches in das Rad C greift, ist auf der zu der Welle B parallelen Welle d befestigt, drehet sich in kupfernen Zapfenlagern und die beiden Kurbeln lmn, mit welchen die Maschine in Bewegung gesetzt wird, sind durch Schraubenmuttern an dieser letzten Welle befestigt. An dem Verbindungsstabe a befindet sich ein Sperrhaken k, welcher gegen den Absatz der Welle d trifft, und wenn man die Auslösung bewirken will, so braucht man nur diesen Haken zu heben und an der Welle d zu ziehen, wodurch das Getriebe verschoben wird, und alsdann kann sich das Rad sowohl, als die Welle frei drehen. Um die rückgängige Bewegung zu verhindern, ist es zweckmäßig, an der Welle d ein Sperrrad und an dem Stabe a eine Sperrklinke anzubringen.

Wenn man den Apparat anwenden will, so muß derselbe erst gehörig befestigt sein und bei einzelnen Anwendungen legt man auf die untern Querstäbe b und c Bretter, welche man mit hinreichend schweren Gewichten belastet. Wenn man mit der Maschine an demselben Orte viele schwere Lasten heben will, so muß man sie mit Bolzen auf einer Verbindung von Bauholz befestigen.

§. 157. Die eben beschriebene tragbare Radwelle wird oft auch mit einem Maste (Fig. 84) zum Heben der Baumaterialien angewandt. Das Seil ist an seinem einen Ende mit einer Schnur befestigt, welche durch ein kleines Loch i gehet, welches sich in einer der über die Oberfläche der Welle hinwegragenden Platten befindet, oder vielmehr an dem Haken t. Dieses Seil gehet über drei an dem obern Theile des Mastes angebrachte feste Rollen N, N', N'' und an seinem andern Ende befindet sich ein Haken, woran die zu hebende Last aufgehangen wird. Wir wollen nun die Bedingungen des Gleichgewichtes zwischen der Kraft P, welche auf die Kurbel der tragbaren Radwelle wirkt, und der Last Q suchen, welche an dem Seile aufgehangen ist, welches über die an dem Maste angebrachten festen Rollen N'', N', N gehet und sich auf die Welle B wickelt.

Es bezeichne R den Halbmesser der Kurbel, r den des Getriebes D, R' den des Rades C und r' den der Welle oder Trommel B; so haben wir folgende Proportionen (§. 111):

$$P : q = r : R$$
$$q : Q = r' : R',$$

woraus folgt:

$$P : Q = rr' : RR', \quad Q = \frac{PRR'}{rr'}.$$

Zur Berechnung des zweiten Theiles dieser Formel wollen wir bemerken, daß die Kraft eines an der Kurbel wirkenden Menschen ungefähr 12, 5 Kilogr. beträgt. Setzen wir daher $P = 12,5$, $R = 14$ Zoll, $r' = 3$ Zoll, die Anzahl der Zähne des Getriebes $D = 10$ und die des Rades $C = 72$, welche wir resp. statt ihrer Halbmesser r und R' nehmen können; so erhalten wir, wenn wir diese Zahlenwerthe für die entsprechenden Buchstaben substituiren:

$$Q = \frac{12,5 \times 14 \times 72}{10 \times 3} = 420 \text{ Kilogr.}$$

Das eben gefundene Gewicht von 420 Kilogr. ist 36, 6mal größer, als die Kraft von 12, 5 Kilogr., welche ein Mensch an der Kurbel ausüben muß, um das Gleichgewicht herzustellen.

§. 158. Figur 85 stellt den Aufriß einer zu Fourchambault von Delamorinière in den Werkstätten von E. Martin construirten tragbaren Radwelle dar.

Zwei gleichschenklige gußeiserne Dreiecke, welche wie bei der eben beschriebenen Radwelle durch drei Eisenstäbe *a*, *b*, *c* mit einander verbunden sind, bilden das Gerüste oder Gestell und an jedem dieser Dreiecke befindet sich gegen die Mitte ihrer Höhe ein zu der Basis paralleles Stück *M*, welches nach Außen um eine Länge überragt, die der zwischen den Seiten des Dreieckes liegenden Länge ungefähr gleich ist. Diese Stücke, welche die Seitenflächen dieses Gestelles verstärken, sind gegen ihre Enden mit zwei Löchern durchbrochen, welche einander, wie die der Verbindungsstäbe entsprechen, und mit kupfernen Kreisen ausgelegt sind, damit sich die beiden gußeisernen Wellen leichter um ihre Zapfen drehen können. Die Welle, welche in die innerhalb der Dreiecke befindlichen Löcher tritt, geht durch die Axe des Cylinders oder der Trommel und auf dieser Welle sind an den Enden der Trommel zwei Zahnräder *C* befestigt. An dem einen Ende der zweiten Welle sind auf der dem Rade *C* entsprechenden Seite ein Zahnrad *E* und ein Getriebe *F* befestigt und an dem andern Ende dieser Welle befindet sich ein Getriebe

Diese kurze Beschreibung ist hinreichend, um das Spiel der Maschine zu begreifen. Das an der Kurbelwelle befindliche Getriebe *D* greift in das Rad *E*, an dessen Welle sich das Getriebe *F* befindet, welches in das Rad *C* greift und das zweite Getriebe dieser Welle greift in das an dem andern Ende der Trommel befindliche Rad. Die Wirkung der Kraft wird also durch das zweite Räderwerk auf den Widerstand oder auf die an dem sich auf die Trommel wickelnden Seile befestigte Last übertragen. Wenn die drei Räder, so wie ihre Getriebe einander gleich sind, und man berechnet dieses Räderwerk, so findet man, daß der Vortheil, welchen es gewährt, doppelt so groß ist, als der der Radwelle, woran sich nur ein Rad und ein Getriebe befindet.

§. 159. Zu Charenton hat man einige tragbare Radwellen mit zwei Getrieben auf der Kurbelwelle, welche in zwei an der Trommelwelle befestigte Räder eingreifen, construirt, so daß dasselbe Räderwerk zweimal vorkommt und der Vortheil, welchen diese zusammengesetzten Radwellen gewähren, ist derselbe, als bei der Radwelle, welche nur ein einziges Rad und Getriebe hat.

Zu der einfachen tragbaren Radwelle braucht man ungefähr 228 Kilogr. Gußeisen, 47 Kilogr. Schmiedeeisen und 5 Kilogr. Kupfer, also zusammen 280 Kilogr., und wenn sie fertig ist, so beträgt ihr Gewicht ungefähr 270 Kilogr.

Von den in den Häfen angewandten Krahnen.

§. 160. Die Krahne sind in den Häfen von einem großen Nutzen, weil sie das Auf- und Abladen der in den Schiffen enthaltenen Materialien, welche in kleinern Fahrzeugen weiter transportirt werden

müssen, sehr erleichtern. Der erste in Paris zu diesem Zwecke angewandte Krahn ist etwa vor 30 Jahren von Albert construirt und hat zwei Flügel. Der Mechanismus desselben besteht aus einer Radwelle, an deren beiden Enden sich ein Drilling oder Drehling befindet, d. h. eine Trommel, welche aus zwei kreisförmigen Grundflächen bestehet, die durch 19 Zoll lange runde Stäbe oder Triebstöcke mit einander verbunden sind. Die Radwelle ist so eingerichtet, daß bei jedem Rade zwei Menschen auf einer Bank sitzen, welche sich mit dem Rücken gegen die Bretter eines Verschlages stützen und mit ihren Füßen auf die Triebstöcke des Drillings treten, so bald sie in die Höhe des Mittelpunctes des Rades kommen. Man kann auch noch zwei andere Menschen anwenden, welche sich an einer oberhalb angebrachten horizontalen Stange festhalten und mit ihren Füßen auf die Triebstöcke wirken. Der Halbmesser der Räder beträgt 8 Fuß und der der Welle muß nach den bei dieser Art von Radwellen angenommenen Dimensionen 8 Zoll betragen.

Wenn P die Kraft bezeichnet, welche die Menschen auf den Drilling ausüben und Q die Last, welche an dem sich auf den Cylinder wickelnden Seile aufgehangen wird, so haben wir im Falle des Gleichgewichtes:

$$P : Q = 8 : 96 = 1 : 12.$$

Die Wirkung der Kraft wird durch die Anwendung einer beweglichen Rolle, um welche man das Seil legt, verdoppelt und die Last wird an dem Biegel dieser Rolle aufgehangen. Wenn man annimmt, daß jeder der vier auf den Bänken sitzenden Menschen eine Kraft von 60 Kilogr. ausübt, so ist das Gewicht der Last, welche sie im Gleichgewichte zu erhalten vermögen $= 60 \times 4 \times 24 = 5760$ Kilogr.

Der Albertsche Krahn wurde zuerst in dem St. Nicolaushafen aufgestellt und gegenwärtig befindet er sich in dem Hafen von Orsay, wo er hauptsächlich zur Abladung der Steine dient. In demselben Hafen hat man vor einigen Jahren zwei andere Krahne gebaut, bei welchen man statt der Räder der Radwelle gußeiserne Zahnräder mit Kurbeln anwendet.

§. 161. Am Bord des Hafens von Villette hat man Krahne von Bauholz nach demselben Systeme, wie die in den Häfen von England gebräuchlichen aufgestellt, und Krahne derselben Art mit einigen Vervollkommnungen werden bei dem Abladen der Schiffe an der Bucht von St. Duen angewandt. Die Figuren 86 und 87 stellen eine Seitenansicht und einen Grundriß dieser Krahne dar.

Dieser Krahn ist aus Eichenholz verfertigt und besteht aus einem verticalen Schafte A mit zwei Bändern B, B, welche den Flügel bilden und mit Bolzen an den beiden entgegengesetzten Seiten des Schaftes befestigt sind, und um ihnen noch mehr Solidität zu geben, ist darunter noch ein drittes Band C mit einem Ende vermittelst einer Nute an dem Schafte befestigt, während das andere Ende zwischen den beiden ersten Bändern hindurch geht, womit es gegen das Ende des Flügels zu mit Bolzen befestigt ist. Man sieht, daß diese ganze Verbindung ein schiefwinkliges Dreieck bildet. Die verticale Welle oder der Schaft ist an seinem untern Ende mit einem Bande versehen und

hat an diesem Ende einen in der Mitte der Grundfläche gehörig befestigten Zapfen. Die Welle geht durch das cylindrische Loch einer gußeisernen Platte *D*, die mit vier Bolzen an dem Mauerwerke befestigt ist. Dieselbe Welle geht bis zu einer Tiefe von 3^m, 4 in eine Vertiefung und ihr Zapfen stützt sich auf ein in einem Quadersteine befestigtes Zapfenlager. An der Platte *D* sind 8 kleine Laufräder angebracht, um die Reibung bei der Drehung des Krahnes zu vermindern.

Der Mechanismus dieses Krahnes besteht aus einer Radwelle mit einem Räderwerke, welches nach Belieben einfach oder doppelt sein kann. Die Zapfenlager, worin sich die Wellen der Zahnräder, die der Getriebe und der Welle *l* drehen, befinden sich auf zwei an den beiden entgegengesetzten Seiten der verticalen Welle *A* liegenden gußeisernen Unterlagen *a*, *a*. An den Enden der Wellen der Getriebe kann man zwei Kurbeln anbringen, welche mit einer Schraubenmutter befestigt werden.

Das Bremsrad *f*, welches einen kleinern Durchmesser hat, als das Zahnrad *b*, womit es zusammengegossen ist, wird von einem dünnen Stahlstreifen umgeben, welcher mit seinem einen Ende in dem Drehungsmittelpuncte *i* des Hebels *h* und mit seinem andern Ende an dem Ende *k* desselben Hebels befestigt ist. Wir werden bald sehen, welche Wirkung man mit dieser Vorrichtung hervorbringen kann.

Auf der Oberfläche der Welle *l* befindet sich ein rechteckiger, schraubenförmiger Einschnitt von 7 oder 8 Windungen. An dem einen Ende der Welle befindet sich ein Haken, woran man das eine Ende der Kette befestigt, welche zur Uebertragung der Wirkung der Kraft auf die zu hebende Last dient. Wenn man die Welle oder Trommel *l* drehet, so daß sich die Kette aufwickelt, so tritt der Theil der Ringe oder der platten Kettengelenke, welcher daran stößt, in den Einschnitt und der andere Theil derselben Kettengelenke ist ungefähr mit denen, welche auf die zwischen den Einschnitten befindlichen Theile der Oberfläche der Welle fallen, in gleicher Höhe und der Zweck dieser Einrichtung ist, daß sich die Kette bei ihrem Aufwickeln auf die Welle oder Trommel nicht drehet. Zwischen den Bändern *B*, *B* und *C* befindet sich eine Rolle *m*, auf welcher die Kette ruhet, damit sie sich nicht zwischen der Rolle *n* und der Welle zu sehr biegt. Die Kette liegt in der Vertiefung, welche sich am Umfange dieser Rolle befindet und der Haken an ihrem einen Ende greift in den an der zu hebenden Last *Q* befindlichen Ring.

§. 162. Aufg. Die Bedingungen des Gleichgewichtes zwischen der Kraft *P*, welche auf die Kurbel des Krahnes wirkt und der Last *Q* zu finden, welche an dem sich auf die Welle oder Trommel wickelnden Seile hängt. — Aufl. Wenn *R* den Halbmesser der Kurbel, *r* den des Getriebes *c* und *q* die Kraft bezeichnet, welche an dem Ende des Halbmessers *r* wirken müßte, um der Kraft *P* das Gleichgewicht zu halten; so hat man die Proportion:

$$P : q = r : R.$$

Bezeichnet R' den Halbmesser des Rades *b* und r' den des Getriebes c' und nehmen wir an, daß eine an dem Endpuncte r' angebrachte Kraft q' der Kraft *q* das Gleichgewicht hält; so verhält sich:

$$q : q' = r' : R',$$

und wenn R'', r'' resp. die Halbmesser des Rades b' und der Welle l bezeichnen, so hat man:

$$q' : Q = r'' : R''.$$

Werden diese drei Proportionen in einander multiplicirt und die gemeinschaftlichen Factoren des ersten Verhältnisses hinweg gelassen, so findet man:

$$P : Q = rr'r'' : RR'R'', \; P = \frac{Qrr'r''}{RR'R''}.$$

Um diese Formel auf ein Zahlenbeispiel anzuwenden, wollen wir zunächst bemerken, daß man für die Halbmesser der Zahnräder und ihrer Getriebe die Anzahlen ihrer Zähne substituiren kann. Die Kraft P wirkt an der Kurbel von dem Halbmesser $R = 0^m, 4$, der Halbmesser der Welle l ist $r'' = 0^m, 12$ und die Kette ist an einem der fünf kupfernen Kessel zweier Dampfmaschinen von 80 Pferdekräften befestigt. Dieser Kessel ist in Figur 86^a in einer Längenprojection dargestellt. Das Gewicht des Kessels oder der Last Q wollen wir zu 6000 Kilogr. annehmen. Die Räder b, b', deren Halbmesser durch R' und R'' ausgedrückt sind, haben jedes 75 Zähne und jedes ihrer Getriebe c und c' hat 9 Zähne. Werden diese Zahlen für die entsprechenden Buchstaben in die vorhergehende Formel substituirt, so erhält man:

$$P = \frac{6000 \times 0,12 \times 9 \times 9}{0,4 \times 75 \times 75} = 25,9,$$

	$log.\ 6000$	=	3,7781513
	$log.\ 0,12$	=	− 1,0791812
	$2\ log.\ 9$	=	1,9084850
dec. Erg. 6	$log.\ 0,4$	=	0,3979400
dec. Erg. 2	$log.\ 75$	=	6,2498774
	$log.\ 25,92$	=	11,4136349.

Diese Kraft von 25, 9 Kilogr. ist etwas kleiner als $\frac{1}{230}$ des Gewichtes der Last und der mittlern Kraft zweier an den Kurbeln wirkender Menschen gleich.

Bei den gewöhnlichen Anwendungen hat die Last kein so beträchtliches Gewicht als in dem vorhergehenden Beispiele, und alsdann hebt man den Sperrhaken o (Fig. 87), welcher zwischen die Absätze eines unter die Kurbelwelle parallel zu derselben liegenden Stabes greift, dessen beide Enden in die gußeisernen Stücke a, a treten, worauf sich die Zapfenlager der Wellen befinden. Ist dieser Haken gehoben, so schiebt man die Kurbelwelle vorwärts, um die Ausrückung des Getriebes c zu bewirken, worauf man die Kurbeln an die Welle des Rades b, woran sich das Getriebe c' befindet, welches in das Rad b' greift, bringt. Durch diese Einrichtung erhält man ein einfaches Räderwerk, welches weit schneller zum Ziele führt, als das doppelte.

§. 163. Wenn die Last auf eine hinreichende Höhe gehoben ist, so muß man, um sie über die Stelle zu bringen, wo sie zu liegen kommen soll, den Krahn vermittelst des Hebels h (Fig. 86), welcher

in die an einer Seite des Schaftes befindliche Krampe gesteckt ist, herumdrehen. Hierauf überläßt man die Kurbeln sich selbst, damit die Last herabsinkt; aber zugleich hebt ein Arbeiter den Bremshebel *e*, so daß die Stahlplatte fast den ganzen Umfang des von ihr umgebenen Rades berührt und die Geschwindigkeit nach Belieben durch die Reibung verzögert werden kann, und wenn der Arbeiter seine ganze Kraft auf den Hebel *e* ausübte, so würde die Reibung des Stahlstreifens auf dem Radumfange die Last ganz zum Stillstehen bringen können.

§. 164. Seit dem Anfange des 19. Jahrhunderts wird das Gußeisen fast allgemein bei Constructionen und namentlich bei denen der Maschinen angewandt. Die englischen Ingenieure und Künstler haben besonders durch die Vervollkommnung des Gußeisens eine völlige Umwälzung in der practischen Mechanik und der Maschinenbaukunst bewirkt.

Bei der Construction der in großen Werkstätten und in den Häfen angewandten Krahne haben sich die englischen Ingenieure statt des Holzes des Gußeisens bedient, wodurch diese Maschinen fester und dauerhafter geworden sind und den Einwirkungen der Atmosphäre besser wiederstehen können.

Die aus der Edinburger Encyclopädie entlehnten Figuren 88 und 89 stellen die Seiten- und Vorderansicht eines Krahnes von Gußeisen und Holz dar. Derselbe besteht aus einem gußeisernen Schafte oder aus einer verticalen Welle *A*, einem schiefen eichenen Bande *B*, welches den Flügel bildet, und aus einem zweiten ebenfalls eichenen Bande *C*, wodurch der Flügel die gehörige Festigkeit bekommt, und diese drei fest mit einander verbundenen Stücke bilden ein schiefwinkliges Dreieck, wie das in Figur 86. Dem Schafte hat man die gehörige Form gegeben, um die nöthigen Stücke daran anbringen zu können und es besteht aus zwei Zweigen (Fig. 89), welche unterwärts mit einander verbunden sind und einen spitzen Winkel mit einander bilden, welcher von den Querstücken *t*, *t'*, *t''* durchschnitten wird. Ueber dem dritten Querstücke *t''* bilden die beiden Schenkel einen halben Cylinder und ihre Verlängerungen sind bis zu der Spitze *s* zu einander parallel, wo sie gekrümmt sind und sich dann nach der horizontalen Richtung vereinigen. Der untere Theil des Schaftes läuft in einen Zapfen aus und geht in verticaler Richtung in ein Loch von ungefähr 10 Fuß Tiefe, indem er durch ein in der Mitte einer cylindrischen gußeisernen Platte befindliches Loch tritt, und der untere Zapfen kommt in einem im Boden der Vertiefung befindlichen Zapfenlager zu stehen.

Figur 90 stellt einen horizontalen Durchschnitt dar, worin man die Verbindung des Schaftes mit der gußeisernen Platte sieht, in welcher sich fünf Frictionsräder befinden, um die Reibung zu vermindern, wenn der Krahn um seinen Zapfen gedrehet wird. Zwei an dem Bande *B* befindliche Rollen *m* und *m'* und die an seinem Ende angebrachte feste Rolle *n* dienen dazu, dem Seile, woran die zu hebende Last befestigt ist, die gehörige Richtung zu geben. Die Länge dieses Bandes beträgt 21 englische Fuß; sein Querschnitt ist nahe bei dem Schafte 12 Zoll lang und $10^1/_2$ Zoll breit und gegen das Ende, wo sich die feste Rolle befindet, hat diesen Querschnitt eine Länge von 16 Zoll und eine Breite von 12 Zoll, während der Querschnitt

des zweiten Bandes *C* ein Quadrat von einer Seite von 10 Zoll Länge ist.

§. 165. An dem Schafte dieses Krahnes ist eine Welle mit Zahnrädern und ihren Getrieben angebracht und die Zapfenlager, worin sich die Zapfen der Wellen dieser Räder, die der Wellen der Getriebe und die der Welle *l* drehen, liegen auf Stücken, welche zu den Schenkeln des Schaftes parallel sind. Der Halbmesser der Kurbel beträgt 18 englische Zoll, der der Welle oder Trommel *l*, auf welche sich die Kette wickelt, beträgt 8 Zoll und die Halbmesser der Zahnräder, die ihrer Getriebe und die Anzahl ihrer Zähne sind in folgender Tafel angegeben.

Räder und Getriebe.	Halbmesser.		Anzahl der Zähne.
	Englische Zoll.	Centimeter.	
b	$20^1/_8$	51,097	84
c	$2^5/_8$	6,665	10
b'	$18^7/_8$	47,923	80
c'	$3^7/_8$	9,838	15
b''	$14^5/_8$	37,133	62
c''	$7^7/_8$	19,994	32
b'''	$24^3/_8$	61,888	100
c'''	$2^7/_8$	7,299	11

Zwischen dem Getriebe *c'''* und dem Rade *b'''* findet ein beständiger Eingriff statt und man kann dieses einfache Räderwerk mit einem beliebigen der drei übrigen einfachen Räderwerke sich drehen lassen. Nimmt man die in Figur 89 dargestellte Einrichtung, wobei das aus dem Getriebe *c'* und dem Rade *b'* bestehende einfache Räderwerk das aus dem Getriebe *c'''* und dem Rade *b'''* bestehende einfache Räderwerk herumdrehet; so kann man sich zur Berechnung des zwischen der Kraft und dem Gewichte der Last im Gleichgewichtszustande stattfindenden Verhältnisses der in §. 162 gefundenen Formel bedienen. Diese Formel ist nämlich folgende:

$$\frac{P}{Q} = \frac{r' r''' r}{R R' R'''},$$

wo *R* den Halbmesser der Kurbel, *r'* den des Getriebes *c'*, *R'* den des Rades *b'*, *r'''* den des Getriebes *c'''*, *R'''* den des Rades *b'''*, und *r* den der Welle oder Trommel *l* bezeichnet. Substituirt man in den zweiten Theil dieser Formel für die Buchstaben die ihnen entsprechenden Zahlenwerthe und bemerkt, daß man für die Halbmesser der Räder und Getriebe die Anzahl der Zähne substituiren kann, so erhält man:

$$\frac{P}{Q} = \frac{15 \times 11 \times 20,31}{45,70 \times 80 \times 100} = \frac{67023}{7312000}.$$

Der Werth des Verhältnisses der Kraft zu dem Gewichte der Last ist hier ein ziemlich zusammengesetzter und nicht weiter reducirbarer, gewöhnlicher Bruch. Sucht man aber einen Näherungswerth desselben in den kleinsten Zahlen nach der Methode der Kettenbrüche, so findet man, daß der Werth des in Rede stehenden Bruches zwischen $\frac{1}{109}$ und

$\frac{10}{1091}$ liegt. Aus dem bloßen Anblicke ergibt sich, daß die Kraft größer sein müßte, als wir eben gefunden haben, wenn man das aus dem Getriebe c'' und dem Rade b'' bestehende einfache Räderwerk anwendete und daß das Räderwerk das vortheilhafteste ist, welches aus dem Getriebe c und dem Rade b besteht, und wenn man in die Formel die entsprechenden Zahlen substituirt, so findet man, daß das Verhältniß der Kraft zu dem Gewichte der Last zwischen $\frac{1}{171}$ und $\frac{1}{172}$ liegt.

Die eben gegebene Beschreibung ist aus der Edinburger Encyclopädie entlehnt und nach der Angabe des Verfassers ist dieser Krahn im Jahre 1813 in London construirt und hat 350 Pfund Sterling gekostet. Vermittelst desselben kann man mit völliger Sicherheit Lasten von 8 Tonnen heben und zuweilen kann derselbe auch zum Heben eines Gewichtes von 16 Tonnen oder 16000 Kilogr. angewandt werden.

Gleichgewicht eines Körpers auf einer horizontalen Ebene.

Druck auf die Unterstützungs- oder Berührungspuncte.

§. 166. Wenn ein Körper eine horizontale Ebene nur in einem einzigen Puncte berührt und unter der Wirkung der Schwere im Gleichgewichte sein soll; so muß der Schwerpunct des Körpers in der durch den Berührungspunct gehenden Verticale liegen, und wenn diese Bedingung erfüllt wird, so ist der Druck auf den Unterstützungs- oder Berührungspunct dem Gewichte des Körpers gleich.

Wenn ein Körper eine horizontale Ebene in zwei Puncten berührt, so kann derselbe unter der Wirkung der Schwere nur dann im Gleichgewichte sein, wenn die durch seinen Schwerpunct gezogene Verticale die Verbindungslinie der beiden Berührungs- oder Unterstützungspuncte zwischen diesen Puncten trifft, und wir wollen nun untersuchen, wie groß der Druck in jedem dieser beiden Puncte ist.

Es sei MN (Fig. 91) ein Durchschnitt eines Körpers, welcher in zwei Puncten A und B auf einer festen, hotizontalen Ebene ruhet, so muß, wenn sich dieser Körper im Gleichgewichte befindet, die durch seinen Schwerpunct G gezogene Verticale die gerade Linie AB in einem zwischen A, B liegenden Puncte O treffen. Um den Druck auf die Ebene in jedem dieser Puncte zu berechnen, muß man das Gewicht des Körpers MN als eine an seinem Schwerpuncte G angebrachte Kraft R betrachten und diese Kraft in zwei andere Kräfte P, P' zerlegen, welche nach den Verticalen PA, $P'B$ wirken. Zur Bestimmung der Componenten P, P' kann man sich der Formeln:

$$R = P + P',$$
$$RX = Px + P'x'$$

in §. 30 bedienen, und wenn der Anfangspunct im Puncte O liegt, so hat man:

$$X = o,\ -Px + P'x' = o,\ P' = \frac{Px}{x'}.$$

Wird dieser Werth von P' in die erste der vorhergehenden Gleichungen substituirt, so kommt:

$$R = P + \frac{Px}{x'} = \frac{x + x'}{x'} P,$$

woraus folgt:

$$P = \frac{Rx'}{x + x'},$$

$$P' = R - \frac{Rx'}{x + x'} = \frac{Rx}{x + x'}.$$

Bemerkt man nun, daß $x = OA$, $x' = OB$ und $x + x' = AB$ ist, so ergibt sich:

der Druck auf den Punct A gleich $\frac{R \times OB}{AB}$,

= = = = = B . $\frac{R \times OA}{AB}$.

Ein Körper kann, wie eine Pyramide oder ein Kegel, welcher mit seiner Spitze auf einer horizontalen Ebene ruhet, dieselbe nur in einem einzigen Puncte berühren, oder nach einer geraden Linie wie ein Polyeder, welches mit einer seiner Kanten auf einer horizontalen Ebene ruhet, oder in zwei einzelnen, von einander getrennten Puncten, wie in dem vorhin betrachteten Falle, und in keinem dieser drei Fälle ist das Gleichgewicht stabil; denn der Körper wird durch die kleinste Kraft umgestoßen und bleibt nur dann in Ruhe, wenn er sich in mehreren Puncten auf die Ebene stützt.

§. 167. Wir wollen nun einen Körper betrachten, welcher in drei, nicht in gerader Linie liegenden Puncten auf einer horizontalen Ebene ruhet. Es seien A, B, C (Fig. 92) die Projectionen dieser drei Puncte und O sei der Punct, worin die durch den Schwerpunct des Körpers gehende Verticale die horizontale Ebene trifft; so muß, wenn der Körper im Gleichgewichte sein soll, der Punct O in dem Dreiecke ABC liegen, welches von den drei geraden Linien gebildet wird, welche die drei Stützpuncte, je zwei und zwei, verbinden; denn wenn die durch den Schwerpunct des Körpers gehende Verticale die horizontale Ebene nicht innerhalb des Dreieckes ABC träfe, so würde der Körper vermöge der Wirkung der Schwere nach der Seite, wo diese Verticale liegt, umschlagen. Man könnte in der horizontalen Ebene zwei rechtwinklige Axen ziehen und die Druckkräfte auf die drei Unterstützungspuncte vermittelst der Gleichung $R = P + P' + P''$ nebst den beiden Gleichungen der Momente in Beziehung auf die Axen der x und y berechnen; denn man hätte alsdann drei Gleichungen mit den drei unbekannten Größen P, P', P'' und die Aufgabe wäre folglich eine bestimmte; allein statt dieser Rechnungen kann man auch die folgende geometrische Auflösung anwenden.

Um die auf die drei Unterstützungspuncte A, B und C wirkenden Componenten des Gewichtes des Körpers zu finden, wollen wir von jedem dieser Puncte nach dem Puncte O gerade Linien ziehen und dieselben bis zu ihrem Durchschneiden mit den drei Seiten des Dreieckes ABC in den Puncten D, E und F verlängern, dann von den drei Winkelspitzen auf die gegenüberliegenden Seiten die Perpendikel AH,

BI, *CK* fällen und endlich aus dem Puncte *O* die geraden Linien *OL*, *OM*, *ON* senkrecht auf die drei Seiten des Dreieckes ziehen.

Ferner bezeichne *R* das Gewicht des Körpers oder die nach der Verticale *OR* wirkende Kraft; so wollen wir, um die auf den Unterstützungspunct *A* nach der Verticale *AP* wirkende Componente *P* zu finden, bemerken, daß die beiden Dreiecke *AHD*, *OMD* einander ähnlich, folglich ihre homologen Seiten einander proportional sind, und daß sich die beiden Dreiecke *ABC*, *BOC*, welche die gemeinschaftliche Grundlinie *BC* haben, wie ihre Höhen *AH* und *OM* verhalten. Man hat folglich:

$$R : P = AD : OD = AH : OM$$
$$= \text{Fläche } ABC : \text{Fläche } BOC,$$

also
$$P = \frac{\text{Fläche } BOC}{\text{Fläche } ABC} \times R.$$

Ebenso ergibt sich nach den übrigen Theilen der Figur:

$$R : P' = BE : OE = BI : ON$$
$$= \text{Fläche } ABC : \text{Fläche } AOC,$$

also
$$P' = \frac{\text{Fläche } AOC}{\text{Fläche } ABC} \times R,$$

und
$$R : P'' = CF : OF = CK : OL$$
$$= \text{Fläche } ABC : \text{Fläche } AOB,$$

also
$$P'' = \frac{\text{Fläche } AOB}{\text{Fläche } ABC} \times R.$$

Wenn das Gewicht *R* des Körpers durch das Dreieck *ABC* dargestellt wird, so werden die Theile dieses Gewichtes, welche die Druckkräfte auf die Puncte *A*, *B*, *C* bilden, durch die Dreiecke *BOC*, *AOC* und *AOB* dargestellt.

Wenn man die Summe der drei vorhergehenden Ausdrücke für *P*, *P'*, *P''* bildet, so erhält man, wenn man bemerkt, daß oie Summe der Cooefficienten von *R* der Einheit gleich ist:

$$P + P' + P'' = R.$$

Diese Gleichung enthält das Grundprincip einer sehr einfachen Maschine, welche die Stelle großer Wagen vertreten kann. Man stellt nämlich den Gegenstand, dessen Gewicht man wissen will, auf eine horizontale, auf drei Stützen ruhende Platte, und bestimmt dann mit einer Feder- oder Schnellwage successive das Gewicht, welches einer jeden der Stützen das Gleichgewicht halten oder mit andern Worten, die Stelle derselben vertreten kann, und wenn man alsdann diese drei Gewichte zusammenaddirt und endlich von der Summe das Gewicht der Platte abzieht; so erhält man das Gewicht des Körpers. Prony hat ein Modell dieses Instrumentes in der **Société d'Encouragement** mitgetheilt.

Die in Rede stehende Aufgabe wird unbestimmt, wenn sich der Körper in mehr als drei Puncten auf die horizontale Ebene stützt, was für eine Lage diese Stützpuncte auch haben mögen, weil die Bedingungen der Aufgabe nur drei Gleichungen geben, vermittelst welcher man auch nur drei unbekannte Größen bestimmen kann.

Von der schiefen oder geneigten Ebene.

§. 168. Eine Ebene, welche mit einer Horizontalebene einen schiefen Winkel bildet, wird eine schiefe oder geneigte Ebene genannt. Sie ist die fünfte einfache Maschine, deren man sich oft zum Heben sehr schwerer Lasten bedient, und der Vortheil, welchen sie gewährt, besteht darin, daß ein Theil des Gewichtes eines auf einer schiefen Ebene liegenden Körpers von dieser Ebene getragen wird.

Es sei *ABEF* (Fig. 93) die horizontale und *ABCD* die schiefe Ebene. Wenn man in der schiefen Ebene die gerade Linie *LM* senkrecht auf den gemeinschaftlichen Durchschnitt *AB* dieser beiden Ebenen zieht, aus dem Puncte *M* das Perpendikel *MK* auf die Horizontalebene fällt und dann die Linie *LK* zieht; so bildet man ein rechtwinkliges Dreieck *MKL*, dessen Hypotenuse *LM* die Länge der schiefen Ebene, dessen Kathete *MK* die Höhe derselben und dessen Winkel *MLK* die Neigung derselben genannt wird.

Wenn eine Kraft auf einen Körper wirkt, welcher eine unbewegliche Ebene nur in einem einzigen Puncte berührt; so sind zum Gleichgewichte dieses Körpers zwei Bedingungen erforderlich: 1) die Richtung der Kraft muß auf der Ebene senkrecht sein, und 2) muß diese Richtung durch den Berührungspunct gehen. Wenn die Richtung *PQ* der auf den auf der schiefen Ebene *AC* liegenden Körper *N* wirkenden Kraft *P* nicht auf dieser Ebene senkrecht ist und man verlängert *PQ* um das Stück *QR*, welches die Kraft *P* ausdrückt, so kann man diese Kraft in zwei andere zerlegen, wovon die eine nach dem Perpendikel *QS* auf der schiefen Ebene und die andere nach dem in dieser Ebene liegenden Perpendikel *QL* auf dem gemeinschaftlichen Durchschnitte *AB* wirkt, so daß also die erste durch den Widerstand der schiefen Ebene aufgehoben wird, während die zweite den Körper *N* auf diese Ebene nach der Richtung *QL* fortzubewegen strebt.

Wenn ein Körper mit einer Fläche auf einer schiefen Ebene ruhet und durch eine Kraft *P* gegen diese Ebene gedrückt wird, so kann das Gleichgewicht nur stattfinden, wenn die Richtung dieser Kraft auf dieser Ebene senkrecht ist und durch einen Punct der Fläche geht, womit der Körper auf der schiefen Ebene ruhet; denn wenn die Richtung der Kraft die schiefe Ebene in einem außerhalb dieser Fläche liegenden Puncte träfe, so würde der Körper umschlagen, indem er sich um eine Seite dieser Fläche drehete.

Wir haben vorausgesetzt, daß auf den auf einer schiefen Ebene liegenden Körper nur eine einzige Kraft wirkt, aber wenn mehrere Kräfte auf denselben wirkten, so wäre zum Gleichgewichte erforderlich: 1) daß alle diese Kräfte eine Resultante haben, 2) daß die Richtung dieser Resultante auf der schiefen Ebene senkrecht ist und 3) daß diese Richtung durch einen Punct der Berührungsfläche des Körpers mit der schiefen Ebene geht.

Wenn man sich die Masse des auf der schiefen Ebene *ABCD* liegenden Körpers *N* in seinem Schwerpuncte vereinigt denkt, so reducirt sich dieser Körper auf einen schweren materiellen Punct, und wenn sich dieser Punct nicht im Gleichgewichte befände, so würde er sich auf der schiefen Ebene nach der geraden Linie *LM* bewegen, welche auf dem

gemeinschaftlichen Durchschnitte *AB* der schiefen und der horizontalen Ebene senkrecht ist. In der Theorie der schiefen Ebene betrachtet man die auf einen Körper oder auf einen schweren materiellen Punct wirkenden Kräfte in Beziehung auf ihre Richtungen, und wie groß die Anzahl dieser Kräfte auch sein mag, so kann man sie doch immer auf einen Widerstand und eine Kraft zurückführen, deren Richtungen in derselben Ebene liegen. Zur Vereinfachung der Figuren wollen wir immer bloß einen Durchschnitt *MLK* der geneigten und der horizontalen Ebene mit einer durch den Schwerpunct des auf der schiefen Ebene liegenden Körpers und durch die auf dem Durchschnitte *AB* senkrechten geraden Linien *NL*, *LK* gehenden Ebene betrachten.

§. 169. Aufg. Die Bedingungen des Gleichgewichtes zwischen zwei auf einen auf einer schiefen Ebene liegenden Körper wirkenden Kräften zu finden. — Aufl. Es sei *M* (Fig. 94) der auf der schiefen Ebene liegende Körper und *BC* ein Durchschnitt dieser Ebene mit einer Verticalebene, welche durch den Schwerpunct *G* des Körpers *M* geht und worin die Richtungen der auf diesen Körper wirkenden Kräfte ***P***, ***Q*** liegen, wo ***Q*** das Gewicht des Körpers bezeichnet, welches wir uns als in seinem Schwerpuncte *G* nach der Richtung der Verticale ***GQ*** wirkend vorstellen. Die Richtung der Kraft ***P*** geht nach der Voraussetzung durch den Schwerpunct *G*; allein diese Richtung, welche die Verticale ***GQ*** immer durchschneiden muß, kann sie über oder unter dem Puncte *G* durchschneiden, und es ist hinreichend, daß das aus dem Durchschnittspuncte der Verticale und der Richtung der Kraft ***P*** auf die geneigte Ebene gefällte Perpendikel durch einen Punct der Fläche geht, womit der Körper auf der schiefen Ebene ruhet.

Wenn sich der Körper *M* auf der geneigten Ebene ***BC*** im Gleichgewichte befindet, so wird die Resultante aus der Kraft *P* und dem Gewichte ***Q*** durch diese Ebene aufgehoben, und folglich muß die Richtung dieser Resultante mit dem aus dem Puncte *G*, worin sich die Richtungen der Kräfte durchschneiden, auf die Ebene *BC* gefällten Perpendikel zusammenfallen. Es stelle *GF* die Gewichtskraft des Körpers *M* dar, so wollen wir durch den Punct *F* zu der Richtung der Kraft *P* die Parallele *FH*, und durch den Punct ***H***, wo diese Parallele das aus dem Puncte *G* auf *BC* gefällte Perpendikel trifft, zu *GF* die Parallele *IIE* ziehen; so drückt die Seite *GE* des Parallelogrammes *GEHF* die Kraft *P* aus, und wenn man die Resultante aus den Kräften *P*, ***Q*** mit *R* bezeichnet, so hat man:

$$P : Q : R = GE : GF : GH,$$

und da das Dreieck *GEH* gibt:

$$GE : EH \text{ oder } GF : GH = \sin. GHE \text{ oder } \sin. FGH : \sin. EGH : \sin. GEH \text{ oder } \sin. FGE,$$

so verhält sich:

$$P : Q : R = \sin. FGH : \sin. EGH : \sin. FGE.$$

Wir erhalten also hier wieder eine Anwendung des Fundamentalsatzes: daß jede der Kräfte ***P***, ***Q*** und ihre Resultante *R* oder der Druck auf die schiefe Ebene dem Sinus des Winkels

proportional ist, welchen die Richtungen der beiden andern Kräfte mit einander bilden.

Aus dem Puncte *G* wollen wir auf die Richtung *GP* der Kraft *P* ein Perpendikel ziehen, so trifft dasselbe die schiefe Ebene *BC* und die Horizontalebene *BA* resp. in den Puncten *I* und *N* und die beiden Dreiecke *NBI*, *EGH*, deren Seiten resp. auf einander senkrecht sind, sind einander ähnlich. Man hat also:

$$\sin. FGH = \sin. EHG = \sin. NBI,$$
$$\sin. EGH = \sin. NIB,$$
$$\sin. GEH = \sin. FGE = \sin. BNI,$$

und wenn man diese Werthe substituirt, so erhält man:

$$P : Q : R = \sin. NBI : \sin. NIB : \sin. BNI.$$

Die Scheitelwinkel *NIB*, *GIC* sind einander gleich und dasselbe gilt von den Winkeln *GDB*, *CDP*. Ferner ist das Dreieck *IGD* rechtwinklig, also der Winkel *NIB* das Complement von *CDP*, also $\sin. NIB = \cos. CDP$. Durch den Punct *G* wollen wir *GX* parallel zu *BA* ziehen, und wenn man von jedem der rechten Winkel *QGX*, *NGP* den Winkel *NGX* abzieht, so sind die Reste *NGQ*, *XGP* einander gleich, folglich $\sin. BNI = \cos. NGQ = \cos. XGP$. Werden diese Werthe in die vorhergehende Reihe gleicher Verhältnisse substituirt, so erhält man:

$$P : Q : R = \sin. NBI : \cos. CDP : \cos. XGP;$$

d. h. die beiden Kräfte *P*, *Q* und ihre Resultante *R* oder der Druck auf die schiefe Ebene verhalten sich resp. wie der Sinus des von der schiefen Ebene mit der Horizontalebene gebildeten Winkels, zu dem Cosinus des Winkels, welchen die Richtung der Kraft *P* mit der schiefen Ebene bildet und zu dem Cosinus des Winkels, welchen die Richtung derselben Kraft mit der Horizontale bildet.

In der vorhergehenden Reihe gleicher Verhältnisse sind folgende drei Proportionen enthalten:

$$P : Q = \sin. NBI : \cos. CDP,$$
$$P : R = \sin. NBI : \cos. XGP,$$
$$Q : R = \cos. CDP : \cos. XGP.$$

Die erste dieser Proportionen lehrt, daß das Gleichgewicht stattfindet, wenn sich die Kraft zu dem Gewichte des Körpers wie der Sinus des Neigungswinkels der schiefen Ebene zu dem Cosinus des Winkels verhält, welchen die Richtung der Kraft *P* mit der schiefen Ebene bildet.

Es sei $Q = 150$ Kilogr., die Neigung der schiefen Ebene oder der Winkel $NBI = 40°$ und der Winkel $CDP = 25°$; so erhält man durch Substitution dieser Werthe:

$$P : 150 \text{ Kilogr.} = \sin. 40° : \cos. 25°.$$

	$\log. 150$	$= 2,1760913$
	$\log. \sin. 40'$	$= 9,8080675$
dec. Erg.	$\log. \cos. 25'$	$= 0,0427243$
	$\log. P$	$= 12,0268831,$

also: $P = 106{,}385$ Kilogr.

Das absolute Gewicht des Körpers M beträgt nach der Voraussetzung 150 Kilogr., und es wäre eine diesem Gewichte gleiche Kraft erforderlich, um diesen Körper nach der Richtung der Verticale im Gleichgewichte zu erhalten. Aber wenn dieser Körper auf die geneigte Ebene BC gelegt wird, so strebt er vermöge seines relativen Gewichtes, welches kleiner ist als sein absolutes Gewicht, längs der schiefen Ebene herabzugleiten, und wenn die auf den Körper wirkende Kraft die Richtung GP hat, welche mit der schiefen Ebene einen Winkel von 25° bildet, so ist zum Gleichgewichte nur eine Kraft von 106,385 Kilogr. erforderlich:

Wenn man für *sin. NBI* oder *sin. ABC* seinen Werth $\frac{AC}{BC}$ setzt, so verwandelt sich die vorhergehende Proportion in:

$$P : Q = AC : BC \times \cos. CDP,$$

woraus folgt:

$$P = \frac{AC \times Q}{BC \times \cos. CDP}.$$

Je mehr der Werth von *cos. CDP* zunimmt, desto kleiner wird die Kraft P; soll also die Kraft P, welche den auf der schiefen Ebene liegenden Körper M im Gleichgewichte erhält, möglichst klein werden, so muß diese Kraft eine solche Richtung haben, daß *cos. CDP* seinen größten Werth hat, was für $CDP = 0°$ stattfindet, wo alsdann $\cos. CDP = \cos. 0° = 1$ ist und die Richtung der Kraft P mit der Parallele GP' zu der schiefen Ebene BC zusammenfällt, und alsdann verwandelt sich die vorhergehende Proportion in:

$$P : Q = AC : BC,$$

d. h. die Kraft verhält sich zu dem Gewichte des Körpers oder zu dem Widerstande, wie die Höhe der schiefen Ebene zu ihrer Länge.

Wenn die Kraft P nach der horizontalen Richtung GX wirkt, welche zu der Basis BA der schiefen Ebene parallel ist, so ist der Winkel $CD'X = ABC$, und man hat:

$$\cos. CD'X = \cos. ABC = \frac{AB}{BC'},$$

und wenn man diesen Werth für *cos. CDP* substituirt, so verwandelt sich die obige Proportion in:

$$P : Q = AC : AB,$$

d. h. die Kraft verhält sich zu dem Gewichte des Körpers M, wie die Höhe der schiefen Ebene zu ihrer Basis.

Um einen Körper auf einer schiefen Ebene im Gleichgewichte zu erhalten, wenn die Richtung der Kraft zu dieser Ebene parallel ist, ist die Kraft immer kleiner als das Gewicht des Körpers, weil die Hypotenuse die größte Seite eines rechtwinkligen Dreieckes ist.

Wenn die Kraft nach einer horizontalen Richtung wirkt, so ist sie im Gleichgewichtszustande größer, gleich oder kleiner, als das Gewicht

des Körpers, je nachdem die Höhe der schiefen Ebene größer, gleich oder kleiner, als ihre Basis ist.

Wenn man den Werth von R aus der Proportion:

$$Q : R = cos.\ CDP : cos.\ XGP$$

ableitet, so erhält man:

$$R = \frac{Q \times cos.\ XGP}{cos.\ CDP},$$

welches der Ausdruck der Resultante der beiden Kräfte ist, welche den Körper M auf der schiefen Ebene BC im Gleichgewichte halten oder des auf diese Ebene ausgeübten Druckes.

Wenn die gerade Linie GP' zu BC parallel ist, so ist der Winkel $CDP = PGP'$ und aus demselben Grunde

$$CD'X = XGP' = XGP + PGP',$$

woraus folgt, wenn man bemerkt, daß der Winkel $CD'X = ABC$ ist, weil die gerade Linie GX horizontal ist:

$$XGP = CD'X - PGP' = ABC - CDP,$$

und wenn man diesen Werth von XGP in den Ausdruck der Resultante R substituirt, so kommt:

$$R = \frac{Q \times cos.(ABC - CDP)}{cos.\ CDP}.$$

Wir haben vorhin das Gewicht $Q = 150$ Kilogr., den Winkel $ABC = 40°$ und den Winkel $GDP = 25°$ gesetzt, und wenn man diese Werthe in die vorhergehende Formel substituirt, so erhält man:

$$R = \frac{150 \times cos.\ 15°}{cos.\ 25°},$$

	$log.\ 150$	=	2, 1760913
	$log.\ cos.\ 15°$	=	9, 9849438
dec. Erg.	$log.\ cos.\ 25°$	=	0, 0427243
	$log.\ R$	=	12, 2037594

$$R = 159,867 \text{ Kilogr.}$$

Der Druck auf die schiefe Ebene oder die Resultante R ist also gleich 159, 867 Kilogr.

Wenn die Kraft P das unbekannte Glied der Proportion:

$$P : R = sin.\ NBI : cos.\ XGP$$

ist, so hat man, wenn man für die drei übrigen Glieder dieselben Zahlen, wie in dem vorhergehenden Beispiele setzt:

$$P = \frac{159,867 \times sin.\ 40°}{cos.\ 15°},$$

	$log.\ 159,867$	=	2, 2037594
	$log.\ sin.\ 40°$	=	9, 8080675
dec. Erg.	$log.\ cos.\ 15°$	=	0, 0150562
	$log.\ P$	=	12, 0268831,

also: $P = 106,385.$

Wir erhalten also für die Kraft P den im ersten Beispiele gefundenen Werth wieder.

§. 170. Aufg. Die Bedingungen des Gleichgewichtes zweier Körper zu finden, welche an den Enden eines unausdehnbaren, vollkommen biegsamen und über eine feste Rolle gehenden Seiles befestigt sind und auf zwei gegen einander gestellten schiefen Ebenen von derselben Höhe liegen. — Aufl. Es seien M, M' (Fig. 95) die beiden an den Enden des über die feste Rolle N gehenden Seiles MPM' befestigten und auf den schiefen Ebenen CB, CD von derselben Höhe AC und deren Basen in derselben Horizontallinie liegen, liegenden Körper. P sei die Kraft, welche den Körper M auf der schiefen Ebene BC im Gleichgewichte erhält oder die Spannung des Seiles PM, so hält auch dieselbe Kraft P den Körper M' auf der schiefen Ebene CD im Gleichgewichte; denn da das Seil über die feste Rolle N geht, so sind die beiden Seilstücke MP, PM' gleich stark gespannt, und wenn man folglich die Gewichte der beiden Körper, welche nach den durch ihre Schwerpuncte G, G' gehenden Verticalen wirken, mit Q, Q' bezeichnet, so hat man die beiden Proportionen (§. 169):

$$P : Q' = \sin. ADC : \cos. PG'p',$$
$$Q : P = \cos. PGp : \sin. ABC.$$

Multiplicirt man diese beiden Proportionen Glied für Glied in einander und läßt den gemeinschaftlichen Factor hinweg, so kommt:

$$Q : Q' = \sin. ADC \cos. PGp : \sin. ABC \cos. PG'p'.$$

Die rechtwinkligen Dreiecke DAC, BAC geben:

$$\sin. ADC = \frac{AC}{CD'}, \quad \sin. ABC = \frac{AC}{BC'},$$

und wenn diese Werthe in die letzte Proportion substituirt werden, so erhält man:

$$Q : Q' = BC \times \cos. PGp : CD \times \cos. PG'p'.$$

Wenn die Seile MP, PM' mit den zu den geneigten Ebenen parallelen geraden Linien Gp, $G'p'$ zusammenfallen, so ist $\cos. PGp = \cos. PG'p' = \cos. 0^\circ = 1$, und die vorhergehende Proportion verwandelt sich in:

$$Q : Q' = BC : CD;$$

d. h. wenn die Seilstücken zu den geneigten Ebenen parallel sind, so findet das Gleichgewicht statt, wenn sich die Gewichte der Körper wie die Längen dieser Ebenen verhalten.

§. 171. Wenn ein Körper M (Fig. 96) zwischen zwei geneigten Ebenen BC, BE im Gleichgewichte ist, so wird das Gewicht dieses Körpers, welches man sich in seinem Schwerpuncte G angebracht denken kann und nach der Verticale HG wirkt, durch diese beiden geneigten Ebenen getragen; aber es muß auf der durch den Schwerpunct des Körpers gehenden Verticale wenigstens einen Punct geben, von welchem man auf jede der geneigten Ebenen ein Perpendikel fällen kann, so daß jedes dieser Perpendikel durch einen Punct der Fläche geht, womit der Körper auf den geneigten Ebenen ruhet. Die durch die Verticale des

Schwerpunctes und durch die von diesem Puncte auf die beiden schiefen Ebenen gefällten Perpendikel gelegte Ebene ist auf diesen beiden schiefen Ebenen senkrecht, und folglich auch senkrecht auf ihrem gemeinschaftlichen Durchschnitte, welcher mithin horizontal sein muß.

Es seien *HI*, *HK* die aus dem Puncte *H* der durch den Schwerpunct *G* gehenden Verticale auf die geneigten Ebenen *BC*, *BE* gefällten Perpendikel, so daß die Puncte *I* und *K*, wo diese Perpendikel die Ebenen treffen, in den Berührungsflächen des Körpers *M* mit diesen Ebenen liegen, d. h. daß das Perpendikel durch den Berührungspunct geht, wenn es nur einen solchen Berührungspunct gibt, und daß, wenn es deren mehrere gibt, sie nicht alle auf derselben Seite des Perpendikels liegen. Auf der durch den Schwerpunct des Körpers *M* gehenden Verticale wollen wir das Stück *HR* zur Darstellung des Gewichtes des Körpers nehmen und *RT* parallel zu *HI*, so wie *RS* parallel zu *HK* ziehen, so erhalten wir das Parallelogramm *HSRT*, dessen Seiten *HS*, *HT* die auf die schiefen Ebenen *BC*, *BE* ausgeübten Druckkräfte darstellen.

Wenn *Q* das Gewicht des Körpers *M* und *P*, *P'* die von diesem Körper auf die schiefen Ebenen *BC*, *BE* ausgeübten Druckkräfte bezeichnen, so hat man nach dem Principe der Zusammensetzung der Kräfte:

$$Q : P : P' = HR : HS : HT$$
$$= \sin. SHT : \sin. RHT : \sin. RHS.$$

Zieht man *LF* parallel zu der Horizontale *AD*, so sind die Seiten der beiden Dreiecke *RHS*, *BLF* resp. auf einander senkrecht, folglich diese Dreiecke einander ähnlich, und wenn die Seiten und Winkel des Dreieckes *BLF* für die des Dreieckes *RHS* in die vorhergehende Reihe gleicher Verhältnisse substituirt werden, so kommt:

$$Q : P : P' = LF : BL : BF$$
$$= \sin. CBE : \sin. DBE : \sin. ABC;$$

d. h. wenn das Gewicht des Körpers durch den Sinus des Winkels ausgedrückt wird, welchen die beiden schiefen Ebenen mit einander bilden, so werden die auf diese Ebenen ausgeübten Druckkräfte resp. durch die Sinus der Winkel ausgedrückt, welche diese Ebenen mit dem Horizonte bilden.

Wenn jeder der Winkel *ABC*, *DBE* gleich 60° wäre, so wäre der Winkel *CBE* auch = 60° und der auf jede schiefe Ebene ausgeübte Druck wäre dem Gewichte des Körpers *M* gleich. Wenn der Winkel *LBF* oder *CBE* ein rechter ist, so ist die Richtung der auf die eine schiefe Ebene wirkenden Druckkraft zu der andern Ebene parallel; denn der Winkel *HIB* ist nach der Construction ein rechter, und wenn der Winkel *HSR* ein rechter ist, so sind *SR* und *HK* zu *BC* parallel. Derselbe Schluß ist auch auf die geraden Linien *TR*, *HI* anwendbar; das rechtwinklige Dreieck *LBF* ist jedem der rechtwinkligen Dreiecke *BAC*, *BDE* ähnlich und man hat:

$$Q : P : P' = LF : BL : BF = BC : AB : AC.$$

Die geneigte Ebene *BE* bringt die Wirkung einer Kraft *P'* hervor, welche den Körper *M* in der Richtung *KH* gegen die geneigte

Ebene *BC* treibt. Diese Kraft kann also durch eine gleiche Kraft *p'*, welche den Körper nach der Richtung *Hp'* zieht, ersetzt werden, und wenn diese Richtung zu der schiefen Ebene *BC* parallel ist, so hat man:

$$p' : Q = AC : BC,$$

woraus erhellet, daß diese letzte Proportion in der vorhergehenden enthalten ist.

Wenn eine der beiden Ebenen horizontal ist, so kann, abgesehen von der Reibung, das Gleichgewicht nur in dem Falle stattfinden, wo die durch den Schwerpunct des Körpers gehende Verticale durch einen Punct der Fläche geht, womit er sich auf die Horizontalebene stützt. Alsdann wird das Gewicht des Körpers nur durch die Horizontalebene getragen und der Druck auf die andere Ebene ist gleich Null.

Von der Schraube.

§. 172. Die sechste einfache Maschine, welche die Schraube genannt wird, kann als eine Verbindung des Hebels und der schiefen Ebene betrachtet werden. Diese Maschine besteht aus einem Cylinder, in welchen man eine quadratische oder dreieckige Vertiefung oder Nute geschnitten hat (oder vielmehr, deren Querschnitt ein Quadrat oder Dreieck ist), welche eine Schraubenlinie bildet, deren Erzeugung wir zunächst erklären wollen.

Es sei *AIBCOD* (Fig. 97) ein gerader Cylinder, wovon $AY = {}^1/_2 AB$ der Halbmesser der Grundfläche ist. Wir wollen den Durchmesser *AB* verlängern und auf dieser Verlängerung $BB' =$ dem Kreisumfange von dem Halbmesser *AY* nehmen und endlich das Rechteck *BB'C'C* vollenden; so ist die Fläche desselben der converen Oberfläche des Cylinders gleich. Theilt man die Erzeugungslinie *BC*, welche eine der Seiten des Rechteckes *BB'C'C* bildet, in gleiche Theile *BE*, *EF*, *FG*, *etc.* und zieht durch die Theilungspuncte die Linien *EE'*, *FF'*, *GG'*, *etc.* zu der Grundlinie *BB'* parallel, so wie die schrägen geraden Linien *BE'*, *EF'*, *FG'*, *etc.*, so sind die rechtwinkligen Dreiecke *BB'E'*, *EE'F'*, *FF'G'*, *etc.* einander gleich. Stellt man sich nun vor, daß das Rechteck *BB'C'C* auf den Cylinder gewickelt wird, so fällt die Seite *B'C'* auf die Erzeugungslinie *BC*, die Puncte *B'*, *E'*, *F'*, *etc.* fallen resp. auf die Puncte *B*, *E*, *F*, *etc.* und die Hypotenusen oder Diagonalen *BE'*, *EF'*, *FG'*, *etc.* bilden die stetige Curve, welche die Schraubenlinie genannt wird und die Richtung des Schraubengewindes, d. h. des vorspringenden Theiles der Schraube, bestimmt. Alle die Winkel *KRB*, *KSE*, *etc.*, welche die Richtung der Schraubenlinie mit einer Erzeugungslinie *KI* des Cylinders bildet, sind einander gleich, was daher kommt, daß die Schraubenlinie durch eine Reihe paralleler gerader Linien gebildet wird.

Der Theil der Schraubenlinie oder des Schraubenfadens, welcher durch die Aufwickelung einer der geraden Linien *BE'*, *EF'*, *etc.* auf den Cylinder gebildet wird, heißt eine Schraubenwindung, und die zu der Axe *XY* des Cylinders parallel genommene Entfernung zwischen zwei auf einander folgenden Windungen ist überall dieselbe. Das Schraubengewinde hat die Form eines rechtwinkligen Parallelepipedums

oder die eines dreiseitigen Prismas. Im ersten Falle heißt die Schraube eine vierseitige (flachgängige) und im zweiten Falle eine dreiseitige (scharfgängige). Was für eine Form der Schraubengang auch haben mag, so kann man sich denselben doch immer als einen Inbegriff unendlich vieler auf Cylindern von derselben Axe, aber mit Halbmessern von verschiedenen Längen beschriebener Schraubenlinien denken. Die gegenseitige Entfernung zweier auf einander folgender Windungen oder die Entfernung *AB* (Fig. 98) wird die Schraubenweite (Höhe) genannt.

§. 173. Will man von der Schraube Gebrauch machen, so läßt man sie in eine sogenannte Schraubenmutter *MN* treten, welche mit einem cylindrischen Loche durchbrochen ist, in dessen Seitenwand sich eine schraubenförmige Nute befindet, in die das Gewinde der Schraube (Spindel) genau paßt. Wenn sich die Schraubenspindel in ihrer Mutter drehet, so bewegt sie sich nach dem Sinne ihrer Axe und rückt bei jeder Umdrehung um die Länge einer Schraubenweite fort. Wenn die Schraubenspindel fest und die Schraubenmutter beweglich wäre, so rückte die Schraubenmutter bei jeder Umdrehung um die Schraubenspindel in dem Sinne der Axe um eine der Schraubenweite gleiche Länge fort.

Wenn bei dieser Einrichtung der Schraubenspindel und Schraubenmutter die Schraubenspindel fest und die einander berührenden Flächen der Schraubenspindel und Schraubenmutter vollkommen polirt wären, so daß keine Reibung stattfände; so würde die Schranbenmutter schon unter der alleinigen Wirkung der Schwere längs der Schraubenspindel herabgleiten, und um sie im Gleichgewichte zu erhalten, müßte man eine Kraft anbringen, welche die Wirkung der Schwere aufheben könnte. In dieser Voraussetzung wollen wir nun folgende Aufgabe lösen.

§. 174. Aufg. Die zur Herstellung des Gleichgewichtes der Schraube erforderlichen Bedingungen zu finden. — Aufl. Wir wollen eine Schraube betrachten, deren Mutter beweglich und deren Axe vertical ist, so sinkt die Schraubenmutter, wenn man von der Reibung abstrahirt, vermöge ihres eigenen oder eines beliebigen andern darauf drückenden Gewichtes längs der Schraubenspindel drehend herab und durchläuft alle Windungen der Schraubenspindel, indem sie auf denselben wie auf schiefen Ebenen herabgleitet. Auf die Schraubenmutter *MN* wirke eine Kraft ***P*** vermittelst eines auf der Axe der Schraube senkrechten Hebels *CD* und wir wollen annehmen, daß diese Kraft in der durch diesen Hebel horizontal gelegten Ebene nach einer auf demselben senkrechten Richtung wirkt.

Wenn die Schraubenmutter das Gewinde der Spindel nur in einem einzigen Puncte berührte, so würde dieser Punct, während der Bewegung der Schraubenmutter eine Schraubenlinie von derselben Weite oder Höhe, als die des Schraubengewindes der Spindel beschreiben und man könnte diese Schraubenlinie als auf einen Cylinder beschrieben betrachten, dessen Halbmesser der Entfernung des beschreibenden Punctes von der Axe der Schraube gleich wäre.

Es sei *AIBCOD* (Fig. 97) dieser Cylinder und *m* der Punct der Schraubenmutter, welcher die Schraubenlinie ***CVHUGm*** .... beschreibt.

Auf den Punct m wirkt eine verticale Druckkraft oder ein Gewicht q und wir wollen annehmen, daß derselbe durch eine horizontale Kraft f, welche nach der Tangente fm an dem Cylinder wirkt, im Gleichgewichte gehalten wird; so kann man den Punct m so betrachten, wie wenn er auf einer geneigten Ebene läge, deren Höhe h der Weite oder Höhe der Schraube und deren Basis dem Umfange des Cylinders gleich ist, welcher durch $2\pi r = BB'$ ausgedrückt wird, wenn r den Halbmesser des Cylinders und π das Verhältniß des Kreisumfanges zum Durchmesser bezeichnet.

Die horizontale Kraft, welche einen Körper auf einer schiefen Ebene im Gleichgewichte erhält, verhält sich zum Gewichte dieses Körpers, wie die Höhe der schiefen Ebene zu ihrer Basis, und man hat folglich die Proportion:

$$f : q = h : 2\pi r.$$

Durch den Punct m wollen wir eine horizontale gerade Linie ziehen, welche die Axe des Cylinders im Puncte c trifft, und diese gerade Linie als einen um den Punct c beweglichen Hebel betrachten, woran die Kraft f wirkt. Ferner wollen wir diese Kraft in zwei andere zerlegen, welche in den Puncten b und c desselben Hebels nach zwei zu mf parallelen Richtungen wirken, so wird die auf den Unterstützungspunct c wirkende Componente durch den Widerstand dieses Punctes aufgehoben, und wenn man die im Puncte b wirkende andere Componente mit p und den Hebelarm mc mit r bezeichnet, so hat man:

$$p : f = r : bc.$$

Multiplicirt man die correspondirenden Glieder dieser und der vorhergehenden Proportion in einander und läßt die gemeinschaftlichen Factoren hinweg; so kommt:

$$p : q = h : 2\pi . bc,$$

d. h. die horizontale Kraft, welche den Punct m im Gleichgewichte erhält, verhält sich zu dem auf diesen Punct wirkenden Drucke, wie die Schraubenweite oder die Höhe des Schraubenganges zu dem Umfange des Kreises, welchen der Angriffspunct der Kraft beschreibt.

Da diese Proportion von dem Halbmesser r des Cylinders, worauf die Schraubenlinie liegt, unabhängig ist, so kann dieser Halbmesser einen beliebigen Werth haben, woraus folgt, daß die Kraft, welche erfordert wird, um einen schweren Punct auf der Schraubenlinie im Gleichgewichte zu erhalten, immer dieselbe ist, diese Schraubenlinie mag nahe an der Axe der Schraubenspindel oder weit davon entfernt liegen, wofern alle diese Schraubenlinien nur dieselbe Höhe oder Steigung haben.

§. 175. Wir haben bisher nur einen einzigen auf einer Schraubenlinie im Gleichgewichte zu erhaltenden schweren Punct betrachtet und die gefundene Regel ist auf alle Lagen anwendbar, welche man diesem Puncte auf der schiefen Fläche des Schraubengewindes von einer beliebigen Tiefe geben kann, und wir haben nun noch zu beweisen, daß diese Regel auch für eine beliebige Anzahl von Berührungspuncten zwischen der Schraube und der Schraubenmutter stattfindet,

und folglich die Bedingungen des Gleichgewichtes der Schraube und der Schraubenmutter ausdrückt.

In der That kann man sich den Druck der Schraubenmutter *MN* (Fig. 98) auf das Gewinde der Schraube als ein Gewicht Q vorstellen, welches in eben so viele einander gleiche einzelne Gewichte oder schwere Puncte q, q', q'', *etc.* zerlegt ist, als es Berührungspuncte gibt, und wenn man sich die Kraft P, welche die Schraubenmutter im Gleichgewichte erhält, auch in eben so viele einander gleiche einzelne Kräfte p, p', p'', *etc.* zerlegt denkt, als man schwere Puncte hat; so wird jeder dieser Puncte durch eine dieser Kräfte im Gleichgewichte gehalten. Bezeichnet man also die Schraubenweite oder die Höhe des Schraubenganges mit h und den Halbmesser CD des Kreises, welchen der Angriffspunct der Kraft zu beschreiben strebt, mit R, so hat man:

$$\begin{aligned} p &: q = h : 2\pi R, \\ p' &: q' = h : 2\pi R, \\ p'' &: q'' = h : 2\pi R, \\ &\textit{etc.}, \qquad \textit{etc.}, \end{aligned}$$

woraus folgt:

$$p + p' + p'' + \textit{etc.} : q + q' + q'' + \textit{etc.} = h : 2\pi R,$$

und da

$$p + p' + p'' + \textit{etc.} = P,\ q + q' + q'' + \textit{etc.} = Q,$$

ist, so folgt:

$$P : Q = h : 2\pi R.$$

Dieselbe Proportion erhielte man, wenn die Schraubenmutter fest und die Schraubenspindel beweglich wäre. An welchem von diesen beiden Stücken die Kraft auch angebracht sein mag, so findet das Gleichgewicht doch immer statt, wenn die Kraft, welche das bewegliche Gewicht zu drehen strebt, indem ihr Angriffspunct einen auf der Axe der Schraube senkrechten Kreis beschreibt, sich zu dem Gewichte oder dem Widerstande, welcher nach dieser Axe wirkt, wie die Höhe des Schraubenganges zu der Länge des Kreisumfanges verhält, welchen der Angriffspunct der Kraft zu beschreiben strebt.

Von der Schraube ohne Ende.

§. 176. Die Schraube ohne Ende (Fig. 99) besteht aus einer Schraube mit einem quadratischen Gewinde von drei oder vier Windungen und aus einem Zahnrade, dessen Ebene durch die Axe der Schraube geht. Bei dieser Maschine vertritt das Zahnrad die Stelle der Schraubenmutter. Wenn man die Zähne des Rades zwischen die Windungen der Schraube treten läßt und diese um ihre Axe drehet, so wird auch das Rad und die Welle, auf welche sich das Seil wickelt, woran die zu hebende Last Q befestigt ist, herumgedrehet.

Es sei P die Kraft, welche die Schraube vermittelst der Kurbel LMN von dem Halbmesser $LM = R$ zu drehen strebt, h die Höhe des Schraubenganges, π das Verhältniß des Kreisumfanges zum Durchmesser und Y die Kraft, mit welcher die Zähne des Rades gegen die Windungen der Schraube parallel zu ihrer Axe drücken; so haben wir im Gleichgewichtszustande der Schraube:

$$P : Y = h : 2\pi R.$$

Das Zahnrad von dem Halbmesser $cd = R'$ und der daran befindliche Cylinder von dem Halbmesser $ce = r$ bilden eine Radwelle, woran die Kraft Y und die Last Q im Gleichgewichte sind; man hat also:

$$Y : Q = r : R',$$

und wenn man diese beiden Proportionen Glied für Glied in einander multiplicirt, so kommt:

$$P : Q = hr : 2\pi R \times R',$$

d. h. bei der Schraube ohne Ende findet das Gleichgewicht statt, wenn sich die Kraft zu dem Gewichte der Last oder zu dem Widerstande verhält, wie das Product aus der Höhe des Schraubenganges und dem Halbmesser der Welle zu dem Producte aus dem Kreisumfange, welchen der Angriffspunct der Kraft zu beschreiben strebt und dem Halbmesser des Zahnrades.

Wir wollen die an der Kurbel LMN wirkende Kraft $P = 25$ Pfund, die Höhe des Schraubenganges $h = 3$ Linien, den Halbmesser der Welle $r = 3$ Zoll, den Halbmesser der Kurbel $R = 9$ Zoll und den Halbmesser des Zahnrades $R' = 6$ Zoll, 6 Linien setzen; so erhält man, wenn man diese Zahlen und $\pi = 3,1416$ für die entsprechenden Buchstaben substituirt:

$$Q = \frac{25 \times 2 \times 3,1416 \times 9 \times 6,5}{0,25 \times 3} = 12252,24 \text{ Pfund.}$$

Eine an der Kurbel wirkende Kraft von 25 Pfund ist also hinreichend, um eine Last von 12252 Pfund im Gleichgewichte zu erhalten, wenn man von dem von der Reibung und der Steifigkeit des Seiles herrührenden Widerstande abstrahirt.

§. 177. Die Schraube ist eine der einfachen Maschinen, welche man am häufigsten in den Künsten anwendet und die folgenden Anwendungrn werden von dem Vortheile, welchen diese Maschine gewähren kann, einen Begriff geben.

Unter den gewöhnlichen Anwendungen der Schraube unterscheidet man besonders die sogenannten Schraubenpressen, deren man sich bedient, um Substanzen in ein kleineres Volumen zusammen zu pressen, oder um mehrere Stücke, welche man mit einander verbinden will, fest gegen einander zu drücken, zu welchem Zwecke man gewöhnlich eine Presse mit zwei dreikantigen hölzernen Schrauben anwendet.

Die Figuren 100 und 100^a, welche die Verticalprojection einer solchen Presse und den Grundriß einer ihrer Schraubenmuttern nach einem Maaßstabe von $^1/_{12}$ der natürlichen Größe darstellen, sind hinreichend, um den Mechanismus derselben kennen zu lernen.

Durch die Verbindung der Schraube mit dem Hebel erhält man einen Apparat von einer einfachen und leichten Construction, vermittelst welches eine kleine Anzahl von Menschen im Stande sind, die größten Lasten und die schwersten Steinblöcke, welche bei dem Baue von Monumenten angewandt werden, zu heben.

Es seien *M* und *N* (Fig. 101) zwei hölzerne Schrauben mit dreikantigem Gewinde, wovon jede an ihrem Kopfe mit einem auf der Axe senkrechten Loche durchbrochen ist, in welches ein Hebel gesteckt wird. Sie gehen durch ihre Schraubenmuttern, welche in dem hölzernen Stücke *DE* angebracht sind, und ihre untern Enden stützen sich auf den festen Widerstand *AB* in Vertiefungen, welche Lagern stehender Wellen ähnlich sind. Wenn man zwei andere ähnliche Schrauben hat, welche auf dieselbe Weise eingerichtet sind, so bilden diese beiden Schraubenpaare eine Vorrichtung, womit man eine auf dem Querstücke *h*, welches durch die Schrauben getragen wird, ruhende Last heben kann. Die Höhe des Schraubenganges betrage 20 Millimeter, auf jede Schraube wirke an dem Ende eines Hebels von 1 Meter Länge eine Kraft von 25 Kilogr. und *q* bezeichne das Gewicht der Last, welche durch eine dieser Schrauben im Gleichgewichte gehalten werden kann; so hat man:

$$q = \frac{25 \times 2 \times 3,1416 \times 1}{0,020} = 7844,$$

woraus folgt, daß alle vier Schrauben zugleich eine Last von $7844 \times 4 = 31376$ Kilogr. im Gleichgewichte halten können.

Fünf solcher Vorrichtungen, wie die eben beschriebene, hat man zum Heben eines der in der Fabrik von Charenton construirten Fahrzeuge angewandt. Die in den Werkstätten der Fabrik verfertigten Stücke wurden successive transportirt, um sie am Bord der Seine mit einander zu verbinden und das Schiff aufzubauen, und es befanden sich bereits die Cylinder und einige andere Theile der Dampfmaschinen in dem Schiffe, als es im Jahre 1825 in den ersten Tagen des Monats November mit fünf Schraubenvorrichtungen der in Rede stehenden Art gehoben wurde, um die Lagerhölzer, worauf es ruhete, hinwegnehmen zu können, worauf man es auf einer schiefen Ebene in den Fluß hinab gleiten ließ.

Vermittelst der Schraube werden die Medaillen und die Münzen geprägt, und auch Abdrücke auf das Papier, wozu ein starker Druck erforderlich ist, werden mit Hilfe der Schraube bewerkstelligt. Die Schraube ist auch der Haupttheil der Buchdruckerpresse, welche für den Fortschritt der Kultur unter allen Klassen von Menschen so unendlich viel geleistet hat. Diese Maschine ist fast 300 Jahre hindurch in derselben Gestalt angewandt, wie sie der Erfinder eingerichtet hatte.

§. 178. Bei der Buchdruckerpresse, wie bei den meisten andern Maschinen wendet man statt des Holzes Gußeisen an; allein dieses ist nicht die einzige Veränderung, welche man in der letzten Zeit mit der Buchdruckerpresse vorgenommen hat, denn Stanhope hat ihre Form verändert und ihren Mechanismus verbessert, indem er das Grundprincip des ersten Erfinders beibehielt, und die Presse, welche seinen Namen führt, wird jetzt von verschiedenen Maschinenbauern sehr genau ausgeführt und seit ungefähr 20 Jahren in den Druckereien allgemein angewandt. In der Druckerei Bachelier's zu Paris sind die alten Pressen durch Stanhope'sche ersetzt, und an der dieser Pressen, welche

für die beste gehalten wurde und seit ungefähr 2 Jahren in Thätigkeit ist, haben wir die folgenden Maaßen genommen.

Figur 102 stellt die Stanhope'sche Presse perspectivisch dar und Figur 103 ist eine Verticalprojection derselben Presse nach ihrer Länge. Sie ist mit Schraubenbolzen auf einem eichenen Fuße *MNO* von $0^m,252$ Höhe befestigt. Das längste Stück ist $0^m,975$ lang und $0^m,216$ breit, während das Querstück *MN* eine Länge von $0^m,961$ und eine Breite von $0^m,311$ hat und beide Stücke sind unter einem rechten Winkel in Form eines T oder eines Kreuzes mit einander verbunden.

An der Stanhope'schen Presse sind drei Haupttheile zu unterscheiden. Der erste Theil enthält den Körper der Presse *ABC* mit dem Tiegel *T*, welcher von dem an dem Hebel *L* aufgehangenen Gewichte *Q* getragen wird. Den zweiten Theil bildet der Mechanismus. Derselbe besteht aus der Schraube mit ihrer festen Schraubenmutter *E*, aus der verticalen Welle *F*, welcher man vermittelst des Hebels *H* die Rotationsbewegung ertheilt und aus dem Riemen *T*, durch welchen die Rotationsbewegung der verticalen Welle auf die Schraube übertragen wird. Der dritte Theil heißt der Wagen oder Karren und besteht aus einem horizontalen, eisernen Gatter *GIK*, welches durch den Körper der Presse geht, woran dasselbe an dem einen Ende befestigt ist, während das andere Ende auf der verticalen Stütze *U* ruhet. Dieses Gatter ist eine Art von Eisenbahn, auf welche eine genau gearbeitete Eisenplatte, die Setzplatte genannt, gelegt wird, und auf diese Platte wird die Form mit den Lettern gelegt, womit eine Seite des Papieres bedruckt werden soll. Die beiden Rähme *GIR* und *RS* bilden den Preßdeckel und das Rähmchen und sind durch Gewinde mit einander verbunden, damit sie auf die Form niedergelegt werden können.

Die hin- und hergehende Bewegung wird dem Systeme des Tiegels, der Form und des Rahmens durch die Kurbel *V* ertheilt, wodurch eine unter dem eisernen Gatter liegende Rolle gedrehet wird. Dieses System wird durch zwei Seile, wovon das eine Ende an jedem Ende dieses Gatters und das andere Ende an der Rolle befestigt ist, vor- und rückwärts bewegt, indem sich die beiden Seile ungefähr dreimal um diese Rolle wickeln, und zwar abwechselnd nach entgegengesetztem Sinne.

Das gußeiserne Gewicht *Q* der Presse, welche wir in Bachelier's Druckerei beobachtet haben, ist ein Rotationskörper, wovon in Figur 104 und 105 eine Vertical- und Horizontalprojection angegeben ist. Der Körper hat die Form eines abgestumpften Kegels, er hat eine ebene Fläche und an seinem obern und untern Theile befinden sich zwei parallelepipedische Löcher, zwischen welchen eine Trennung stattfindet, und wir haben das Volumen dieses Körpers, so wie sein Gewicht auf folgende Weise bestimmt.

Die erzeugende Oberfläche ist ein Trapez, dessen Höhe $= 0^m,216$, untere Basis $= 0^m,110$ und obere Basis $= 0^m,103$ ist. Wenn man die halbe Summe der untern und obern Basis des Trapezes mit seiner Höhe multiplicirt, so findet man den Flächeninhalt desselben $= 0,0229$ Quadratmeter. Hierauf muß man die Lage des Schwerpunctes des Trapezes bestimmen und nach der Regel in §. 44 findet

man, daß die Entfernung dieses Punctes von der untern Basis des Trapezes $= 0^m, 107$ ist. Der Halbmesser des Bogens, welchen dieser Schwerpunct beschreibt, ist $= 0^m, 025$; dieser Bogen hält 265° und hat eine Länge von $0^m, 241$.

Nach der barycentrischen Methode (§. 60) findet man das Volumen des Rotationskörpers $= 0,005543$ Cubikmeter, und wenn man hierzu das Volumen des Prismas addirt, welches das Dreieck *abc* zur Grundfläche hat, dessen Grundlinie $ab = 0^m, 163$, und dessen Höhe $cd = 0^m, 075$ ist, nämlich 0, 001296 Cubikmeter; so erhält man 0, 006839. Zieht man von dieser Summe das Volumen der beiden parallelepipedischen Löcher, deren gemeinschaftliche Basis $= 0^m, 162 \times 0,054$ und wovon die Summe der Höhen $= 0^m, 126$ ist, ab, nämlich 0, 001132; so ergibt sich das gesuchte Volumen $= 0,005707$ Cubikmeter, und wenn man dieses Volumen mit dem Gewichte von 1 Cubikmeter Gußeisen, nämlich mit 7207 Kilogr. multiplicirt; so findet man das Gewicht $Q = 41,113$ Kilogr.

Vermittelst des Hebels *L* wirkt das Gewicht *Q* auf die Presse und man kann dasselbe dem Körper der Presse nähern, oder es bis zu der Lage davon entfernen, worin es gegenwärtig mit einer Druckschraube befestigt ist und die Länge seines Hebelarmes beträgt $0^m, 419$. Der andere Arm des Hebels bildet eine Gabel, in welche der obere Theil des Tiegels tritt, welcher mit zwei Stiften versehen ist, die in einer Entfernung von $0^m, 035$ von der Rotationsaxe auf den Zweigen des Hebels ruhen und nach der Theorie des Hebels (§. 82) hat man folgende Proportion:

$$0,035 : 0,419 = 41,113 : x = 492,18,$$

d. h. das Gewicht des Tiegels nebst dem Gewichte der Theile, welche er an seinem obern Theile in Bewegung setzt oder die Wirkung der Kraft muß gleich 492, 18 Kilogr. sein, um das Gewicht *Q* im Gleichgewichte zu erhalten. Wenn man den Preßhebel gedrehet hat, so bringt dieses Gewicht denselben wieder in seine Ruhelage, und folglich muß dasselbe mehr als 500 Kilogr. betragen.

Die verticale Welle *F*, an welcher der Preßhebel *H* sitzt, besteht aus geschmiedetem Eisen und hat an ihrem obern Ende einen Kopf, woran das eine Ende des Riemens *T* mit einem Bolzen befestigt ist. An diesem Kopfe befindet sich eine Vertiefung, deren vorspringender Theil mit dem Riemen in Berührung kommt, wodurch die Bewegung des Preßhebels immer in demselben Puncte aufgehoben wird, und um harte Stöße zu vermeiden, legt man in die Nute an dem Kopfe der Welle einen kleinen weichen Körper.

An dem obern Ende der Schraube befindet sich auch ein gußeiserner Kopf, welcher das Komma genannt wird, und woran ebenfalls mit einem Schraubenbolzen das andere Ende des Riemens befestigt ist, und außerdem ist dasselbe auch an dem Körper der Presse mit einer kleinen Kette befestigt, um Unglücksfällen vorzubeugen, welche stattfinden könnten, wenn das Komma oder die Schraubenmutter zerrisse.

Um den Bolzen, welcher das Komma mit dem Riemen verbindet, zu lösen, hat man in letztern eine Oeffnung von $0^m, 108$ Länge angebracht, eine Druckschraube *v* tritt in eine Schraubenmutter am Ende

des Riemens; das Ende dieser Schraube stützt sich gegen einen platten Theil eines Ringes, in welchen die Schraubenmutter tritt, und wenn man sie drehet, so kann man das Komma vor- oder rückwärts bewegen. Durch diese Einrichtung kann man den Druck reguliren und folgende Wirkungen hervorbringen. Wenn die Druckschraube entfernt ist, so daß sich der Bolzen des Kommas an dem entferntesten Ende, welches er erreichen kann, befindet und der Preßhebel successive in seiner Ruhelage und an das Ende seines Weges kommt, so beträgt die Entfernung des Tiegels von der Setzplatte in der ersten Lage $0^m,040$ und in der zweiten Lage $0^m,029$. Wenn sich der Bolzen des Kommas an dem andern Ende der Oeffnung des Riemens befindet, so betragen dieselben Entfernungen resp. $0^m,029$ und $0^m,018$. Zwischen diesen beiden Grenzen befestigt man den Bolzen des Kommas, um den Druck des Tiegels auf den Rahmen, welcher die Form mit den Lettern bedeckt, zu reguliren.

§. 179. In §. 129 haben wir die Mittel angegeben, welche zum Transporte des Marmorblockes angewandt sind, woraus die Statue Ludwigs XIII. zu Pferde gehauen ist. Dieser Marmorblock wurde vermittelst Schrauben auf sein Postament gehoben und wir wollen nun in aller Kürze noch die Vorrichtungen und Vorbereitungen zu dieser Operation angeben, und dann den theoretischen Effect der Kraft durch Rechnung zu bestimmen suchen, welche zum Gleichgewichte erforderlich ist.

In die Fläche des Marmorblocks, welche die Basis desselben bilden sollte, hatte man eine Nute oder Falze von 7 Zoll Tiefe, 10 Zoll Breite und 14 Zoll Länge gemacht. Der Marmorblock wurde mit Erdwinden und gewöhnlichen Winden nahe an das Postament gebracht und dann auf ein Gatter gelegt, welches aus vier durch Bolzen mit einander verbundenen Stücken Tannenholz bestand, welche einen Querschnitt von $10^1/_2$ Zoll Länge und $9^1/_2$ Zoll Breite hatten. Die Nute des Marmorblockes wurde auf 12 eiserne Haken von 3 Zoll Breite und 2 Zoll Dicke gelegt, welche die Schenkel des Gatters umfaßten, woran sie mit Schraubenbolzen befestigt waren, und auf diese Haken hatte man hölzerne Unterlagen gelegt, damit der Marmorblock das Eisen nicht berührte.

In das Gatter hatte man 6 kupferne Schraubenmuttern mit vierkantigen Schraubengängen eingelassen und die in dieselben gehenden Schraubenspindeln bestanden aus Eisen. Ihr Durchmesser betrug 2 Zoll 9 Linien, der Kopf jeder Schraube war nach zwei aufeinander senkrechten Richtungen mit Löchern von 1 Zoll im Durchmesser durchbrochen und der untere Theil der Spindel ging in ein kupfernes Zapfenlager, welches in einem unter dem Gatter liegenden Stück Holz befestigt war. Diese Schrauben wurden mit eisernen Hebeln von ungefähr 3 Fuß Länge gedrehet, und aus der Figur 106, welche nach dem Maaßstabe von $^1/_{32}$ einen Aufriß des Marmorblockes in seinem vor dem Postamente, auf welches er gehoben werden sollte, liegenden Gatter darstellt, erkennt man leicht alle Theile dieser Verbindung. Die Figur 106^a stellt eine Projection einer der Schrauben in einem doppelten Maaßstabe und Figur 106^b ihre perspectivisch gezeichnete Schraubenmutter dar.

Das Gewicht des Marmorblockes betrug ungefähr 110,000 Pfund, wozu man noch das Gewicht des Gatters mit seinem Beschlage hinzuaddiren muß, welches auf 2000 Pfund angeschlagen werden kann, und folglich muß die Kraft ein Gewicht von 112,000 Pfund heben können. Um die Kraft zu bestimmen, welche dieses Gewicht vermittelst der 6 Schrauben, deren Weite oder Höhe des Gewindes 5 Linien beträgt, im Gleichgewichte zu erhalten vermag, wollen wir annehmen, daß die Länge jedes Hebels von der Axe der Schraube bis zu dem Angriffspuncte der Resultante der an diesem Hebel angebrachten Kräfte 2 Fuß 3 Zoll oder 27 Zoll beträgt. Werden diese Werthe statt der entsprechenden Buchstaben in die sich aus der Proportion in §. 175 ergebende Formel:

$$P = \frac{Qh}{2\pi R'}$$

substituirt, so erhält man:

$$P = \frac{112000 \times {}^{5}/_{12}}{2 \times 3{,}1416 \times 27} = \frac{560000}{6{,}2832 \times 27 \times 12}'$$

und wenn man mit Logarithmen rechnet, so findet man:

	log. 560000 =	5, 7481880
dec. Erg.	*log.* 6, 2832 =	9, 2018191
dec. Erg.	*log.* 27 =	8, 5686362
dec. Erg.	*log.* 12 =	8, 9208188
	log. P =	32, 4394621,

also $P = 275{,}0819.$

Um also den Marmorblock mit seinem Gatter im Gleichgewichte zu erhalten, müßte an dem Hebel jeder Schraube eine Kraft von $^{1}/_{6} P = 45{,}847$ Pfund wirken; aber wenn man den Marmorblock bewegen will, so muß jede dieser Kräfte um eine solche Größe vermehrt werden, als zur Ueberwindung der Reibung der Schraube erforderlich ist, wodurch ein beträchtlicher Theil der Kraft absorbirt wird.

Von dem Keile.

§. 180. Ein Keil ist ein gerades, dreiseitiges Prisma *ABCDEF* (Fig. 107) von Holz, Eisen oder einem andern Metalle, welches in eine Spalte eines Körpers oder zwischen die Theile eines Systemes von Körpern getrieben wird, indem man mit einem Hammer oder jedem andern Instrumente darauf schlägt, um den Körper zu zerspalten und in zwei Theile zu theilen, oder um mehrere Körper von einander zu trennen, oder sie stark gegen einander zu drücken, oder um eine sehr schwere Last zu heben.

Die Fläche *ABEF* des Keiles, auf welche geschlagen wird, heißt der Kopf oder Rücken desselben; die Kante, welche in die Spalte gebracht wird, nennt man die Schärfe oder Schneide des Keiles und die beiden Flächen *ACDF*, *BCDE* werden die Seiten desselben genannt.

Da der Keil *ABCDEF* ein gerades Prisma ist, so sind die drei Kanten *AF*, *BE*, *CD* einander gleich, der Rücken und die beiden Seiten Rechtecke und man hat:

$$ABEF : ACDF : BCDE = AB \times AF : AC \times AF : BC \times BE = AB : AC : BC.$$

Man kann also für die Fläche des Rückens *ABEF* des Keiles und für seine beiden Seitenflächen *ACDF*, *BCDE* die geraden Linien *AB*, *AC*, *BC* substituiren, welche in demselben Verhältnisse stehen, d. h. man kann statt des Keiles das Dreieck *ABC*, welches einen Durchschnitt desselben bildet, betrachten.

Bei den gewöhnlichen Anwendungen des Keiles besteht die auf denselben wirkende Kraft in dem Stoße oder Drucke, welcher durch die auf seinen Rücken oder Kopf ausgeübten Hammerschläge hervorgebracht wird, und das dieser Kraft entgegenwirkende Hinderniß ist der Widerstand der Theile des Körpers, welche man von einander trennen will. Wir können diesen Widerstand nicht wie bei den übrigen einfachen Maschinen angeben, denn wir kennen die Cohäsionskraft der Theile des zu trennenden Körpers nicht; aber wenn die Kraft als bekannt vorausgesetzt wird, so lassen sich leicht die Wirkungen bestimmen, welche sie in normalen Richtungen auf den beiden Seiten des Keiles gegen das Hinderniß oder gegen den zu überwindenden Widerstand ausübt.

Wir wollen annehmen, daß die Richtung der Kraft auf dem Rücken des Keiles senkrecht ist; denn wenn sie nicht darauf senkrecht wäre, so könnte man diese Kraft in zwei andere zerlegen, wovon die eine auf dem Rücken des Keiles senkrecht und die andere zu demselben parallel wäre. Die erste würde also ihre Wirkung auf den Widerstand ausüben, und die zweite würde keine andere Wirkung haben, als das Fortgleiten des Hammers zu bewirken.

§. 181. Aufg. Wenn der Keil *ABC* (Fig. 108) in einen Einschnitt oder eine Spalte an dem obern Theile eines auf der festen Ebene *XY* ruhenden Körpers *MSXYTN* durch eine Kraft *P* getrieben wird, welche in senkrechter Richtung auf den Rücken *AB* des Keiles wirkt, die Kräfte zu bestimmen, welche alsdann auf die beiden Flächen der Spalte wirken, um sie von einander zu trennen. — Aufl. Da die Kraft *P*, welche nach dem Perpendikel *PR* auf *AB* wirkt, durch die Theile *MX*, *NY* des Körpers *MSXYTN* aufgehoben wird, dessen Widerstand dem Eindringen des Keiles entgegen wirkt, so gibt es auf der geraden Linie *PR* einen oder mehrere Puncte, aus welchen man auf die Seiten *AC*, *BC* des Keiles die Perpendikel *DP'*, *DP''* von solcher Beschaffenheit ziehen kann, daß die Puncte, wo sie die Seiten des Keiles treffen, innerhalb der Figuren liegen, welche von den gegen den Keil drückenden Theilen des Körpers gebildet werden, wenn man annimmt, daß die Seiten des Keiles die innern Flächen der Spalte in mehreren Puncten berühren. Wenn jeder Theil *MX*, *NY* des zu trennenden Körpers den Keil nur in einem einzigen Puncte berührte, so müßten die aus dem Puncte *D* der geraden Linie *PR* auf die Seiten *AC*, *BC* des Keiles gefällten Perpendikel durch die Berührungspuncte gehen.

Aus diesen Betrachtungen sieht man, daß der Keil viel Aehnlichkeit mit der schiefen Ebene hat.

Die Kraft P kann in dem Puncte D ihrer Richtung angebracht werden, und wir wollen annehmen, daß sie durch die Länge DH dargestellt wird und endlich HF, HE resp. zu DP', DP'' parallel ziehen; so ist die Figur $DEHF$ ein Parallelogramm und die Seiten DE, DF drücken die Wirkungen aus, welche die Kraft P zur Trennung der Theile MX, NY des Körpers ausübt. Die Seiten der beiden Dreiecke DEH, ABC sind resp. auf einander senkrecht, folglich sind diese Dreiecke einander ähnlich, und wenn man die durch die geraden Linien DE, DF dargestellten Componenten der Kraft P mit P', P'' bezeichnet, so hat man:

$$P : P' : P'' = DH : DE : DF \text{ oder } EH = AB : AC : BC,$$

woraus folgt:

$$P : P' + P'' = AB : AC + BC,$$

d. h. die Kraft verhält sich zu der Summe der Wirkungen, welche sie hervorbringt, um den Körper in zwei Theile zu theilen, wie der Rücken des Keiles zu der Summe seiner beiden Seiten.

Diese Proportion zeigt, daß die zum Hineintreiben eines Keiles in eine Spalte eines Körpers erforderliche Kraft desto kleiner ist, je kleiner der Rücken des Keiles gegen seine Seiten ist, oder mit andern Worten, je schärfer der Keil ist; aber alsdann berührt der Keil den Körper auch in den größern Flächenausdehnungen und es wird ein beträchtlicher Theil der übertragenen Kraft durch die Reibung absorbirt.

Auf den Keil lassen sich viele in den Künsten und Gewerben angewandten Werkzeuge zurückführen, wie die Axt, die Hacke, die Scheere, ꝛc.

Wenn die Seiten AC, BC (Fig. 109) des Keiles einander gleich sind und die gerade Linie PH, nach welcher die Kraft P wirkt, auf der Mitte des Rückens AB des Keiles senkrecht ist; so ist das Dreieck ABC gleichschenklig, die beiden Componenten P', P'' sind einander gleich und die vorhergehende Proportion verwandelt sich in:

$$P : 2P' = AB : 2AC \text{ oder } P : P' : AB : AC.$$

Aus dieser letzten Proportion folgt, daß die Kraft sich zu der Wirkung, welche sie in senkrechter Richtung auf jeder Seite des Keiles ausübt, wie der Rücken des Keiles zu einer seiner Seiten verhält.

§. 182. Wenn der Keil ABC (Fig. 110) zur gegenseitigen Entfernung zweier auf einer festen Ebene XY ruhenden Körper S, S' und zur Ausübung eines starken Druckes in Folge der gegenseitigen Entfernung dieser beiden Körper angewandt wird; so wird die von der Kraft auf jede Seite des Keiles ausgeübte Wirkung in zwei Kräfte zerlegt, wovon die eine durch den Widerstand der festen Ebene aufgehoben wird, und die andere sucht den Theil des Körpers zu entfernen, welcher sich auf ihrer Richtung befindet. Da die beiden Componenten P', P'' der Kraft P durch die geraden Linien DE, DF oder durch die Seiten AC, BC des Dreieckes ABC dargestellt werden, so kann man sich vorstellen,

als lägen ihre Angriffspuncte in den Berührungspuncten a, a'. Von dem Puncte a' wollen wir auf der Richtung der Kraft P' die Länge $ac = DE$ und auf der Richtung der Kraft P'' die Länge $a'c' = DF$ nehmen, die Linie ab zu der Ebene XY, worauf die Körper S, S' stehen, parallel und die Linie ad auf diese Ebene senkrecht ziehen, dann das Parallelogramm $abcd$, welches ein Rechteck ist, vollenden und endlich ebenso auf der andern Seite des Keiles das Rechteck $a'b'c'd'$ construiren; so wird nach diesen Constructionen die Kraft P' in zwei andere Kräfte zerlegt, wovon die eine p' durch die Seite ab des Rechteckes $abcd$ ausgedrückt wird und die andere durch die auf der Ebene XY senkrechte Seite ad ausgedrückte wird durch den Widerstand dieser Ebene aufgehoben. Ebenso wird die Kraft P'' in zwei andere Kräfte zerlegt, wovon die eine P'' durch $a'b'$ ausgedrückt wird, während die andere durch $a'd'$ ausgedrückte durch die feste Ebene XY aufgehoben wird.

Betrachtet man die beiden Kräfte P' und p', so hat man:

$$P' : p' = ac : ab,$$

und außerdem hat man die Proportion:

$$P : P' = AB : AC.$$

Da die Seiten der beiden rechtwinkligen Dreiecke abc, AIC resp. auf einander senkrecht sind, so sind diese Dreiecke einander ähnlich und man hat folglich:

$$ac : ab = AC : IC.$$

Multiplicirt man diese drei Proportionen Glied für Glied in einander, und läßt die gemeinschaftlichen Factoren hinweg, so kommt:

$$P : p' = AB : IC.$$

Ein ähnliches Resultat würde man für die auf die andere Seite des Keiles wirkende Kraft p'' finden, woraus folgt: daß sich die in der Mitte des Rückens des Keiles nach einer darauf senkrechten Richtung wirkende Kraft zu dem auf jede Seite desselben ausgeübten Drucke, wie der Rücken des Keiles zu seiner Höhe verhält.

Princip der virtuellen Geschwindigkeiten.

§. 183. Aus dem in dem gegenwärtigen Kapitel Mitgetheilten hat man gesehen, wie man sich des Principes der Zusammensetzung der Kräfte oder der Regel des Parallelogrammes der Kräfte zur Auflösung der Aufgaben bedienen kann, deren Zweck darin besteht, die Bedingungen zu finden, welche bei dem Gleichgewichte der einfachen Maschinen und der verschiedenen Verbindungen derselben erfüllt werden müssen. Wir wollen uns nun mit einem andern allgemeinen Principe des Gleichgewichtes beschäftigen, welches in mehreren Fällen zur Auflösung derselben Aufgaben mit Nutzen angewandt werden kann. Dieses Princip ist das sogenannte Princip der virtuellen Geschwindigkeiten, wovon wir bloß eine umständliche Auseinandersetzung mittheilen wollen und der Beweis seiner Richtigkeit beruhet für uns hier bloß auf der Uebereinstimmung der durch dieses Princip und durch

das der Zusammensetzung der Kräfte erhaltenen Resultate; denn der strenge Beweis des Principes der virtuellen Geschwindigkeiten kann hier nicht mitgetheilt werden und findet sich in den bessern Lehrbüchern der theoretischen Mechanik.

Unter der virtuellen Geschwindigkeit eines Körpers, welcher sich im Gleichgewichte befindet, versteht man diejenige Geschwindigkeit, welche dieser Körper annehmen kann und wirklich in dem ersten Augenblicke, wo das Gleichgewicht desselben gestört wird, annehmen würde.

Betrachten wir zunächst einen geraden horizontalen Hebel, an dessen beiden Enden zwei Gewichte einander das Gleichgewicht halten. Wenn dieses Gleichgewicht durch irgend eine Ursache gestört wird, so nimmt der Hebel um seinen Stützpunct eine Rotationsbewegung an, die von seinen Endpuncten in dem ersten Augenblicke beschriebenen Bogen sind die virtuellen Geschwindigkeiten, und wenn man sie auf die Richtungen der Kräfte projicirt, so erhält man die nach diesen Richtungen geschätzten virtuellen Geschwindigkeiten. Das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten besteht nun darin: daß Kräfte im Gleichgewichte sind, wenn sie sich umgekehrt, wie die nach ihren Richtungen oder nach deren Verlängerungen geschätzten virtuellen Geschwindigkeiten verhalten. Die Kräfte sind immer positiv, aber die nach ihren Richtungen und nach deren Verlängerungen geschätzten virtuellen Geschwindigkeiten dieser Kräfte müssen entgegengesetzte Zeichen haben, so daß, wenn die ersten als positiv angenommen werden, die letzten als negativ betrachtet werden müssen.

Wir wollen nun eine Formel suchen, welche der algebraische Ausdruck des eben ausgesprochenen Principes der virtuellen Geschwindigkeiten ist.

Es seien $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{P'}$ zwei Kräfte, welche durch die geraden Linien CP, CP' (Fig. 111) ausgedrückt werden und R die durch die gerade Linie $\boldsymbol{CR}$ ausgedrückte Resultante dieser Kräfte. Durch den Punct $\boldsymbol{C}$ wollen wir eine unbegrenzte gerade Linie VX ziehen und auf dieselbe die Perpendikel $\boldsymbol{P}x$, $\boldsymbol{P'}x'$, Rx'' fällen und endlich die Winkel RCV, $\boldsymbol{PCX}$, $\boldsymbol{P'}CX$ resp. mit a, α, α' bezeichnen; so haben wir, wenn die Kräfte R, $\boldsymbol{P}$ und $\boldsymbol{P'}$ nach der Richtung VX geschätzt werden, die Gleichung:

$$\boldsymbol{R}\ cos.\ a = \boldsymbol{P}\ cos.\ \alpha + \boldsymbol{P'}\ cos.\ \alpha'. \qquad (1)$$

Wir wollen nun annehmen, daß die Resultante $\boldsymbol{R}$ einen Zuwachs bekomme, so wird das Gleichgewicht aufgehoben und der Punct C durchläuft im ersten Augenblicke der Bewegung die Entfernung CD, welche wir als in der Richtung der geraden Linie VX liegend annehmen können, weil diese gerade Linie, welche durch den Punct C geht, in der Ebene der Kräfte willkürlich gezogen ist und die gerade Linie CD heißt die virtuelle Geschwindigkeit des Punctes C.

Aus dem Puncte D wollen wir auf die Richtungen der Kräfte $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{P'}$ resp. die Perpendikel Dr, Dp, Dp' fällen und der Kürze wegen $Cr = r$, $Cp = p$, $Cp' = p'$ setzen, so sind diese geraden Linien r, p, p' die Projectionen der virtuellen Geschwindigkeit CD, oder die virtuellen Geschwindigkeiten der Kräfte R, $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{P'}$, nach ihren Richtungen geschätzt.

Die rechtwinkligen Dreiecke CrD, CpD, $Cp'D$ geben $cos.\, a = \frac{r}{CD'}$, $cos.\, \alpha = \frac{p}{CD'}$, $cos.\, \alpha' = \frac{p'}{CD'}$, und wenn man diese Größen in die vorhergehende Gleichung substituirt, und den gemeinschaftlichen Nenner CD hinwegläßt, so kommt:

$$Rr = Pp + P'p'. \qquad (2)$$

Das Product aus einer Kraft und ihrer virtuellen Geschwindigkeit hat man Moment genannt, und folglich drückt die eben gefundene Gleichung aus, daß, wenn mehrere auf denselben Punct wirkende Kräfte im Gleichgewichte sind, das Moment der Resultante dieser Kräfte der Summe der Momente ihrer Componenten gleich ist. Die Producte, welche wir eben Momente genannt haben, sind virtuelle Momente, welche man nicht mit den Größen verwechseln muß, die wir bei der Zusammensetzung der Kräfte (§. 30) mit demselben Namen bezeichnet haben. Das Moment einer Kraft ist immer das Product aus dieser Kraft und der in einer geraden Linie enthaltenen Anzahl von Längeneinheiten; aber bei gewöhnlichen Momenten ist diese gerade Linie auf der Richtung der Kraft senkrecht, während bei den virtuellen Momenten diese gerade Linie in der Richtung der Kraft selbst oder in ihrer Verlängerung liegt.

Um die Gleichung (2) zu erhalten, haben wir bloß die Größen, womit die Kräfte R, P, P' in der Gleichung (1) multiplicirt sind, transformirt. Wenn die Gleichung (2) gegeben wäre, so könnte man die Transformationen leicht verrichten, durch welche man die Gleichung (1) wieder erhält; denn das rechtwinklige Dreieck CrD gibt die Proportion:

$$1 : cos.\, a = CD : Cr \text{ oder } r = CD.\, cos.\, a,$$

und die rechtwinkligen Dreiecke CpD, $Cp'D$ geben:

$$p = CD.\, cos.\, \alpha,\ p' = CD.\, cos.\, \alpha'.$$

Werden diese Werthe von r, p, p' in die Gleichung (2) substituirt und wird der gemeinschaftliche Factor CD hinweg gelassen, so verwandelt sich diese Gleichung in:

$$R\, cos.\, a = P\, cos.\, \alpha + P'\, cos.\, \alpha',$$

d. h. man erhält die Gleichung (1), welche wir nach dem Principe der Zusammensetzung der Kräfte direct abgeleitet hatten.

Ebenso kann man die Gleichungen (1) und (2) für eine beliebige Anzahl von Kräften, welche einen Punct oder Körper im Gleichgewichte halten, ableiten.

Wir wollen nun an einigen Beispielen zeigen, daß man, wenn man zur Bestimmung der Bedingungen des Gleichgewichtes der einfachen Maschinen das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten anwendet, dieselben Resultate wieder findet, als die, welche wir durch das Princip der Zusammensetzung der Kräfte erhalten haben.

Beispiel 1. Es sei ACB (Fig. 112) ein Hebel, C sein Unterstützungspunct und P eine an dem Ende A des Hebelarmes CA nach der Richtung AP wirkende Kraft, welche der im Endpuncte des andern

Hebelarmes CB aufgehangenen Last das Gleichgewicht hält, und man soll nun das Verhältniß der Kraft P zu dem Gewichte der Last Q bestimmen.

Lassen wir die Kraft P um eine kleine Größe zunehmen, so wird das Gleichgewicht gestört, der Hebel hat am Ende des ersten Augenblickes der Bewegung die Lage mCn und wir können hier die Gleichung der virtuellen Geschwindigkeiten:

$$Rr = Pp + P'p'$$

anwenden. Zunächst wollen wir bemerken, daß die Resultante R durch den Widerstand des Unterstützungspunctes C aufgehoben wird, und für $P'p'$ wollen wir $-Qq$ setzen; denn dieses Glied muß negativ sein, weil die Projection q der virtuellen Geschwindigkeit auf die Verlängerung der Richtung der Last Q fällt, und folglich verwandelt sich die Gleichung des Gleichgewichtes in:

$$Pp = Qq.$$

Diese Gleichung lehrt, daß bei dem Hebel im Gleichgewichtszustande die virtuellen Momente der Kraft P und der Last Q einander gleich sind, und wir wollen nun zeigen, daß diese Gleichung mit der durch das Princip der Zusammensetzung der Kräfte erhaltenen übereinstimmt.

Zieht man mp senkrecht auf AP und nq senkrecht auf BQ, so hat man $p = Ap$, $q = Bq$ und die Seiten der rechtwinkligen Dreiecke Apm, AMC sind resp. auf einander senkrecht; denn Ap und pm sind resp. auf CM und AM senkrecht, und statt des kleinen Bogens Am, welcher die Hypotenuse oder die dritte Seite des Dreieckes bildet, kann man die Tangente dieses Bogens nehmen, welche auf der Hypotenuse CA des zweiten Dreieckes senkrecht ist. Diese beiden Dreiecke sind also einander ähnlich und ihre homologen Seiten geben die Proportion:

$$CA : CM = Am : Ap = \frac{CM \times Am}{CA}.$$

Ebenso wird bewiesen, daß die beiden rechtwinkligen Dreiecke Bqn, BNC einander ähnlich sind und ihre homologen Seiten die Proportion geben:

$$CB : CN = Bn : Bq = \frac{CN \times Bn}{CB}.$$

Werden diese Werthe für p und q substituirt, so verwandelt sich die Gleichung der virtuellen Momente in:

$$\frac{P \times CM \times Am}{CA} = \frac{Q \times CN \times Bn}{CB}.$$

Bei der Bewegung, wodurch die Lage des Hebels verändert ist, haben die Hebelarme CA, CB zwei gleiche Winkel beschrieben und die kleinen Bogen Am, Bn, welche diese Winkel messen, verhalten sich wie ihre Halbmesser, so daß

$$CA \times Bn = CB \times Am$$

ist, und wenn man diese Gleichung mit der vorhergehenden multiplicirt, und die gemeinschaftlichen Factoren hinweg läßt, so erhält man die Gleichung der gewöhnlichen Momente:

$$P \times CM = Q \times CN,$$

welche durch sehr einfache Transformationen aus der Gleichung der virtuellen Momente abgeleitet ist, woraus folgt, daß jede dieser beiden Gleichungen die Bedingungen des Gleichgewichtes des Hebels ausdrückt.

Wenn auf den Hebel nicht bloß zwei Kräfte wirken, wovon die eine die Kraft und die andere der Widerstand genannt wird, sondern wenn eine größere Anzahl von Kräften auf den Hebel wirkten, so würde die Gleichung der virtuellen Geschwindigkeiten aus so vielen Gliedern bestehen, als man Kräfte hat, die Summe aller dieser Glieder würde $= 0$ sein und durch ähnliche Transformationen, wie die eben vorgenommenen würde man die aus dem Principe der Zusammensetzung der Kräfte abgeleiteten Bedingungen des Gleichgewichtes des Hebels wiederfinden. Uebrigens kann man alle auf einen Hebel wirkenden Kräfte immer auf zwei Kräfte zurückführen, wovon die eine die Resultante der Kräfte ist, welche den Hebel nach einem Sinne zu drehen streben, und die andere die Resultante aus allen den Kräften, welche ihn nach entgegengesetztem Sinne zu drehen suchen.

Beispiel 2. Die in §. 118 gefundenen Bedingungen des Gleichgewichtes der Radwelle (Fig. 66) aus dem Principe der virtuellen Geschwindigkeiten abzuleiten.

Bei dieser Maschine drehet sich das Rad mit der Welle oder Trommel, woran es befestigt ist, gleichzeitig. Wenn das Rad vermöge der Wirkung der Kraft P eine ganze Umdrehung macht, so durchläuft der Angriffspunct dieser Kraft einen Weg, dessen Länge der des Radumfanges gleich ist, und während derselben Zeit steigt der Widerstand oder das Gewicht Q in verticaler Richtung um eine Länge, welche der des Umfanges der Welle gleich ist. Diese Umfänge sind die von der Kraft und Last in dem ersten Augenblicke der Bewegung durchlaufenen Räume, und sie verhalten sich nach dem Principe der virtuellen Geschwindigkeiten umgekehrt, wie die Kraft zur Last. Man hat also:

$$P : Q = 2\pi \times CN : 2\pi \times CM = CN : CM$$

und dieses ist die Proportion, welche wir durch die gewöhnliche Methode gefunden haben.

Beispiel 3. Die Bedingungen des Gleichgewichtes der gewöhnlichen Wagenwinde, welche als eine Verbindung eines Hebels und einer Radwelle betrachtet werden kann, durch das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten zu finden.

Es bezeichne R die Länge des Kurbelarmes oder des Hebelarmes, an dessen Ende die Kraft P wirkt, r den Halbmesser des Getriebes, dessen Zähne in die des Rades M eingreifen und Q' den Widerstand dieses Rades; so hat man, wenn man bemerkt, welche Länge die von dem Angriffspuncte der Kraft an der Kurbel und von dem Endpuncte des Halbmessers des Getriebes gleichzeitig beschriebenen Kreisumfänge haben:

$$P : Q' = 2\pi r : 2\pi R = r : R.$$

Es sei R' der Halbmesser des Rades M und r' der des Getriebes N', dessen Zähne in die der Zahnstange der Winde eingreifen, so hat man nach dem letzten Beispiele:

$$Q' : Q = 2\pi r' : 2\pi R' = r' : R',$$

und wenn man diese beiden Proportionen Glied für Glied in einander multiplicirt, so kommt:

$$P : Q = rr' : RR,$$

welches Resultat mit dem in §. 141 erhaltenen übereinstimmt.

Beispiel 4. Vermittelst des Principes der virtuellen Geschwindigkeiten die Bedingungen des Gleichgewichtes zweier Körper M und M' zu finden, welche auf zwei gegeneinander gestellten, geneigten Ebenen ACA' (Fig. 113) von der gemeinschaftlichen Höhe BC und von den Basen AB, BA' liegen, und vermittelst eines über die feste Rolle E gehenden, vollkommen biegsamen und unausdehnbaren Seiles mit einander verbunden sind.

Da auf die beiden Körper M und M' bloß ihre Gewichte P und Q wirken, welche einander das Gleichgewicht halten, so können wir annehmen, daß die Angriffspuncte dieser Gewichte in den Schwerpuncten g, g' der beiden Körper liegen und daß diese Gewichtskräfte nach den Verticalen gP, $g'Q$ wirken.

Wenn das Gleichgewicht gestört wird, so daß der Körper M in dem ersten Augenblicke der Bewegung auf der schiefen Ebene CA herabsinkt und die Lage N annimmt; so hat sein Schwerpunct g die Länge gh durchlaufen, während der Körper M' in demselben Augenblicke auf der schiefen Ebene CA' gestiegen und in die Lage N' gekommen ist, so daß sein Schwerpunct g' die Länge $g'h' = gh$ durchlaufen hat.

Hiernach läßt sich die Gleichung $Pp = Qq$ leicht zur Bestimmung der Bedingungen des Gleichgewichtes anwenden. Die geraden Linien gh, $g'h'$ sind die virtuellen Geschwindigkeiten der Körper M und M'; sie sind einander gleich und haben entgegengesetzte Zeichen. Zieht man durch die Puncte h und h' die geraden Linien hi, $h'i'$, resp. auf die Verticalen gP, $g'Q$ senkrecht, so sind die Entfernungen gi, $g'i'$ oder die Projectionen der virtuellen Geschwindigkeiten auf die Richtungen der Kräfte P und Q die Werthe von p und q, und wenn diese Werthe in die vorhergehende Gleichung substituirt werden, so kommt:

$$P \times gi = Q \times g'i',$$

d. h. die Gewichte P und Q verhalten sich umgekehrt, wie die verticalen Längen, welche sie in dem ersten Augenblicke der Bewegung durchlaufen würden. Um die Richtigkeit dieser Regel darzuthun, wollen wir untersuchen, wie sich daraus die herleiten läßt, welche auf den gewöhnlichen Principen der Statik beruhet.

Die beiden rechtwinkligen Dreiecke ABC und hig, deren Seiten parallel sind, sind einander ähnlich und geben:

$$AC : CB = gh : gi = \frac{CB \times gh}{AC},$$

und die ähnlichen Dreiecke $A'BC$, $h'i'g'$ geben ebenfalls:

$$A'C : CB = g'h' : g'i' = \frac{CB \times g'h'}{A'C'}.$$

Werden diese Werthe von $g'i'$, $g'i'$ in die vorhergehende Gleichung subſtituirt, ſo erhält man nach verrichteten Reductionen, und wenn man bemerkt, daß $gh = g'h'$ iſt:

$$P \times A'C = Q \times AC.$$

Die Gewichte P und Q der Körper M und M' verhalten ſich alſo im Gleichgewichtszuſtande, wie die Längen der ſchiefen Ebenen, worauf ſie ruhen, welches die in §. 170 bereits gefundene Gleichgewichtsbedingung iſt, und woraus wiederum folgt, daß das Princip der virtuellen Geſchwindigkeiten mit dem der Zuſammenſetzung der Kräfte übereinſtimmt.

Beiſpiel 5. Um das Princip der virtuellen Geſchwindigkeiten auf die Beſtimmung der Bedingungen des Gleichgewichtes der Schraube anzuwenden, wollen wir die in Figur 106^a, welche ein Stück von Figur 106 bildet, betrachten. Die Mutter E dieſer Schraube AB iſt in einem der tannenen Balken M des Geſtelles befeſtigt, welches zum Heben der Laſt Q dient und die Kraft P wirkt an dem Hebel H, welcher an dem Kopfe der Schraube angebracht iſt, deren unteres Ende oder Zapfen ſich in dem Zapfenlager C drehet, welches in dem unter dem Geſtelle befeſtigten Balken N angebracht iſt.

Die Richtung der Kraft P iſt horizontal und auf dem Hebel H ſenkrecht. Statt dieſes Hebels kann man ein horizontales Rad anwenden, deſſen Halbmeſſer der von der Axe der Schraube bis zum Angriffspuncte der Kraft genommenen Länge des Hebels gleich iſt, und um deſſen Umfang ein Seil gelegt wird, woran die Kraft nach tangentialer Richtung zieht. Auch wird an der Wirkung dds Syſtemes nichts geändert, wenn man dieſes Seil über eine feſte Rolle gehen läßt und an ſeinem freien Ende ein der Kraft gleiches Gewicht aufhängt.

Bei dieſer Einrichtung wirken die Kraft oder das Gewicht P und der Widerſtand Q in verticaler Richtung nach entgegengeſetztem Sinne. Wenn das Gleichgewicht ſtattfindet und dann durch eine Zunahme der Kraft oder durch eine Abnahme der Laſt geſtört wird, ſo ſinkt das Gewicht herab und die Laſt ſteigt aufwärts und die in dem erſten Augenblicke durchlaufenen Räume ſind die virtuellen Geſchwindigkeiten.

Wenn h die Höhe des Schraubenganges und r die Länge des Hebels oder den Halbmeſſer des horizontalen Rades bezeichnet; ſo wird die Länge ſeines Umfanges durch $2\pi r$ ausgedrückt, und wenn man $p = 2\pi r$, $p' = h$ ſetzt, ſo verwandelt ſich die Gleichung der virtuellen Geſchwindigkeiten in:

$$2\pi r P = hQ, \quad \frac{P}{Q} = \frac{h}{2\pi r},$$

welche mit der in §. 174 durch die gewöhnliche Methode gefundenen Proportion übereinſtimmt.

Es ſei $h = 0^m,009$, $r = 0^m,704$, ſo erhält man, wenn man dieſe Zahlenwerthe und $\pi = 3,1416$ in die letzte Formel subſtituirt:

$$\frac{P}{Q} = \frac{0{,}009}{2 \times 3{,}1416 \times 0{,}704} = \frac{9}{4423}.$$

Eine an dem Hebel dieser Schraube wirkende Kraft von 9 Kilogr. würde also einer Last von 4423 Kilogr. das Gleichgewicht halten, wenn keine Reibung stattfände.

Beispiel 6. Betrachten wir noch zwei Flaschen *M* und *N* (Fig. 114), wovon die erste durch einen in ihren Biegel gehenden Hakenbolzen *H* in einer festen Lage erhalten wird und die zweite mit einem Haken versehen ist, woran die zu hebende Last aufgehangen wird. Beide Flaschen sind durch ein Seil mit einander verbunden, welches mit einem Ende an einem festen Puncte *K* befestigt ist und successive über die Rollen der beweglichen und die der festen Flasche geht und an seinem freien Ende wirkt eine Kraft, wofür man ein ihr gleiches Gewicht *P* substituiren kann.

Es läßt sich leicht zeigen, daß die Bedingungen des Gleichgewichtes dieser Maschine in der Gleichung der virtuellen Geschwindigkeiten:

$$Pp = Qq$$

enthalten sind. Denn wenn das Gewicht *Q* im ersten Augenblicke der Bewegung um eine Höhe *h* gehoben wird, so verkürzt sich jedes der vier Seilstücke, welche an die beiden Rollen der beweglichen Flasche stoßen, um dieselbe Größe *h*, und folglich sinkt das Gewicht *P* um die Länge $4h$ herab. Es ist also $p = 4h$ und $q = h$, und wenn man diese Größe in die Gleichung der virtuellen Geschwindigkeiten substituirt, so kommt:

$$4hP = hQ,\ P = \frac{Q}{4},$$

welches Resultat mit dem nach dem Principe der Zusammensetzung der Kräfte gefundenen übereinstimmt.

Die bisher angeführten Beispiele sind hinreichend, um zu zeigen, daß man durch das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten die Gleichgewichtsbedingungen aller einfachen Maschinen finden kann; allein dieses Princip findet nicht bloß bei den einfachen Maschinen statt, sondern es kann auch auf alle zusammengesetzten Maschinen angewandt werden, um das im Gleichgewichtszustande derselben zwischen der Kraft und dem Widerstande stattfindende Verhältniß zu finden, zu welchem Zwecke man der Kraft einen kleinen Zuwachs ertheilt, so daß sie einen kleinen Raum durchläuft, welche Bewegung auf den Widerstand übertragen wird, der in demselben Augenblicke einen bestimmten Raum durchläuft, und wenn die von den Angriffspuncten der Kraft und des Widerstandes durchlaufenen Wege auf die Richtungen dieser Kräfte projicirt werden; so ist das umgekehrte Verhältniß dieser beiden Projectionen dem theoretischen Verhältnisse der Kraft zum Widerstande gleich.

Aus dem Vorhergehenden folgt, daß das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten bei der Auflösung statischer Aufgaben vor dem Principe der Zusammensetzung der Kräfte den Vorzug verdient, weil es dieselben Auflösungen einfacher gibt und weniger complicirt ist, also leichter im Gedächtnisse behalten werden kann. Das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten war für den Hebel und einige andere einfache Ma-

schinen seit langer Zeit bekannt und Galiläi betrachtete dasselbe als eine allgemeine Eigenschaft des Gleichgewichtes der Maschinen. Descartes hat die ganze Statik auf ein einziges Princip zurückgeführt, welches auf das der virtuellen Geschwindigkeiten hinausläuft. J. Bernoulli hat dieses Princip auf ein beliebiges System im Gleichgewichte befindlicher Körper ausgedehnt; aber Lagrange hat erst die ganze Fruchtbarkeit dieses Principes der virtuellen Geschwindigkeiten gezeigt, indem er dasselbe zur Grundlage seiner analytischen Mechanik nahm, und nach diesem großen Geometer ist dieses Princip in alle Lehrbücher der theoretischen Mechanik aufgenommen.

Man hatte auch noch einige andere Principien des Gleichgewichtes aufgestellt; aber Lagrange hat gezeigt, daß man sie durch Anwendung der Infinitesimalanalysis auf das der virtuellen Geschwindigkeiten zurückführen kann, wovon sie nur unter einer andern Form dargestellte Modificationen sind, und nach seiner Meinung soll dieses auch bei allen in Zukunft noch zu entdeckenden allgemeinen Lehrsätzen über das Gleichgewicht der Fall sein. Durch Anwendung der Analysis auf dieses Princip ergibt sich der folgende merkwürdige Lehrsatz:

Wenn in einem Systeme schwerer Körper, oder für einen einzigen Körper das Gleichgewicht stattfindet, so hat der Schwerpunct des Systemes oder des Körpers die tiefste oder höchste Lage, welche derselbe möglicherweise annehmen kann.

Für ein System schwerer Körper gibt es zwei Arten des Gleichgewichtes, nämlich ein stabiles Gleichgewicht und ein nichtstabiles, labiles oder momentanes Gleichgewicht. Wenn der Schwerpunct eines Systemes seine möglichst tiefste Lage hat, so ist das Gleichgewicht stabil, und wenn er seine möglichst höchste Lage hat, so ist es nichtstabil. Bei der Kettenlinie (§. 77) ist das Gleichgewicht stabil, weil eine der Eigenschaften dieser Curve darin besteht, daß ihr Schwerpunct die möglichst tiefste Lage hat; aber wenn man sie umkehrt, so ist ihr Gleichgewicht nichtstabil. Später werden wir über diese beiden Arten des Gleichgewichtes und deren Anwendungen ein Mehreres erfahren.

Zweites Buch.

Dynamik.

Erstes Kapitel.

Vorläufige Begriffe.

§. 184. Die Dynamik ist die Wissenschaft, welche sich mit den Gesetzen der Bewegung beschäftigt, welche die Körper oder Systeme von Körpern in Folge der auf sie wirkenden Kräfte annehmen. Wenn diese Systeme von Körpern so eingerichtet sind, daß man vermittelst derselben mit geringen Kräften bedeutende Widerstände überwinden oder beträchtliche Geschwindigkeiten erreichen kann und gewisse Arbeiten schnell und genau verrichtet werden können; so werden sie Maschinen genannt.

Wir kennen die Kräfte nur durch die Wirkungen, welche sie hervorbringen, und diese Wirkungen sind für uns hinreichend, weil die uns unbekannte Ursache derselben nicht mit unter den Größen vorkommt, welche man bei dem Beweise der Lehrsätze und bei der Auflösung der Aufgaben der Mechanik in Betracht ziehen muß.

Die Statik beschäftigt sich nur mit den Untersuchungen, bei welchen sich gegenseitig aufhebende Kräfte in Betracht kommen, so daß sich die Körper, auf welche diese Kräfte wirken, im Gleichgewichte befinden. Man sieht leicht ein, daß man die Statik von der Dynamik abhängig machen könnte, weil das Gleichgewicht stattfindet, wenn die Bewegung aufhört. Aber weiter unten werden wir sehen, daß man dahin gelangt ist, die Untersuchungen über die Bewegung auf bloße Untersuchungen über das Gleichgewicht zurück zu führen und daß in der Dynamik der Fall des Gleichgewichtes vorkommt, welches durch in Bewegung befindliche Körper hervorgebracht wird und welcher Fall in der Statik nicht vorkommt. Die Mechanik, welche in die Statik und Dynamik eingetheilt wird, pflegt man daher diesen ihren beiden Haupttheilen nach in demselben Werke abzuhandeln.

Ein Körper ist in Bewegung, wenn er von einem Orte in einen andern übergeht. Wenn man das Studium der Mechanik mit den

Gesetzen der Bewegung beginnt, so stützt man sich auf ein Jedermann bekanntes Factum und bei diesem Verfahren werden die ersten Principien und die daraus abgeleiteten Folgerungen in das gehörige Licht gesetzt. Wenn man aber das Studium der Mechanik mit der Statik beginnt, so muß man den Begriff der Kraft feststellen, wobei immer einige Unklarheit für Anfänger stattfinden kann; allein wenn dieser Begriff der Kraft einmal aufgestellt und aufgefaßt ist, so bilden alle Sätze der Statik eine leicht zu verfolgende und zusammenhängende Kette von Wahrheiten.

Die Aufgaben der Statik sind viel leichter zu lösen, als die der Dynamik und in vielen häufig vorkommenden Fällen muß man bei dynamischen Untersuchungen von statischen Lehren Anwendung machen, mit welchen letztern man sich daher wohl vertraut machen muß, weshalb man auch die Statik von der Dynamik getrennt und zum ersten Theile der Mechanik gemacht hat.

§. 185. Bei den dynamischen Untersuchungen muß auch die Zeit oder Dauer der beobachteten Bewegungen bestimmt werden, und diese Größe kann auf mehrere Arten gemessen werden, worüber wir zunächst Einiges mittheilen wollen. Später werden wir zeigen, wie die Zeit durch die Schwingungen des Pendels gemessen werden kann. Die Uhren werden allgemein zur Zeitmessung angewandt, sowohl bei wissenschaftlichen Untersuchungen und Beobachtungen, als im bürgerlichen Leben, wo keine so große Genauigkeit erfordert wird. Man construirt die Uhren gegenwärtig mit einer solchen Genauigkeit, daß jeder Forderung bei der Zeitmessung der verschiedenen Erscheinungen genügt wird.

Die Zeit, welche zwischen zwei auf einander folgenden Durchgängen der Sonne durch denselben Meridian verfließt, wird ein Sonnentag genannt. Die Sonnentage sind von ungleicher Länge, und wenn eine genau regulirte Uhr an einem bestimmten Tage, z. B. den 15. April, Mittag zeigt, wenn die Sonne durch den Meridian geht, so zeigt sie den folgenden Tag schon auf 12 Uhr, ehe die Sonne durch den Meridian geht, d. h. der Mittag der Uhr findet früher statt, als der der Sonne und dasselbe ist an den folgenden Tagen bis zu dem 15. Juni der Fall; aber nach dieser Zeit geht die Sonne früher durch den Meridian, als die Uhr Mittag zeigt. Der Zeitunterschied zwischen dem Augenblicke, worin die Sonne durch den Meridian geht und dem Augenblicke, wo die Uhr, deren Gang als vollkommen gleichförmig vorausgesetzt wird, Mittag zeigt, wird die Zeitgleichung genannt und ist für jeden Tag des Jahres in den astronomischen Jahrbüchern angegeben.

Um die Unannehmlichkeit wegen der Ungleichheit der in Sonnentagen ausgedrückten Zeit, welche wahre Zeit genannt wird, zu beseitigen, hat man die mittlere Zeit angewandt, deren Tage von gleicher Dauer und gewissermaßen ein Mittel zwischen den längsten und kürzesten Sonnentagen sind. Der durch die Zeitgleichung ausgedrückte Zeitunterschied überschreitet nicht $\frac{1}{88}$ des Tages.

Der Tag wird in 24 Stunden, die Stunde in 60 Minuten und die Minute in 60 Secunden eingetheilt, so daß der Tag $24 \times 60 \times 60 = 86400$ Secunden hat. Die kleinern Zeittheilchen, als die Secunde,

werden in Decimaltheilen der Secunde ausgedrückt, und um z. B. eine Zeit von 7 Stunden 24 Minuten 15¾ Secunden auszudrücken, schreibt man $7^h\,24'\,15'',75$.

Wenn man den Sonnentag zu einer Zeiteinheit nimmt, so bezieht sich dieselbe auf die scheinbare Bewegung der Sonne um die Erde, oder was auf dasselbe hinausläuft, auf die wirkliche Bewegung der Erde um die Sonne. Die Ungleichheiten dieser Zeiteinheit werden durch die Annahme einer Sonne von einer gleichförmigen Bewegung, welche vor der wirklichen Sonne abwechselnd voraus, oder gegen dieselbe zurück ist, verbessert. Diese beiden Sonnen, die wirkliche und die fingirte, fangen ihren jährlichen Umlauf in demselben Augenblicke an, und wenn sie diesen Umlauf vollendet haben, so befinden sie sich wieder in dem Ausgangspuncte.

In der Astronomie bedient man sich auch noch eines andern Zeitmaaßes, welches in der Zeit besteht, die die Erde gebraucht, um sich einmal um ihre Axe zu drehen, oder die Zeit zwischen zwei auf einander folgenden Durchgängen desselben Sternes durch den Meridian, und welche ein Sterntag genannt wird. Durch astronomische Beobachtungen hat man dargethan, daß die Rotationsbewegung der Erde um ihre Axe vollkommen gleichförmig ist, und man hat gefunden, daß der mittlere Tag oder das Zeitintervall zwischen zwei auf einander folgenden Durchgängen der mittleren Sonne durch den Meridian $24^h\,3'\,56'',5554$ Sternzeit beträgt.

Um 24 Stunden Sternzeit in mittlerer Zeit auszudrücken, hat man die Proportion:

$$24^h\,3'\,56'',5554 : 24^h = 24^h : x,$$

woraus folgt:
$$x = \frac{24 \times 24 \times 3600,0000}{86636,5554},$$

$2\ log.\ 24$	$=$	$2,7604224$
$log.\ 36000000$	$=$	$7,5563025$
dec. Erg. $log.\ 866365554$	$=$	$1,0622988$
$log.\ x$	$=$	$11,3790237,$

also
$$x = 23^h,93446 = 23^h\,56'\,4'',06,$$

d. h. die Länge des Sterntages ist gleich $23^h\,56'\,4'',06 = 86164'',06$ mittlere Zeit.

Wenn ein Stern und die mittlere Sonne in demselben Augenblicke durch den Meridian gehen, so ist die mittlere Sonne, wenn der Stern das nächste Mal durch den Meridian geht, noch um $3'\,55'',94$ davon entfernt.

Der Sterntag, der wahre Sonnentag und der mittlere Sonnentag bilden nebst ihren Unterabtheilungen in Stunden, Minuten und Secunden die bei allen gebildeten Nationen üblichen Zeitmaaße. Die Astronomen reguliren ihre Uhren nach Sternzeit, die Sonnenuhren zeigen wahre Zeit, und die Uhren oder Chronometer, welche bei physikalischen und mechanischen Versuchen angewandt werden, müssen nach mittlerer Zeit regulirt werden.

Die beiden letzten Zeitmaaße werden seit der Erfindung der Uhren im bürgerlichen Leben angewandt, und man regulirte die öffentlichen

Uhren nach der Bewegung der Sonne, wozu ein besonderer Mechanismus erforderlich war, oder vielmehr mußte die Uhr jeden Tag vor oder zurück gestellt werden, um sie mit dem Gange der Sonne in Uebereinstimmung zu bringen. Allein dieser alte Gebrauch ist seit langer Zeit in mehreren Ländern abgeschafft, und in England werden z. B. die öffentlichen Uhren nach mittlerer Zeit regulirt, was seit dem 22. December 1826 auch in Paris, aber nicht für den übrigen Theil von Frankreich geschieht.

§. 186. Da uns die Natur der Kräfte unbekannt ist, so müssen wir uns darauf beschränken, ihre Wirkungen zu beobachten, sie mit einander zu vergleichen und der Rechnung zu unterwerfen, um daraus Regeln abzuleiten, welche sich aus den Sätzen der Dynamik ergeben.

In der Statik untersucht man bloß, welche Bedingungen die Kräfte erfüllen müssen, damit das Gleichgewicht stattfinden kann, man braucht keine verschiedenen Arten von Kräften in Betracht zu ziehen und man kann die Gewichtseinheit zum Maaße der Krafteinheit nehmen, so daß das Maaß einer beliebigen Kraft durch die Anzahl von Gewichtseinheiten ausgedrückt wird, welche diese Kraft im Gleichgewichte zu halten vermag. Bei dieser Messungsart der Kräfte kann man sagen, daß sie sich wie die Wirkungen verhalten, welche sie hervorbringen können und diese Proportionalität ist ein allgemeines Gesetz der Mechanik.

Die Kräfte, welche man in der Dynamik betrachtet, sind diejenigen, welche die Bewegung der Körper, worauf sie wirken, hervorbringen oder modificiren, und das eben erwähnte Gesetz ist, wie wir später sehen werden, auch auf sie anwendbar. Diese Kräfte unterscheidet man nach der Art ihrer Wirkung in zwei Klassen. Zu der ersten Klasse gehören diejenigen Kräfte, welche nur während einer unendlich kurzen Zeit auf einen Körper wirken und ihn dann sich selbst überlassen. Diese Kräfte werden momentane oder augenblicklich wirkende Kräfte genannt. Die zweite Klasse von Kräften wirkt während einer gewissen endlichen Zeit auf den Körper und ihre successiven Einwirkungen erfolgen so schnell auf einander, daß wir kein Mittel haben, die zwischen zwei solchen Impulsen liegende Zeit zu messen. Diese zweite Klasse von Kräften werden stetig wirkende Kräfte genannt.

§. 187. Ein Körper kann den Zustand, worin er sich befindet, nicht von selbst verändern. Wenn er sich in Ruhe befindet, so bleibt er darin so lange, bis er durch die Wirkung einer oder mehrerer Kräfte in Bewegung gesetzt wird, und alsdann dauert die Bewegung in derselben Richtung fort, wenn sie nicht durch fremdartige Ursachen aufgehoben oder ihre Richtung verändert wird.

Wenn sich ein Körper im Ruhezustande befindet, so begreift man leicht, daß er in diesem Zustande verharren muß, wenn keine Kraft auf ihn wirkt, welche ihn in Bewegung setzen kann, oder wenn die auf ihn wirkenden Kräfte einander das Gleichgewicht halten; aber wenn ein Körper bereits durch eine Kraft in Bewegung gesetzt ist, welche aufhört zu wirken, nachdem sie einen Augenblick oder während einer endlichen Zeit auf den Körper gewirkt hat; so ist nicht ebenso

leicht einzusehen, daß diese Bewegung fortdauern muß; denn sie wird verzögert und bald ganz aufgehoben.

Die Ursachen der Verzögerung und der gänzlichen Aufhebung der Bewegung der Körper auf der Erdoberfläche und in den Maschinen bestehen in der Reibung der über einander hingleitenden Flächen und in dem Widerstande der Luft, deren Molecule der Bewegung der Körper in ihr hinderlich sind. Soll die Bewegung länger fortdauern, so braucht man nur diese Hindernisse zu vermindern, und wenn es möglich wäre, sie ganz fortzuschaffen, so würde die einem Körper oder einer Maschine mitgetheilte Bewegung ohne alle Veränderung fortdauern. Da wir diese Hindernisse nicht ganz beseitigen können, so kann die Bewegung nicht über eine gewisse, gewöhnlich sehr kurze Zeit hinaus fortdauern, wofern sich die Wirkung der Kräfte, welche die Bewegungen hervorbringen, nicht wiederholt.

Die Verzögerung, welche wir bei der einem Körper mitgetheilten Bewegung beobachten, ist also von diesem Körper selbst unabhängig, welcher weder die Geschwindigkeit noch die Richtung der ihm ertheilten Bewegung von selbst verändern kann.

In dieser Eigenschaft der Körper, vermöge welcher sie in dem Zustande der Ruhe oder der Bewegung, worin sie sich einmal befinden, zu beharren streben, besteht ihre Trägheitskraft, welche von mehreren Schriftstellern, die sie nicht als eine Kraft betrachten, schlechthin die Trägheit oder das Beharrungsvermögen genannt wird. Man kann sowohl die eine, als die andere Benennung anwenden; allein wir werden der ersten doch den Vorzug geben, weil zur Ueberwindung eines Widerstandes immer eine Kraft erforderlich ist.

Die Trägheit ist eine der Materie inhärirende Eigenschaft, welche nicht mit der Schwere verwechselt werden muß; denn die Wirkung der Schwere auf einen Körper kann aufgehoben werden, wenn man denselben auf eine horizontale Tafel legt, oder vermittelst eines Fadens, eines Seiles oder einer Kette an einem festen Puncte aufhängt; aber in allen diesen Fällen ist die Trägheit des Körpers immer vorhanden und sein Zustand der Ruhe oder Bewegung kann nur durch eine Kraft verändert werden, welche ihm durch einen andern Körper mitgetheilt wird.

Die Trägheitskraft eines Körpers ist seiner Masse proportional, und um folglich Körper von verschiedenen Massen in Bewegung zu setzen, muß man diesen Massen proportionale Kräfte anwenden, wenn sie sich in Ruhe befinden, oder um sie in den Ruhezustand zu versetzen, d. h. ihre Bewegung aufzuheben, wenn sie sich bereits in Bewegung befinden. Diese Proportionalität läßt sich leicht erklären; denn ein Körper ist nichts anderes, als ein Inbegriff von Moleculen oder materiellen Bestandtheilchen, welche seine Masse bilden, und man kann annehmen, daß die Bewegung des Körpers durch eben so viele gleiche und parallele Kräfte hervorgebracht wird, als die Masse des Körpers Molecule hat, und alsdann ist einleuchtend, daß eine 2, 3, 4, ... n mal größere Kraft erforderlich ist, um einem Körper von einer 2, 3, 4, ... n mal größern Masse dieselbe Bewegung zu ertheilen.

Bei den Sätzen, welche wir sogleich über die Bewegung beweisen werden, wollen wir zuvörderst von den Volumen und den übrigen phy-

sischen Eigenschaften der Körper abstrahiren und sie bloß als materielle Puncte betrachten, welche man jedoch nicht mit mathematischen Puncten verwechseln muß, obgleich ihre Dimensionen, Länge, Breite und Dicke, sehr klein sind. Sind die Gesetze der Bewegung unter dieser Voraussetzung einmal aufgestellt, so lassen sie sich auch leicht auf wirkliche Körper anwenden, worauf gewisse Kräfte wirken.

Zweites Kapitel.

Von der gleichförmigen Bewegung.

§. 188. Die einfachste Bewegung, und worauf alle übrigen Bewegungen bezogen werden, ist die, wenn der materielle Punct oder Körper in gleichen Zeiten immer gleiche Räume oder Wege durchläuft, wie klein diese Zeiten und Räume auch sein mögen, und sie wird die gleichförmige Bewegung genannt.

Keine der Bewegungen, welche wir auf der Erdoberfläche beobachten, ist vollkommen gleichförmig; denn es sind immer Hindernisse vorhanden, welche die Gleichförmigkeit der den Körpern ertheilten Bewegungen stören. Wenn man von diesen Unregelmäßigkeiten wegen ihrer Kleinheit, oder weil sie sich gegenseitig compensiren, abstrahirt; so kann man sich von der gleichförmigen Bewegung eine Vorstellung machen und die Rechnung auf die verschiedenen hieher gehörigen Aufgaben anwenden.

Betrachten wir einen materiellen Punct M (Fig. 115), welcher von irgend einer Kraft eine gleichförmige Bewegung erhalten hat, vermöge welcher er die unbestimmt über den Punct B hinaus verlängerte gerade Linie AB beschreibt. Auf dieser geraden Linie wollen wir den Punct A zum Anfangspuncte der von dem materiellen Puncte M durchlaufenen Wege oder Räume nehmen, und es sei $AM = e$ die Entfernung des materiellen Punctes M vom Anfangspuncte, wovon man die Zeit, welche wir mit t bezeichnen wollen, anfängt zu zählen, oder wenn $t = o$ ist. Ferner bezeichne v den in jeder Zeiteinheit von dem beweglichen materiellen Puncte beschriebenen Raum, so hat derselbe nach Verlauf von t Zeiteinheiten einen Raum $= vt$ beschrieben, und wenn man allgemein die Entfernung des beweglichen Punctes vom Anfangspuncte A mit x bezeichnet; so hat man für die allgemeine Gleichung der gleichförmigen Bewegung:

$$x = e + vt,$$

welche die beiden Constanten v und e enthält. Man kann der Größe e verschiedene Werthe geben, weil der bewegliche materielle Punct mehr oder weniger von dem festen Anfangspuncte A entfernt sein kann, wenn $t = o$ ist, oder wenn man die Zeit anfängt zu zählen; aber die Größe v muß während der ganzen Dauer der Bewegung denselben Werth behalten. Diese Größe, welche die Geschwindigkeit des materiellen

Punctes genannt wird, characterisirt seine gleichförmige Bewegung und unterscheidet sie von jeder andern Bewegung derselben Art.

Wenn man die gerade Linie, nach welcher sich der materielle Punct bewegt, in gleiche Theile theilt, einen dieser Theile oder die Längeneinheit mit a bezeichnet und die Minute zur Zeiteinheit nimmt; so hat man:

$$x + a = e + v(t + 1') = e + vt + v \times 1',$$

und wenn man hiervon die vorhergehende Gleichung abzieht, so erhält man:

$$a = v \times 1' = v,$$

woraus erhellet, daß die Längeneinheit die Geschwindigkeit des materiellen Punctes mißt, oder vielmehr, daß derselbe in jeder Zeiteinheit eine Längeneinheit durchläuft.

Wenn man die erste Gleichung in Beziehung auf v auflöst, so hat man:

$$v = \frac{x - e}{t}.$$

Der Zähler $x - e$ drückt den Raum aus, welchen der materielle Punct während der Zeit t beschrieben hat, und seine Geschwindigkeit oder der während der Zeiteinheit durchlaufene Raum wird ausgedrückt durch den Quotienten aus dem während der Zeit t beschriebenen Raume und dieser Zeit selbst.

Wenn die Zeit von dem festen Puncte A aus gezählt wird, so ist $e = o$, die Gleichung für die gleichförmige Bewegung enthält nur noch die drei Größen x, v und t, und wenn man irgend zwei dieser drei Größen kennt, so kann man den Werth der dritten leicht berechnen.

Es sei M' ein anderer materieller Punct, welcher sich gleichförmig nach der geraden Linie AB bewegt, so ist die Gleichung seiner Bewegung:

$$x' = e' + v't'.$$

Wir wollen annehmen, daß die beiden materiellen Puncte in demselben Augenblicke anfangen, sich zu bewegen, und daß die Geschwindigkeit v des hintern größer sei, als die Geschwindigkeit v' des vordern; so muß es einen Punct R geben, worin die beiden materiellen Puncte zusammentreffen. Für diesen Zusammentreffungspunct ist $x = x'$ und $t = t'$ und die Gleichungen für die Bewegung der beiden materiellen Puncte verwandeln sich in:

$$x = e + vt, \quad x = e' + v't.$$

Wenn man die zweiten Theile dieser beiden Gleichungen einander gleich setzt, und aus der dadurch erhaltenen Gleichung den Werth von t sucht, so erhält man:

$$e + vt = e' + v't, \quad t = \frac{e' - e}{v - v'}.$$

Der Werth von t ist der Quotient aus zwei geraden Linien, welcher als eine mit der Zeiteinheit multiplicirte abstracte Zahl betrachtet werden kann. Wenn man die Minute zur Zeiteinheit nimmt, so drückt

der Buchstabe t eine gewisse Anzahl von Minuten aus und die eben gefundene Formel gibt die folgende Proportion:

$$v - v' : e' - e = 1' : t = 1' \times \frac{e' - e}{v - v'}.$$

Hieraus sieht man, daß die Größe, welche den Werth von t ausdrückt, das Product aus $1'$ und aus dem Quotienten des gegenseitigen Abstandes der beiden materiellen Puncte, dividirt durch den Unterschied ihrer Geschwindigkeiten ist, und dieselben Schlüsse lassen sich auf alle Fälle anwenden, wo es darauf ankommt, zu bestimmen, von welcher Art eine durch eine algebraische Formel ausgedrückte Zahl sein muß.

Wenn die Geschwindigkeiten der beiden materiellen Puncte einander gleich wären, so hätte man:

$$t = \frac{e' - e}{o} = \infty;$$

d. h. die Zeit, nach welcher sie zusammentreffen, ist unendlich groß, und in der That kann der hintere materielle Punct den vordern nicht einholen, wenn ihre Geschwindigkeiten einander gleich sind.

Substituirt man den Werth von t in eine der Gleichungen der Bewegung, z. B. in die Gleichung $x = e + vt$ für den ersten materiellen Punct, so kommt:

$$x = e + v \times \frac{e' - e}{v - v'} = \frac{e'v - ev'}{v - v'} = e' + \frac{(e' - e)\, v'}{v - v'},$$

wodurch die Entfernung AR des Anfangspunctes A von dem Zusammentreffungspuncte R der beiden materiellen Puncte ausgedrückt wird, und dasselbe Resultat würde man erhalten, wenn man den Werth von t in die Gleichung $x = e' + v't$ für die Bewegung des zweiten materiellen Punctes substituirte.

§. 189. Wir wollen annehmen, daß der materielle Punct M (Fig. 116) in dem Puncte des Kreisumfanges auf dem Zifferblatte einer Uhr liegt, auf welchem der Zeiger zu Mittag steht und diesen Punct zum Anfangspuncte der Bewegung der Zeiger nehmen. Es seien A und B die Puncte dieses Kreisumfanges, worin sich die Endpuncte der Stunden- und Minutenzeiger befinden, so sind die Bogen $MBA = e$, $MB = e'$ die gegenseitigen Abstände der Endpuncte der Zeiger von dem festen Puncte M, wenn $t = o$ ist, oder wenn man anfängt, die Zeit zu zählen. Wird die Geschwindigkeit des Stundenzeigers mit v, die des Minutenzeigers mit v' und der Abstand des festen Punctes M vom Zusammentreffungspuncte der Zeiger mit x bezeichnet; so hat man die beiden Gleichungen:

$$x = e + vt, \quad x = e' + v't,$$

woraus sich für die Zeit, nach deren Verlauf der Minutenzeiger den Stundenzeiger einholt, folgender Ausdruck ergibt:

$$t = \frac{e - e'}{v' - v}.$$

Nun ist aber der Stundenzeiger vor dem Minutenzeiger um einen ganzen Kreisumfang voraus, und wenn wir folglich die Länge dieses

Kreisumfanges mit p und die Zeit, nach deren Verlauf das zweite Zusammentreffen der Zeiger stattfindet, mit t' bezeichnen, so haben wir:

$$x = vt', \quad x = p + v't'.$$

Sucht man hieraus den Werth von t', und abstrahirt von dem Zeichen desselben, welches hier negativ sein würde, weil der Minutenzeiger den schon durchlaufenen Raum wieder durchläuft; so hat man:

$$t' = \frac{p}{v' - v}.$$

Dasselbe Resultat würde man für den Ausdruck der Zeit erhalten, nach deren Verlauf das 3te, 4te, ... $m$te Zusammentreffen der beiden Zeiger stattfinden würde, woraus folgt, daß die Zusammentreffungszeiten durch die Glieder der folgenden arithmetischen Progression:

$$\frac{e - e'}{v' - v'}, \quad \frac{e - e' + p}{v' - v}, \quad \frac{e - e' + 2p}{v' - v}, \ldots,$$

$$\frac{e - e' + (m-1)\,p}{v' - v}$$

ausgedrückt werden.

Wenn das letzte Glied dieser Progression für t in die erste Gleichung der Bewegung substituirt wird, so kommt:

$$x = e + \frac{ve - ve' + (m-1)\,vp}{v' - v} = \frac{v'e - ve' + (m-1)\,vp}{v' - v},$$

und diese Formel drückt den Raum aus, welchen die beiden Zeiger durchlaufen haben, wenn sie das $m$te Mal zusammentreffen.

Wenn man die Puncte des Kreisumfanges auf dem Zifferblatte der Uhr sucht, wo der Stundenzeiger und der Secundenzeiger zusammentreffen, so hat man für den ersten Zusammentreffungspunct, wenn die Geschwindigkeit des Secundenzeigers mit v'' bezeichnet wird und derselbe vom Puncte M ausgeht:

$$x = e + vt, \quad x = v''t', \quad t = \frac{e}{v'' - v}.$$

Der zweite Zusammentreffungspunct wird wie der des Stunden- und Minutenzeigers durch die Gleichungen:

$$x = vt', \quad x = p + v''t', \quad t' = \frac{p}{v'' - v}$$

bestimmt. Ebenso hat man:

$$\frac{e}{v'' - v'}, \quad \frac{e + p}{v'' - v'}, \quad \frac{e + 2p}{v'' - v'}, \ldots, \quad \frac{e + (n-1)\,p}{v'' - v},$$

und wenn man das allgemeine Glied dieser Reihe für t in die Gleichung der Bewegung des Stundenzeigers substituirt; so kommt:

$$x = e + \frac{ve + (n-1)\,vp}{v'' - v} = \frac{v''e + (n-1)\,vp}{v'' - v}.$$

Dieser Werth von x und der, welchen wir für das $m$te Zusammentreffen des Stunden- und Minutenzeigers gefunden haben, geben

zur Bestimmung des Zusammentreffens aller drei Zeiger die folgende Gleichung:

$$\frac{\nu' e - \nu e' + (m-1)\nu p}{\nu' - \nu} = \frac{\nu'' e + (n-1)\nu p}{\nu'' - \nu},$$

worin die beiden Größen m und n unbekannt sind, und folglich ist die Gleichung eine unbestimmte.

Um diese allgemeine Formel auf ein Beispiel anzuwenden, wollen wir annehmen, daß die Uhr zu Anfang der Beobachtung $9^h\,20'$ zeigt. Wenn die Minute zur Einheit genommen wird, so ist der Kreisumfang auf dem Zifferblatte $p = 60$ und die übrigen Buchstaben, welche constante Größen ausdrücken, haben folgende Werthe:

$$e = 46\tfrac{2}{3},\ e' = 20,\ \nu = \tfrac{1}{12},\ \nu' = 1,\ \nu'' = 60.$$

Werden diese Zahlen für die Buchstaben substituirt, so erhält man die Zahlengleichung:

$$\frac{46\tfrac{2}{3} - \tfrac{20}{12} + (m-1).\tfrac{60}{12}}{1 - \tfrac{1}{12}} = \frac{60 + 46\tfrac{2}{3} + (n-1).\tfrac{60}{12}}{60 - \tfrac{1}{12}},$$

welches sich auf: $719m - 11n = 397,$

reducirt und wenn man diese letzte Gleichung nach der Auflösungsmethode der unbestimmten Gleichungen des ersten Grades auflöst, so findet man $m = 3$, $n = 160$ für die kleinsten ganzen Werthe der unbekannten Größen, woraus folgt, daß das erste Zusammentreffen der drei Zeiger bei dem dritten Zusammentreffen des Stunden- und Minutenzeigers stattfindet.

Drittes Kapitel.

Von der veränderlichen Bewegung.

Im Vorhergehenden haben wir gesehen, daß die gleichförmige Bewegung durch die Gleichung $x = e + \nu t$ ausgedrückt wird, woraus folgt $\frac{x-e}{t} = \nu$, d. h. das Verhältniß des durchlaufenen Raumes oder Weges zu der dazu gebrauchten Zeit ist gleich der Geschwindigkeit des materiellen Punctes.

Diese Relation findet nicht statt, wenn die Kraft fortwährend auf den materiellen Punct wirkt; denn die Geschwindigkeit der Bewegung wird eben durch die fortwährende Wirkung der Kraft verändert, so daß der materielle Punct in gleichen Zeiten keine gleichen Räume durchläuft, folglich die Geschwindigkeit nicht constant ist, und man nennt deshalb eine solche Bewegung von veränderlicher Geschwindigkeit eine veränderliche Bewegung. Wenn die Geschwindigkeit mit der Zeit zunimmt, so ist die Bewegung eine beschleunigte, und die Kraft, welche diese Bewegung hervorbringt, wird eine beschleunigende

Kraft genannt, wogegen eine Kraft, welche die Bewegung verzögert, oder eine verzögerte Bewegung hervorbringt, eine verzögernde Kraft genannt wird.

Von der gleichförmig veränderlichen Bewegung.

§. 190. Die gleichförmig veränderliche Bewegung wird durch eine Kraft hervorgebracht, welche fortwährend auf einen Körper oder materiellen Punct wirkt. Wenn die auf den Körper oder materiellen Punct wirkende Kraft eine beschleunigende ist, so ist die Bewegung eine beschleunigte und sie ist eine verzögerte, wenn diese Kraft eine verzögernde ist.

Da die betrachtete Bewegung eine gleichförmig veränderliche ist, so nimmt ihre Geschwindigkeit im Falle einer beschleunigten Bewegung in gleichen Zeiten um gleiche Größen zu, und wenn die Bewegung eine verzögerte ist, so nimmt ihre Geschwindigkeit in gleichen Zeiten um gleiche Größen ab, was man dadurch ausdrückt, daß man sagt, die Bewegung ist eine gleichförmig beschleunigte oder eine gleichförmig verzögerte.

Der Einfachheit wegen wollen wir uns zunächst mit der gleichförmig beschleunigten Bewegung beschäftigen, indem wir annehmen, daß der materielle Punct oder Körper ohne alle anfängliche Geschwindigkeit von der Ruhe ausgeht und daß die Zeit t von dem Augenblicke des Beginnens der Bewegung an gezählt wird. Wenn wir alsdann die Regeln oder Gesetze der gleichförmig beschleunigten Bewegung gefunden haben, so wird sich auch leicht ergeben, wie dieselben modificirt werden müssen, um daraus die Gesetze der gleichförmig verzögerten Bewegung abzuleiten.

Ein sehr merkwürdiges Beispiel von der gleichförmig beschleunigten Bewegung bietet uns der Fall der schweren Körper an der Erdoberfläche dar. Wenn man Körper, deren Dichtigkeiten wenig von einander verschieden sind, oder welche bei gleichem Volumen fast gleiche Quantitäten Materie enthalten, auf eine gewisse Höhe hebt und sie dann sich selbst überläßt, so daß sie nicht unterstützt sind, so sieht man, daß sie in gleichen Zeiten um gleiche Höhen herabfallen, sie mögen ein großes oder kleines Volumen haben und es fallen z. B. eine Kanonen- und Flintenkugel in derselben Zeit von derselben Höhe herab.

Wenn die Körper, welche man so in der Luft herabfallen läßt, sehr verschiedene Dichtigkeiten haben, so fallen sie in derselben Zeit nicht von derselben Höhe herab, und es fällt z. B. eine Flintenkugel schneller als eine Korkkugel von demselben Volumen, und der Unterschied der Geschwindigkeiten beider Kugeln rührt von dem Widerstande der Luft her, dessen Wirkung desto beträchtlicher ist, je leichter die Körper sind, oder eine je kleinere Quantität Materie sie in einem bestimmten Volumen enthalten; aber im leeren Raume, z. B. in einer Glasröhre, aus welcher man die Luft herausgepumpt hat, beobachtet man, daß die leichtesten Körper ebenso schnell fallen, als die schwersten, z. B. eine Feder ebenso schnell, als ein Stück Metall.

Der Fall der Körper wird durch die Schwerkraft bewirkt, welche auf alle Körper wirkt, sie gegen den Mittelpunct der Erde zu treibt

und ihnen eine gleichförmig beschleunigte Bewegung ertheilt, wenn ihre Wirkung durch keine Hindernisse aufgehoben wird.

Alles, was wir in Beziehung auf die von der Schwere herrührenden Erscheinungen thun können, besteht darin, daß wir die Wirkungen beobachten, welche diese Kraft auf die Körper ausübt, um daraus die Regeln oder Gesetze der Bewegung abzuleiten, welche sie den Körpern ertheilt. Wir wissen nicht, ob die Schwerkraft stetig wirkt, wie der Druck einer Feder, oder ob sie in gleichen Impulsen besteht, welche sich nach sehr kleinen Zeitintervallen von derselben Dauer wiederholen; allein wir wollen diese letzte Voraussetzung annehmen, welche mit der ersten zusammenfällt, wenn man die kleinen gleichen Zeitintervalle zwischen den successiven Impulsen unendlich klein annimmt.

Bei der durch die Wirkung der Schwere auf einen Körper hervorgebrachten Bewegung, oder überhaupt bei der gleichförmig beschleunigten Bewegung hat man zu betrachten: 1) die Zeit, während welcher diese Bewegung stattfindet, 2) die Geschwindigkeit, welche der Körper am Ende der ersten Secunde, wenn die Secunde zur Zeiteinheit genommen wird, oder nach Verlauf einer beliebigen Anzahl von Secunden seit dem Anfange des Falles erlangt hat, und 3) den Raum, welchen der Körper am Ende irgend einer Zeit durchlaufen hat, und wir wollen die zwischen diesen drei Größen stattfindenden Relationen nun zu bestimmen suchen.

§. 191. In *A* (Fig. 117) befinde sich ein Körper oder ein materieller Punct und wir wollen annehmen, daß derselbe während einer Zeit, die wir durch die gerade Linie *AB* ausdrücken wollen, der Wirkung der Schwere überlassen sei. Diese Zeit wollen wir uns in sehr kleine gleiche Theile getheilt denken und auf der geraden Linie *AB* die gleichen Theile *AE*, *EF*, *FG*, *etc.* zur Darstellung dieser Zeittheilchen nehmen. Wenn wir annehmen, daß die Schwere durch eine Reihe gleicher Impulse wirkt, welche im Anfange jedes der kleinen gleichen Zeittheilchen stattfinden, so wird die Bewegung des Körpers in Folge dieser Geschwindigkeitszunahmen beschleunigt und da die Bewegung eine gleichförmig beschleunigte ist, so sind diese Geschwindigkeitszunahmen alle einander gleich

Es sei *AM* die Geschwindigkeit, welche der Körper oder materielle Punct durch den ersten Impuls der Schwerkraft bekommt, so bleibt nach der Voraussetzung die Geschwindigkeit während des ersten Augenblickes constant, und folglich die Bewegung gleichförmig, und im Anfange des zweiten Augenblickes erhält der Körper oder materielle Punct einen zweiten Geschwindigkeitszuwachs *nN*, welcher dem ersten gleich ist. Während der Dauer des zweiten Augenblickes ist also die Geschwindigkeit des Körpers oder materiellen Punctes constant oder doppelt so groß, als während des ersten Augenblickes, und ebenso wird bewiesen, daß die Geschwindigkeit während des 3ten, 4ten, 5ten, ... Augenblickes 3, 4, 5, ...mal größer ist, als während des ersten Augenblickes, was auch aus der Figur erhellet, und folglich nimmt die Geschwindigkeit des der Wirkung der Schwere überlassenen Körpers oder materiellen Punctes der Zeit oder der Dauer des Falles proportional zu.

Wenn die Secunde zur Zeiteinheit genommen wird und g bezeichnet die Geschwindigkeit, welche der Körper am Ende der ersten Secunde seines Falles erlangt hat, und v die Geschwindigkeit desselben nach Verlauf von t Secunden, so hat man die Proportion:

$$1'' : t'' = g : v,$$

woraus folgt:

$$v = gt$$

und nach dieser Formel kann man immer eine der drei Größen g, v, t bestimmen, wenn die beiden andern gegeben sind. Wenn z. B. die Geschwindigkeit v und die Zeit t gegeben wäre, so hätte man:

$$g = \frac{v}{t},$$

d. h. wenn ein Körper der Wirkung der Schwere überlassen wird, so ertheilt sie demselben während der ersten Secunde seines Falles eine Geschwindigkeit, welche dem Quotienten aus der am Ende einer beliebigen Zeit t erlangten Geschwindigkeit und aus dieser Zeit selbst gleich ist.

Die Geschwindigkeit, welche ein Körper am Ende der ersten Secunde seines Falles erlangt, oder die Größe, welche wir mit g bezeichnet haben, wird die beschleunigende Kraft oder Beschleunigung der Schwere genannt. Wenn die gerade Linie AI die Zeiteinheit oder die erste Secunde ausdrückt, so wird die am Ende dieser Zeiteinheit erlangte Geschwindigkeit des Körpers oder der Werth von g durch die gerade Linie Ir ausgedrückt.

Diese beschleunigende Kraft der Schwere, welche wir mit g bezeichnet haben, ist eine Größe, deren man bei der Auflösung vieler Aufgaben über die Bewegung bedarf, und ihr Werth, welcher mit der geographischen Breite des Beobachtungsortes veränderlich ist, ist, wie wir in der Folge sehen werden, durch Pendelbeobachtungen näherungsweise bestimmt. Für die geographische Breite von Paris und das Niveau des Meeres hat man $g = 9^m,80892$ gefunden.

Wir wollen nun die Regel oder Formel suchen, vermittelst welcher man den Raum berechnen kann, welchen ein Körper unter der Wirkung der Schwere, die demselben eine gleichförmig beschleunigte Bewegung ertheilt, in einer gegebenen Zeit durchläuft. Bei der gleichförmigen Bewegung ist der von dem Körper während irgend einer Zeit durchlaufene Raum dem Producte aus der Geschwindigkeit und aus dieser Zeit gleich, und die gleichförmig beschleunigte Bewegung kann als eine Reihenfolge gleichförmiger Bewegungen betrachtet werden, welche sich im Anfange jedes unendlich kleinen Zeittheilchens zusammenaddiren.

§. 192. Wir wollen einen Körper betrachten, welcher vom Puncte A (Fig. 117) aus fällt, die Fallzeit desselben durch AB darstellen, dieselbe in beliebig kleine gleiche Theilchen AE, EF, FG, *etc.* theilen, und uns vorstellen, daß die gleichförmig beschleunigte Bewegung des Körpers durch die Impulse hervorgebracht wird, welche derselbe im Anfange jedes dieser successiven Zeittheilchen von der Schwere erhält. Die durch den ersten Impuls hervorgebrachte Geschwindigkeit wollen wir durch AM darstellen, so ist diese Geschwindigkeit gleichförmig und

der während des ersten Zeittheilchens durchlaufene Raum wird durch das Product aus der Geschwindigkeit AM und der Zeit AE oder durch die Fläche des kleinen Rechteckes $AMnE$ ausgedrückt.

Im Anfange des zweiten Zeittheilchens ertheilt die Schwere dem Körper einen neuen Impuls, wodurch eine eben so große Geschwindigkeit hervorgerufen wird, als durch den ersten Impuls. Die Bewegung des Körpers ist also während des zweiten Zeittheilchens noch gleichförmig und seine Geschwindigkeit doppelt so groß, als während des ersten Zeittheilchens. Der durchlaufene Raum wird also ausgedrückt durch das Product aus der Geschwindigkeit $EN = 2AM$ und der Zeit EF, d. h. durch den Flächeninhalt des Rechteckes $ENoF$.

Schließt man auf diese Weise weiter, so findet man, daß die Geschwindigkeit während jedes Zeittheilchens constant ist, weil die Schwere nach der Voraussetzung im Anfänge jedes Zeittheilchens in gleichen Impulsen auf den Körper wirkt und der am Ende der Zeit AI durchlaufene Raum ist gleich der Summe der Rechtecke $EM + FN + GO + etc.$, deren Anzahl der Anzahl der in AI enthaltenen Zeittheilchen gleich ist. Dieser Raum oder die Summe aller dieser Rechtecke bildet die zackige Figur $AIrQPONM$. Je größer aber die Anzahl der in der durch AI dargestellten Zeit enthaltenen Zeittheilchen ist, desto schmäler und kleiner werden die vorspringenden Theile oder Zacken der Figur, welche sich dem Dreiecke AIr immer mehr nähert und damit ganz zusammenfällt, wenn jedes Zeittheilchen unendlich klein und ihre Anzahl unendlich groß wird, so daß sich die Dauer jedes dieser Zeittheilchen durch kein Mittel beobachten läßt, wie dieses in der Natur der Fall ist. Wenn man also die Fallzeit eines Körpers durch die eine Kathete AI eines rechtwinkligen Dreieckes und die von diesem Körper erlangte Geschwindigkeit durch die andere Kathete Ir desselben Dreieckes darstellt, so wird der von dem Körper durchfallene Raum durch die Fläche des rechtwinkligen Dreieckes AIr ausgedrückt, d. h. dieser Raum ist gleich der Hälfte des Productes aus der von dem Körper erlangten Geschwindigkeit und aus der Fallzeit. Bezeichnet also t die Fallzeit, v die am Ende dieser Zeit erlangte Geschwindigkeit und x den durchlaufenen Raum; so hat man die Relation:

$$x = {}^1/_2\, vt,$$

und wenn man für v seinen Werth gt setzt, so hat man:

$$x = {}^1/_2\, gt^2,$$

d. h. wenn ein Körper frei vertical herabfällt, so durchläuft er in einer Zeit t einen Raum, welcher ausgedrückt wird durch die Hälfte des Productes aus der am Ende der ersten Zeiteinheit oder Secunde erlangten Geschwindigkeit und aus dem Quadrate der Fallzeit.

Wenn $t = 1''$ ist, so verwandelt sich diese letzte Formel in:

$$x = {}^1/_2\, g,$$

woraus erhellet, daß am Ende der ersten Secunde des Falles eines Körpers der durchlaufene Raum der Hälfte der erlangten Geschwindigkeit gleich ist, und wenn folglich am Ende der ersten Secunde die Schwere aufhörte, auf den Körper zu wirken und sich derselbe mit der

erlangten Geschwindigkeit fortbewegte, so würde seine Bewegung gleichförmig und er würde während der zweiten Secunde einen doppelt so großen Raum durchlaufen, als er in der ersten Secunde unter der Wirkung der Schwere durchlaufen hat.

Der Raum, welchen ein Körper oder materieller Punct *A* während der ersten Secunde unter der Wirkung der Schwere mit einer gleichförmig beschleunigten Bewegung durchläuft, wird durch die Fläche des rechtwinkligen Dreieckes *AIr* und die erlangte Geschwindigkeit durch die Kathete *Ir* ausgedrückt. Wenn der materielle Punct *A* seine Bewegung mit der erlangten Geschwindigkeit allein fortsetzt, so wird der Raum, welchen er in einer Secunde durchläuft, durch das Product aus der Geschwindigkeit *Ir* und der Zeit $IS = IA$ oder durch die Fläche des Rechteckes *ISVr* ausgedrückt, welches doppelt so groß ist, als das Dreieck *AIr*, weil die Grundlinie *AI* des Dreieckes der Grundlinie *AS* des Rechteckes gleich ist und beide die gemeinschaftliche Höhe *Ir* haben.

Wenn die Schwere während der durch *AB* ausgedrückten Zeit auf den materiellen Punct *A* wirkt, so durchläuft derselbe einen Raum, welcher durch die Fläche des rechtwinkligen Dreieckes *ABC* ausgedrückt wird und die zuletzt erlangte Geschwindigkeit wird durch die Kathete *BC* ausgedrückt. Endlich wäre der Raum, welchen der materielle Punct *A* während derselben Zeit *AB* mit der erlangten Geschwindigkeit gleichförmig beschreiben würde, der Fläche des Rechteckes *ABCD* oder des doppelten Dreieckes *ABC* gleich.

Wenn also die Schwere oder die beschleunigende Kraft aufhört, auf den materiellen Punct am Ende einer beliebigen Zeit zu wirken, so beschreibt dieser Punct in einer der Fallzeit gleichen Zeit mit dieser constant bleibenden Geschwindigkeit einen doppelt so großen Raum, als unter der Wirkung der Schwere mit einer gleichförmig beschleunigten Bewegung.

Wenn man in die Formel $x = {}^1/_2 g t^2$ für t successive die Zahlen **1, 2, 3, 4, ...** setzt, so erhält man:

$$x' = {}^1/_2 g \times 1, \quad \frac{x'}{1} = {}^1/_2 g,$$

$$x'' = {}^1/_2 g \times 4, \quad \frac{x''}{4} = {}^1/_2 g,$$

$$x''' = {}^1/_2 g \times 9, \quad \frac{x'''}{9} = {}^1/_2 g,$$

$$x^{IV} = {}^1/_2 g \times 16, \quad \frac{x^{IV}}{16} = {}^1/_2 g,$$

etc. *etc.*

Alle diese Verhältnisse sind einander gleich, weil sie den gemeinschaftlichen Werth ${}^1/_2 g$ haben, woraus folgt, daß sich die von einem freifallenden Körper während **1, 2, 3, 4,** *etc.* Secunden durchlaufenen Räume wie die Quadrate **1, 4, 9, 16** *etc.* der Anzahlen der Secunden, oder wie die Quadrate der Zeiten verhalten.

Ein Körper, welcher eine Secunde fällt, durchläuft einen Raum von $^1/_2 g = {}^1/_2 \times 9^m,80892 = 4^m,90446$; während der beiden ersten Secunden seines Falles durchläuft er einen 4mal größern Raum $= 4 \times 4^m,9045 = 19^m,6180$, während der drei ersten Secunden den 9fachen Raum $= 9 \times 4^m,9045 = 44^m,1405$ u. s. f.

Da sich die während der ersten 1, 2, 3, 4, 5, *etc.* Secunden durchlaufenen Räume wie die Quadrate 1, 4, 9, 16, 25, *etc.* dieser Zeiten verhalten, so verhalten sich die während der aufeinanderfolgenden Secunden durchlaufenen Räume wie die Unterschiede dieser Quadrate, oder wie die ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7, 9, *etc.* Da der Körper in der ersten Secunde seines Falles einen Raum $= 4^m,90446$ durchläuft, so durchläuft er in der zweiten Secunde einen Raum $= 3 \times 4^m,90446 = 13^m,71338$, in der dritten Secunde einen Raum $= 5 \times 4^m,90446 = 24^m,5223$ u. s. f.

§. 193. Aus den beiden Gleichungen $v = gt$ und $x = {}^1/_2 gt^2$ kann man eine dritte Gleichung ableiten, worin die Zeit t nicht vorkommt und wonach man die von dem fallenden Körper erlangte Geschwindigkeit berechnen kann, wenn man seine Fallhöhe kennt. Denn wenn man die erste Gleichung zum Quadrate erhebt, und dann beide Theile derselben durch die correspondirenden Theile der zweiten Gleichung dividirt, so erhält man:

$$\frac{v^2}{x} = \frac{g^2 t^2}{{}^1/_2 gt^2} = 2g,$$

woraus folgt:

$$v = \sqrt{2gx}.$$

Man hat also folgende Regel: Wenn man die Fallhöhe x eines Körpers kennt und man will die am Ende seines Falles erlangte Geschwindigkeit berechnen, so multiplicire man die doppelte Fallhöhe $2x$ durch $g = 9^m,8089$ und ziehe aus dem Producte die Quadratwurzel, so drückt dieselbe die verlangte Geschwindigkeit aus.

Aufgabe. — Welche Geschwindigkeit erlangt ein Körper, wenn er von einer Höhe $= 32^m,25$ herabfällt?

Auflösung. — In diesem Falle ist die doppelte Fallhöhe $2x = 2 \times 32^m,25 = 64^m,5$, und wenn man diese Zahl nebst dem Werthe von g in die letzte Formel substituirt, so hat man:

$$v = \sqrt{64^m,5 \times 9^m,8089}.$$

$$\begin{aligned} {}^1/_2 log.\ 64,5 &= 0,9047798 \\ {}^1/_2 log.\ 9,8089 &= 0,4958101 \\ \hline log.\ v = log.\ 25,153 &= 1,4005899, \end{aligned}$$

also

$$v = 25^m,153.$$

Die der Fallhöhe x entsprechende Geschwindigkeit v findet man also vermittelst der Formel $v = \sqrt{2gx}$, und wenn die Geschwindigkeit v gegeben wäre, so könnte man vermittelst derselben Gleichung leicht die dieser Geschwindigkeit entsprechende Fallhöhe x finden; denn man brauchte zu dem Zwecke nur diese Gleichung in Beziehung auf x auf-

zulösen, indem man ihre beiden Theile zuvörderst zum Quadrate erhebt, um die Wurzelgröße fortzuschaffen, wodurch man erhält:

$$2gx = v^2,$$

und hieraus ergibt sich: $$x = \frac{v^2}{2g},$$

d. h. um die einer gegebenen Geschwindigkeit entsprechende Fallhöhe zu erhalten, muß man das Quadrat dieser Geschwindigkeit durch die doppelte beschleunigende Kraft dividiren.

Aufgabe. — Von welcher Höhe muß ein Körper herabfallen, um eine Geschwindigkeit von 25 Meter zu erlangen?

Auflösung. — Wenn man in der letzten Formel $v = 25$ und $g = 9^m,8089$ setzt, so erhält man:

$$x = \frac{25^2}{2 \times 9,8089}.$$

$$\begin{aligned} 2\ log.\ 25 &= 2,7958800 \\ \text{dec. Erg. } log.\ 2 &= 9,6989700 \\ \text{dec. Erg. } log.\ 9,8089 &= 9,0083797 \\ log.\ x = log.\ 31,858 &= \bar{2}1,5032297, \end{aligned}$$

also $$x = 31^m,858.$$

§. 194. Bisher haben wir vorausgesetzt, daß die beschleunigende Kraft oder die Schwere, welche dem Körper eine gleichförmig beschleunigte Bewegung ertheilt, bei dem Beginnen dieser Bewegung anfängt zu wirken und daß die Zeit von diesem Augenblicke an gezählt wird. Die Formeln $v = gt$ und $x = {}^1/_2 gt$ drücken also nicht die allgemeinen Gesetze der gleichförmig veränderlichen Bewegung aus, und um diesen Formeln oder Gleichungen eine größere Allgemeinheit zu geben, muß man in dieselben noch die Bedingung einführen, daß sich die von der Schwere herrührende Bewegung mit einer anfänglichen Geschwindigkeit durch Addition oder Subtraction verbindet, je nachdem diese anfängliche Geschwindigkeit nach demselben Sinne wie die Wirkung der Schwere, oder nach entgegengesetztem Sinne gerichtet ist, welchen letztern Fall wir hier vorzugsweise betrachten wollen.

Es bezeichne V die dem Körper, welcher zugleich der Wirkung der Schwere unterworfen ist, durch einen Stoß ertheilte anfängliche Geschwindigkeit, und wir wollen annehmen, daß dieser Stoß nach einer der Wirkung der Schwere entgegengesetzten Richtung gewirkt hat; so verwandeln sich die beiden vorhergehenden Gleichungen, wenn diese Bedingung in sie eingeführt wird, in folgende:

$$v = V - gt,\ x = Vt - {}^1/_2 gt^2,$$

und diese beiden Gleichungen drücken aus, daß die Bewegung eine gleichförmig verzögerte ist.

Wenn man aus der ersten dieser beiden Gleichungen den Werth von $t = \frac{V - v}{g}$ ableitet und diesen Werth für t in die zweite Gleichung substituirt, so erhält man die folgende Gleichung:

$$x = \frac{V^2 - v^2}{2g}.$$

Diese drei Gleichungen können zur Auflösung verschiedener Aufgaben über die gleichförmig verzögerte Bewegung dienen, und wir wollen sie daher auf einige Beispiele anwenden.

Aufgabe 1. — Mit was für einer Geschwindigkeit muß ein Körper in verticaler Richtung aufwärts geworfen werden, damit derselbe in zwei Secunden eine Höhe von 40 Meter erreicht?

Auflösung. — Die zweite der obigen Gleichungen gibt für den Ausdruck der anfänglichen Geschwindigkeit:

$$V = \frac{x + {}^1/_2 gt^2}{t} = \frac{2x + gt^2}{2t},$$

und wenn man $x = 40$, $g = 9,8089$, $t = 2$ setzt, so erhält man:

$$V = \frac{2 \times 40 + 9,8089 \times 4}{4} = 20 + 9,8089 = 29^m,8089.$$

Aufgabe 2. — Ein Körper ist mit einer anfänglichen Geschwindigkeit $= 29^m,8089$ in verticaler Richtung aufwärts geworfen und auf eine Höhe von 40 Meter gestiegen, in welcher Zeit hat er diese Höhe erreicht?

Auflösung. — Um diese Zeit t zu finden, muß man die Gleichung des zweiten Grades:

$$Vt - {}^1/_2 gt^2 = x$$

auflösen, welche sich leicht in folgende umformen läßt:

$$t^2 - \frac{2V}{g} t = -\frac{2x}{g},$$

durch deren Auflösung man erhält:

$$t = \frac{V}{g} \pm \sqrt{\frac{V^2}{g^2} - \frac{2x}{g}} = \frac{V \pm \sqrt{V^2 - 2gx}}{g},$$

und wenn man für V, x die in der Aufgabe angegebenen Werthe, so wie für g seinen Werth 9,8089 substituirt, so erhält man:

$$t = \frac{29,8089 \pm \sqrt{(29,8089)^2 - 80 \times 9,8089}}{9,8089},$$

und wenn man die Rechnungen unter dem Wurzelzeichen verrichtet:

$$t = \frac{29,8089 - 10,1911}{9,8089} = \frac{19,6178}{9,8089} = 2'',$$

$$t = \frac{29,8089 + 10,1911}{9,8089} = \frac{40}{9,8089} = 4'',08.$$

Da diese beiden Werthe von t oder diese beiden Wurzeln dieser Gleichung reell und positiv sind, so leisten beide der Aufgabe Genüge. Nach der kleinsten Wurzel befindet sich der Körper nach zwei Secunden in einer Höhe von 40 Meter, steigt dann bis zu dem höchsten

Puncte, worin seine Wurfgeschwindigkeit durch die Wirkung der Schwere ganz aufgehoben ist, sinkt alsdann mit einer gleichförmig beschleunigten Bewegung wieder herab und befindet sich nach 4″,08 wieder in einer Höhe von 40 Meter.

Aufgabe 3. — Ein Körper wird mit einer anfänglichen Geschwindigkeit von $29^m,8089$ nach der Richtung der Verticale aufwärts geworfen, und man soll bestimmen, nach wie viel Zeit diese anfängliche Geschwindigkeit durch die Wirkung der Schwere aufgehoben ist.

Auflösung. — Aus der Gleichung:

$$v = V - gt$$

erhellet, daß die anfängliche Wurfgeschwindigkeit V allmählig aufgehoben wird, und wenn man für V, g ihre resp. Werthe 29,8089; 9,8089 substituirt, so erhält man:

$$v = 29,8089 - 9,8089\,t,$$

welcher Werth ganz aufgehoben wird, wenn

$$0 = 29,8089 - 9,8089\,t,$$

folglich:
$$t = \frac{29,8089}{9,8089} = 3″,039 \text{ ist.}$$

Aufgabe 4. — Man soll die größte verticale Höhe finden, bis zu welcher ein Körper von der anfänglichen Geschwindigkeit von $29^m,8089$ steigt.

Auflösung. — Aus der Gleichung $x = \frac{V^2 - v^2}{2g}$ erhellet, daß die Höhe des Körpers desto größer wird, je kleiner die Geschwindigkeit v wird. Wenn diese Geschwindigkeit $= 0$ ist, so hat der Körper seine größte Höhe erreicht und es ist daher $x = \frac{V^2}{2g}$ der allgemeine Ausdruck dieser größten Höhe.

Substituirt man in diese letzte Gleichung für V und g ihre Zahlenwerthe und verrichtet dann die angezeigten Rechnungen, so hat man:

$$x = \frac{(29,8089)^2}{2 \times 9,8089}.$$

$2\,log.\,29,8089$	$=$	$2,9486918$
dec. Erg. $log.\,2$	$=$	$9,6989700$
dec. Erg. $log.\,9,8089$	$=$	$9,0083797$
$log.\,x$	$=$	$21,6560415,$

also: $x = 45^m,29408.$

Bewegung auf schiefen Ebenen.

§. 195. Wir haben im Vorhergehenden gesehen, daß die Schwere eine constante Kraft ist, welche auf alle Körper wirkt und ihnen nach der Richtung der Verticale eine gleichförmig beschleunigte Bewegung ertheilt, wenn ihr Fall durch nichts verhindert wird.

Die verticale Richtung der durch die Schwere bewirkten Bewegung kann verändert werden. Diese Richtung wird schief, wenn die Körper auf schiefen Ebenen hingleiten und alsdann ist die Bewegung nicht so schnell, als bei dem verticalen Falle, aber sie befolgt dieselben Gesetze, d. h. sie ist eine gleichförmig beschleunigte Bewegung; denn ein Körper, welcher vermöge der Wirkung der Schwere auf einer geneigten Ebene herabgleitet, bekommt jeden Augenblick einen neuen Impuls, wodurch eine gleichförmig beschleunigte Bewegung entsteht.

Es sei ABC (Fig. 118) ein Durchschnitt der schiefen Ebene mit einer Verticalebene, so ist die gerade Linie AB, welche auf allen in der schiefen Ebene gezogenen horizontalen geraden Linien senkrecht ist, die Länge dieser schiefen Ebene, deren verticale Höhe AC ist. Wir wollen der Kürze wegen die Länge AB und die Höhe AC der schiefen Ebene resp. mit l und h bezeichnen und zugleich bemerken, daß das Verhältniß $\frac{h}{l}$ dem Sinus des Winkels B, welchen die schiefe Ebene mit der Horizontalebene bildet, oder dem Cosinus des Complementes dieses Winkels gleich ist.

Wenn sich in A ein schwerer Körper befindet, welcher der Wirkung der Schwere überlassen ist und von der Reibung keinen merklichen Widerstand erfährt, so wird derselbe vermöge der Wirkung der Schwerkraft nach der geraden Linie AB auf der schiefen Ebene herabgleiten. Durch die gerade Linie Ar wollen wir die Geschwindigkeit darstellen, welche die Schwere dem Körper A während der ersten Secunde seines freien Falles ertheilen würde, oder der Werth der beschleunigenden Kraft, welche wir mit g bezeichnet haben. Diese Kraft wollen wir nach dem Lehrsatze des Parallelogrammes der Kräfte (§. 16) in zwei andere zerlegen, wovon die eine durch die auf der schiefen Ebene senkrechte gerade Linie An und die andere durch die zu dieser Ebene parallele gerade Linie Am ausgedrückt wird. Die erste Componente wird durch den Widerstand der schiefen Ebene aufgehoben, so daß bloß die zweite Am übrig bleibt, deren Werth wir bestimmen müssen.

Die beiden rechtwinkligen Dreiecke ACB, Amr, welche einen gemeinschaftlichen Winkel haben, sind gleichwinklig und folglich einander ähnlich, so daß man die Proportion hat:

$$AB : AC = Ar : Am,$$

oder nach der angenommenen Bezeichnung:

$$l : h = g : Am = \frac{gh}{l}.$$

Dieser Werth von Am oder der Raum, welchen der Körper in der ersten Secunde seines Falles auf der schiefen Ebene vermöge der Wirkung der Schwere durchläuft, ist das Product aus der beschleunigenden Kraft g und dem Verhältniß $\frac{h}{l}$, woraus folgt, daß sich aus den Gleichungen für die gleichförmig beschleunigte Bewegung bei dem freien verticalen Falle der Körper die Gleichungen für ihre Bewegung auf schiefen Ebenen ergeben, wenn man in den ersten den Bruch $\frac{gh}{l}$

statt g setzt. Die Fallgesetze eines Körpers auf schiefen Ebenen werden also durch folgende Gleichung ausgedrückt:

$$v = \frac{ght}{l},\ x = \frac{\frac{1}{2}ght^2}{l},\ t = \sqrt{\frac{2lx}{gh}},$$

$$v = \sqrt{\frac{2gxh}{l}},\ x = \frac{lv^2}{2gh}.$$

Die erste dieser Gleichungen gibt die Geschwindigkeit, welche ein Körper erlangt, der während einer beliebigen Zeit t längs der schiefen Ebene herabgefallen ist. Vermittelst der zweiten Gleichung kann man den von dem Körper durchlaufenen Raum berechnen und die dritte Gleichung, welche den Zusammenhang zwischen der erlangten Geschwindigkeit und dem durchlaufenen Raume ausdrückt, kann zur Berechnung des Werthes einer dieser Größen angewandt werden, wenn die andere bekannt ist. Wir wollen nun noch einige Aufgaben mittheilen, und diejenigen Leser, welche mit der algebraischen Rechnung noch nicht hinreichend vertraut sind, werden wohlthun, wenn sie sich noch andere Aufgaben stellen und dieselben auflösen.

Aufgabe 1. — Ein Körper ist während 5 Secunden eine schiefe Ebene herabgefallen, deren Länge 40 Meter und deren Höhe 12 Meter beträgt; wie groß ist die erlangte Geschwindigkeit desselben?

Auflösung. — Werden die Zahlenwerthe statt der Buchstaben in die erste Gleichung substituirt, so erhält man:

$$v = \frac{9{,}8089 \times 12 \times 5}{40} = 14^m{,}71335,$$

d. h. der Körper hat am Ende der fünften Secunde eine Geschwindigkeit erlangt, mit welcher er in 1 Secunde einen Raum $= 14^m{,}7133$ gleichförmig durchlaufen würde.

Aufgabe 2. — Wenn dieselben Größen wie in der vorhergehenden Aufgabe gegeben sind, den Raum zu finden, welchen der Körper vermöge der Wirkung der Schwere in 5 Secunden durchläuft?

Auflösung. — Zur Auflösung dieser Aufgabe muß man sich der zweiten der obigen Gleichungen bedienen, und wenn man die gegebenen Zahlen substituirt, so erhält man:

$$x = \frac{1/2 \times 9{,}8089 \times 12 \times 25}{40} = 36^m{,}783375.$$

Der von dem Körper in 5 Secunden auf der schiefen Ebene durchlaufene Raum ist also $= 36^m{,}783$

Aufgabe 3. — Wenn ein Körper längs einer schiefen Ebene von einer Länge von 40 Meter und von einer Höhe von 12 Meter herabfällt, wie groß ist die Geschwindigkeit, welche derselbe am untern Ende der schiefen Ebene erlangt hat?

Auflösung. — Da der Körper die ganze Länge der schiefen Ebene durchläuft, so hat man:

$$x = l,\ v = \sqrt{\frac{2gxh}{l}} = \sqrt{2gh},$$

und wenn man in diese letzte Gleichung für die Buchstaben ihre Zahlenwerthe substituirt und die angezeigten Rechnungen verrichtet, so erhält man:

$$v = \sqrt{2 \times 9{,}8089 \times 12} = 15{,}343.$$

Die erlangte Geschwindigkeit ist also $15^m{,}343$.

Aus der Gleichung $v = \sqrt{2gh}$ erhellet, daß v die Geschwindigkeit ist, welche ein Körper erlangen würde, wenn derselbe in verticaler Richtung von der Höhe h der schiefen Ebene herabfiele, oder mit andern Worten, die der Fallhöhe AC entsprechende Geschwindigkeit. Wenn also ein Körper längs einer schiefen Ebene bis an ihr unteres Ende herabfällt, ohne daß die diesem Körper durch die Schwere ertheilte Geschwindigkeit durch irgend ein Hinderniß vermindert wird; so hat der Körper dieselbe Geschwindigkeit erlangt, als wenn er in verticaler Richtung von einer der Höhe der schiefen Ebene gleichen Höhe frei herabgefallen wäre.

Dieser Satz gilt für alle auf der schiefen Ebene genommenen Längen, d. h. wenn ein Körper auf einer schiefen Ebene eine beliebige Länge durchlaufen hat, so ist die erlangte Geschwindigkeit desselben der gleich, welche er erlangen würde, wenn er von dem obern Endpuncte der erwähnten Länge bis zu der durch den untern Endpunct derselben gehenden Horizontalebene nach verticaler Richtung frei herabgefallen wäre. Hat z. B. der Körper A die Länge AM auf der schiefen Ebene AB durchlaufen und man zieht durch den Punct M die Horizontale MR, welche die Verticale AC im Puncte R trifft; so ist seine erlangte Geschwindigkeit der der verticalen Höhe AR entsprechenden Geschwindigkeit gleich. Wenn also ein Körper successive auf mehreren schiefen Ebenen von derselben Höhe, aber von verschiedenen Längen herabgleitet, so hat er am untern Ende aller dieser Ebenen immer dieselbe Geschwindigkeit vermöge der Wirkung der Schwere erlangt und die Bewegung auf der längsten Ebene ist auch von der längsten Dauer.

Aufgabe 4. — In welcher Zeit fällt ein Körper von einer schiefen Ebene von 40 Meter Länge und 12 Meter Höhe herab?

Auflösung. — Da die Länge x, welche der Körper auf der schiefen Ebene durchlaufen muß, der Länge l dieser Ebene gleich ist, so verwandelt sich die Formel:

$$t = \sqrt{\frac{2lx}{gh}} \text{ in } t = \sqrt{\frac{2l^2}{gh}} = l\sqrt{\frac{2}{gh}},$$

und wenn man die gegebenen Zahlen in diese letzte Formel substituirt, so erhält man:

$$t = \sqrt{\frac{2}{9{,}8089 \times 12}}.$$

Rechnet man mit Logarithmen, so hat man:

	$log.40$	=	1,6020600
	$^1/_2 log.2$	=	0,1505150
dec. Erg.	$^1/_2 log.9,8089$	=	9,5041899
dec. Erg.	$^1/_2 log.12$	=	9,4604094
	$log.t$	=	20,7171743,

also $t = 5,215.$

Aufgabe 5. — Wenn die schiefe Ebene dieselbe ist, wie in den vorhergehenden Beispielen, die Länge zu bestimmen, welche der Körper auf dieser Ebene durchlaufen muß, um eine Geschwindigkeit $= 9^m,8089$ zu erlangen?

Auflösung. — Die Auflösung dieser Aufgabe wird durch die Formel:

$$x = \frac{^1 l v^2}{2gh}$$

gegeben, und wenn man für die Buchstaben die ihnen entsprechenden gegebenen Zahlen substituirt, so erhält man, wenn man bemerkt, daß die beiden Buchstaben v und g denselben Werth haben:

$$x = \frac{40 \times 9,8089}{2 \times 12} = 16,348.$$

Wenn also der Körper auf der schiefen Ebene eine Länge von $16^m,348$ durchlaufen hat, so hat er eine Geschwindigkeit $= 9^m,8089$ erlangt. Wird dieser Raum von $16^m,348$, welchen der Körper auf der schiefen Ebene durchlaufen hat, durch das Verhältniß $\frac{h}{l} = \frac{12}{40}$ $= 0,3$ multiplicirt, so ist das Product $4^m,9044$ die der Geschwindigkeit, welche der Körper am Ende der ersten Secunde seines freien Falles erlangt, entsprechende Fallhöhe.

§. 196. Wenn ein Körper in verticaler Richtung von einer Höhe x herabfällt, so wird seine Fallzeit durch die Formel $t = \sqrt{\frac{2x}{g}}$ ausgedrückt, und für die Fallzeit auf einer schiefen Ebene, deren Länge l dem auf dieser Ebene durchlaufenen Raume x gleich ist, hat man $t = \sqrt{\frac{2l^2}{gh}}$.

Diese beiden letzten Gleichungen geben:

$$\frac{2x}{g} = \frac{2l^2}{gh},\ x = \frac{l^2}{h},\ hx = l^2.$$

Man hat daher folgenden Lehrsatz: Wenn zwei Körper in demselben Augenblicke von derselben Höhe ausgehen und der eine dieser Körper frei nach der Richtung der Verticale herabfällt, während der andere längs einer schiefen Ebene herabsinkt, so ist die Länge des von dem zweiten Körper auf der schiefen Ebene durchlaufenen Weges die mittlere Proportionale zwischen der Höhe dieser Ebene und der in derselben Zeit von dem ersten Körper nach der Richtung der Verticale durchlaufenen Länge.

Es sei A der Ausgangspunct zweier Körper, wovon der eine nach der Verticale AC und der andere auf der schiefen Ebene AB herabfällt. Wir wollen annehmen, daß der zweite Körper bis zu dem Puncte M herabgesunken sei, und durch diesen Punct das Perpendikel MN auf die schiefe Ebene ziehen, welches die Verticale AC im Puncte N trifft; so wird die verticale Höhe AN von dem ersten Körper in derselben Zeit durchlaufen, als die Länge AM auf der schiefen Ebene von dem zweiten Körper.

Das Dreieck AMN ist rechtwinklig, und wenn man die gerade Linie MR senkrecht auf die Verticale AC zieht, so hat man die beiden rechtwinkligen Dreiecke ARM, AMN, welche den gemeinschaftlichen Winkel A haben. Die beiden Dreiecke haben also gleiche Winkel und sind folglich einander ähnlich und ihre homologen Seiten geben die Proportion:

$$AR : AM = AM : AN,$$

woraus folgt:

$$AN \times AR = (AM)^2.$$

Das Resultat dieser geometrischen Construction stimmt mit dem auf algebraischem Wege gefundenen überein und es ergeben sich daraus nachstehende Folgerungen.

Wenn man in einer Verticalebene einen Kreis $AMBS$ (Fig. 119) beschreibt und aus dem obern Endpuncte A des verticalen Durchmessers AB die Sehnen AM, AN, AP, AS, *etc.* zieht; so werden alle diese Sehnen von den gleichzeitig von ihrem gemeinschaftlichen Anfangspuncte A ausgehenden Körpern in derselben Zeit durchlaufen.

Der Winkel AMB im Halbkreise ist bekanntlich ein rechter und nach dem eben bewiesenen Satze fällt ein Körper durch die Sehne AM in derselben Zeit, als ein anderer Körper durch den verticalen Durchmesser AB und dasselbe gilt von allen aus dem obern Endpuncte A des verticalen Durchmessers gezogenen Sehnen.

Die an das untere Ende B des verticalen Durchmessers AB stoßenden Sehnen MB, NB, PB, SB, *etc.* werden ebenfalls von den gleichzeitig von ihren obern Enden M, N, P, S, *etc.* ausgehenden Körpern in derselben Zeit durchlaufen; denn die zum Durchlaufen irgend einer dieser Sehnen erforderliche Zeit ist dieselbe, als die, welche zum Durchlaufen einer andern Sehne erforderlich ist, welche durch den Punct A zu der ersten parallel gezogen und ihr gleich ist, und diese Zeit ist, wie wir eben bewiesen haben, der Fallzeit durch den verticalen Durchmesser AB gleich.

§. 197. Wenn ein Körper durch eine Kraft, welche demselben eine anfängliche Geschwindigkeit ertheilt, längs einer schiefen Ebene aufwärts getrieben wird; so wird diese Geschwindigkeit durch die Schwere, welche nach einer entgegengesetzten Richtung wirkt, vermindert und die Bewegung ist eine gleichförmig verzögerte.

Wenn die Länge AB der schiefen Ebene (Fig. 118) mit l, ihre Höhe mit h bezeichnet wird, und wenn dem im Durchschnitte B der schiefen Ebene mit der Horizontalebene liegenden Körper nach der Richtung BA durch einen Stoß oder durch eine beliebige Kraft eine Geschwindigkeit V ertheilt wird und α bezeichnet den Winkel, welchen die beiden Ebenen mit einander bilden; so werden die Bewegungs-

gesetze durch die folgenden Gleichungen ausgedrückt, welche sich aus denen für die verticale, aufwärts gerichtete Bewegung (§. 194) ergeben, wenn man $\frac{gh}{l} = g\,cos.\,\alpha$ für g substituirt:

$$v = V - g\,cos.\,\alpha,\quad x = Vt - {}^1/_2 gt^2\,cos.\,\alpha,\quad x = \frac{V^2 - v^2}{2g\,cos.\,\alpha}.$$

Vermittelst dieser Gleichungen kann man die verschiedenen Aufgaben über die aufwärts gerichtete Bewegung eines Körpers auf einer schiefen Ebene lösen.

§. 198. Wir haben vorhin die Gesetze der gleichförmig veränderlichen Bewegung, welche die Körper an der Erdoberfläche unter der Wirkung der Schwere annehmen, erörtert und die Formeln abgeleitet, welche zur Auflösung der verschiedenen Aufgaben dienen, die sich bei dieser Art von Bewegung darbieten können, wenn man von dem Widerstande der Luft bei dem Fallen und Aufsteigen der Körper, und wenn sie sich auf geneigten Ebenen bewegen, abstrahirt, wo in diesem letzten Falle denselben noch ein anderer Widerstand entgegenwirkt, welcher von der Reibung herrührt.

Die Resultate der Theorie können nur dann angewandt werden, wenn man die sich aus der Erfahrung und Beobachtung ergebenden Modificationen damit vorgenommen hat, wofern die Hindernisse, welche die theoretischen Resultate verändern können, nicht durch schicklich angebrachte Vorkehrungen fast unmerklich gemacht sind.

Man hat häufig Gelegenheit, die von der Schwere hervorgebrachten Erscheinungen bei dem Falle der Körper zu beobachten und man kann diese Erscheinungen sich nach Belieben wiederholen lassen; aber dennoch hat kein Philosoph des Alterthumes, welcher sich mit der Erforschung der Naturgesetze beschäftigt hat, die Gesetze der von der Schwere herrührenden Bewegungen auffinden können.

Diese Entdeckung verdanken wir Galiläi; denn von ihm haben wir zuerst die Gesetze der von der Schwere herrührenden gleichförmig veränderlichen Bewegung bei dem Fallen und Aufsteigen der Körper an der Erdoberfläche kennen gelernt, und als er gegen das Jahr 1589 zum Professor an der Universität zu Pisa ernannt wurde, sagte man noch nach Aristoteles, daß die Körper desto schneller fielen, je schwerer sie wären; aber Galiläi zeigte, indem er von der Spitze des schiefstehenden Thurmes zu Pisa von einer Höhe von $58^m,19$ einen Körper von 100 Pfund Gewicht und eine Kugel von 1 Pfund Gewicht von demselben Metalle herabfallen ließ, daß beide Körper fast gleichzeitig die Erde erreichten. Dieser Versuch machte großes Aufsehen und bestätigte die Wahrheit, welche Galiläi vermöge seines Scharfsinnes vorher eingesehen hatte, nämlich daß die Totalwirkung der Schwere auf die Körper ihren Massen proportional ist und daß die Ungleichheit der Gewichte der Körper nicht die Ursache der Verschiedenheit der Fallzeiten der von derselben Höhe herabfallenden Körper ist, sondern daß dieser Unterschied nur dem Widerstande der Luft zugeschrieben werden muß, dessen Wirkung bei den Körpern, welche unter einem größern Volumen nur eine geringe Masse enthalten, oder eine geringe Qualität Materie, am merklichsten ist.

Durch die Nachweisung dieser Wahrheit war ein großer Schritt vorwärts gethan; allein es war ein Genie wie Galiläi erforderlich, um auch die wirklichen und vollständigen Gesetze der durch die Schwere hervorgebrachten Bewegung zu entdecken, welche er in der That entdeckt hat und folgende sind:

1) Wenn sich ein Körper mit einer gleichförmig beschleunigten Bewegung bewegt, so beschreibt derselbe mit der am Ende einer beliebigen Zeit erlangten Geschwindigkeit in derselben Zeit mit einer gleichförmigen Bewegung einen Raum, welcher doppelt so groß ist, als der, welchen er mit der gleichförmig beschleunigten Bewegung durchlaufen hat.

2) Wenn ein Körper mit einer gleichförmig beschleunigten Bewegung von einer gewissen Höhe herabfällt, so verhalten sich die durchlaufenen Räume wie die Quadrate der dazu gebrauchten Zeiten.

Dieses sind die beiden Fundamentalsätze, welche wir in §. 192 bewiesen haben und in den beiden Gleichungen:

$$v = gt,\ x = {}^1/_2 gt^2$$

enthalten sind, und woraus man die Werthe irgend zweier der drei Größen v, x und t ableiten kann, wenn die dritte bekannt ist.

§. 199. Galiläi hat bewiesen, daß die Bewegung auf schiefen Ebenen, wie die des freien Falles nach der Richtung der Verticale, eine gleichförmig beschleunigte ist und daß zwischen beiden weiter kein Unterschied stattfindet, als der, daß die Bewegung auf schiefen Ebenen durch die mehr oder weniger schiefe Richtung dieser Ebene gegen die Verticale mehr oder weniger verzögert wird. Die Geschwindigkeit, welche der Körper auf der schiefen Ebene erlangt, ist immer der gleich, welche er bei dem verticalen Falle von derselben Höhe, als die der geneigten Ebene erlangen würde. Die eben angeführten Sätze mußten noch durch Beobachtungen bestätigt werden, was Galiläi in der That durch einfache und sinnreiche Mittel gethan hat, wovon wir nun noch einen kurzen Begriff geben wollen.

Mit einer starken Bohle, die er auf ihre schmale Srite stellte, um die Biegung zu vermeiden, bildete Galiläi eine schiefe Ebene von $6^m,983$ Länge und auf der obern schmalen Seitenfläche dieser Bohle befand sich eine Nute, welche er mit Pergament ausgeklebt hatte, um die Reibung einer kupfernen oder bronzenen, gut polirten Kugel von einem etwas kleinern Durchmesser, als die Breite der Nute, zu vermindern. Die Neigung der schiefen Ebene konnte beliebig bestimmt werden; allein sie mußte immer so bestimmt werden, daß man die Zeit jedes Versuches messen konnte. Nachdem diese Einrichtung getroffen und die Nute von der Spitze aus bis zu dem vierten Theile ihrer Länge bedeckt war, beobachtete Galiläi die Zeit, welche die der Wirkung der Schwere überlassene Kugel zum Durchlaufen dieses Theiles der schiefen Ebene gebrauchte, worauf er die Zeit beobachtete, während welcher die Kugel die ganze Länge der schiefen Ebene durchlief, und er fand, daß diese letzte Zeit doppelt so groß war, als die erste. Die Kugel durchlief also vermöge der Wirkung der Schwere in der doppelten Zeit einen viermal größern Raum, und dieses Gesetz, daß sich die durchlaufenen Räume wie die Quadrate der zu diesem Durch-

laufen erforderlichen Zeiten verhalten, wurde durch die vielen von Galiläi angestellten Versuche bestätigt. Da aber dieses Gesetz bei dem Falle auf schiefen Ebenen stattfindet, so gilt es auch für den verticalen Fall, welcher jedoch wegen seiner zu großen Schnelligkeit nicht direct beobachtet werden konnte, und Galiläi bestimmte die Fallzeiten durch eine Wasseruhr.

In §. 195 haben wir gefunden, daß man, wenn ein Körper längs einer schiefen Ebene von der Höhe h und von der Länge l herabfällt und von dem von der Reibung der Geschwindigkeit herrührenden Widerstande abstrahirt wird, die Gleichungen hat:

$$x = \frac{ght^2}{2l}, \quad t = \sqrt{\frac{2lx}{gh}};$$

so daß man, wenn die Zeit t gegeben ist, den Werth von x oder den durchlaufenen Raum durch die erste dieser Gleichungen berechnen kann, und wenn der durchlaufene Raum bekannt ist, so kann man die zugehörige Zeit vermittelst der zweiten Gleichung berechnen. Galiläi hat die Rechnungen, wodurch er die Uebereinstimmung der von ihm entdeckten Gesetze der gleichförmig veränderlichen Bewegung mit der Beobachtung dargethan hat, nicht speciell mitgetheilt; allein sie lassen sich vermittelst der vorhergehenden Gleichungen leicht wiederholen. Seine schiefe Ebene hatte eine Länge $l = 6^m,983$, und wir wollen annehmen, daß ihre Höhe $h = 1$ Meter gewesen und daß die Kugel in $^1/_4$ ihrer Länge aufgehalten sei, so daß $x = {}^1/_4 l$ ist; so erhält man, wenn man diese Zahlen statt der Buchstaben in die zweite der vorhergehenden Gleichungen substituirt:

$$t = 6,983\sqrt{\frac{1}{2 \times 9,8089}} = 1'',57.$$

	log. 6, 983	=	0, 8440420
dec. Erg. $^1/_2$	*log.* 2	=	9, 8494850
dec. Erg. $^1/_2$	*log.* 9, 8089	=	9, 5041899
	log. t	=	20, 1977169,

also: $t = 1,5765.$

Läßt man die Kugel die ganze Länge der schiefen Ebene durchlaufen, so ist $x = l$ und man hat:

$$t = 6,983\sqrt{\frac{2}{9,8089}} = 3'',15.$$

	log. 6, 983	=	0, 8440420
$^1/_2$	*log.* 2	=	0, 1505150
dec. Erg. $^1/_2$	*log.* 9, 8089	=	9, 5041899
	log. t	=	10, 4987469,

also: $t = 3,1531.$

In diesen beiden Versuchen verhalten sich also die Fallzeiten wie 1 : 2 und die durchlaufenen Räume wie 1 : 4 oder wie die Quadrate der Fallzeiten.

Wenn die Kugel successive $^1/_2$, $^2/_3$ und $^3/_4$ der Länge der schiefen Ebene durchläuft, so ergibt sich durch dieselben Rechnungen wie in den vorhergehenden Beispielen, daß die zugehörigen Fallzeiten resp. 2″, 23, 2″, 58 und 2″, 73 betragen haben.

Wenn man den von der Kugel in dem ersten Versuche durchlaufenen Raum durch das Quadrat des Verhältnisses einer der Fallzeiten zu der des ersten Versuches multiplicirt, so drückt das Product den dieser Fallzeit entsprechenden durchlaufenen Raum aus. Multiplicirt man z. B. 1^m, 746 durch das Quadrat von $\frac{2,58}{1,57}$, so hat man:

$$1,746 \times \left(\frac{2,58}{1,57}\right)^2 = 4,715$$
$$\frac{2}{3}\, l = 4,655$$
$$\text{Differenz} = 0,060.$$

Das von Galiläi zur Verzögerung der gleichförmig beschleunigten Bewegung, aber ohne ihre Natur zu ändern, erfundene Mittel, um diese Bewegung direct beobachten zu können, ist von den Physikern mit verschiedenen Modificationen bis zur Erfindung der Atwood'schen Maschine, deren Theorie wir in dem folgenden Kapitel mittheilen werden, angewandt.

Von dem Maaße der Kräfte.

§. 200. Die Kräfte zerfallen nach den Wirkungen, welche sie hervorbringen, in zwei Klassen. Zu der ersten Klasse gehören die Kräfte, deren Wirkungen augenblicklich zu erfolgen scheinen, weil diese Wirkungen so schnell hervorgebracht werden, daß wir nicht im Stande sind, die Zeit, nach deren Verlauf sie erfolgen, durch irgend ein Mittel zu messen. Hieher gehören z. B. die Stöße, durch welche die Körper aus dem Zustande der Ruhe in den der Bewegung versetzt werden, die Explosionen, welche durch die Entzündung des Pulvers bewirkt werden, die, welche von der Verdichtung des Dampfes, der Gase und der Electricität herrühren.

Zu der zweiten Klasse gehören die fortwährend wirkenden Kräfte, wie die Schwere, der Widerstand der Luft, der der Flüssigkeiten und die Reibung, und besonders sind es die Wirkungen dieser fortwährend auf die Körper wirkenden Kräfte, welche man in der Dynamik betrachtet.

Das Maaß der Kräfte, welche bei den Aufgaben über das Gleichgewicht vorkommen, reducirt sich, wie wir in der Statik (§. 7) gesehen haben, auf die Bestimmung der Kraft, welche man zur Einheit nehmen will, und eine andere Kraft ist dieser Einheit gleich, wenn diese beiden Kräfte nach entgegengesetztem Sinne wirkend einander das Gleichgewicht halten, und wenn man alsdann diese beiden Kräfte nach einer geraden Linie in demselben Sinne wirken läßt, so erhält man eine doppelt so große Kraft. Ist das Verhältniß der Kräfte auf diese Weise bestimmt, so können sie durch Zahlen oder durch gerade Linien ausgedrückt werden, welche auf den Richtungen der Kräfte genommen und diesen Zahlen proportional sind.

Diese Messungsart der Kräfte ist bei dynamischen Untersuchungen, wo man die Kräfte in Beziehung auf die Bewegungen betrachtet, welche sie hervorbringen können, nicht hinreichend und die Geschwindigkeit, welche in der Statik nicht in Betracht kam, ist eine von den Größen, welche in dem Maaße der Kräfte vorkommen müssen, diese Kräfte mögen auf bloße materielle Puncte wirken, oder auf Körper, wie sie in den Künsten und Gewerben bei den verschiedenen Constructionen angewandt werden.

§. 201. Alle Körper haben verschiedene ihnen inhärirende Eigenschaften und in jedem Zweige der Naturwissenschaften beschäftigt man sich vorzugsweise mit einigen dieser Eigenschaften. Hier wollen wir diejenigen dieser Eigenschaften etwas näher betrachten, welche in der Dynamik in Betracht kommen, so wie die Modificationen, welche die Wirkungen der Kräfte von Seiten der Körper, worauf die letztern wirken, erfahren.

Ein Körper wird von ebenen oder krummen Flächen begrenzt und sein Volumen ist der zwischen diesen Flächen enthaltene Raum.

Die materiellen Theilchen, welche die Masse eines Körpers bilden, sind in seinem Volumen verbreitet, und wenn diese Theilchen von derselben Art, so wie die Vertheilung derselben gleichförmig ist, so enthalten gleiche Volumentheile des Körpers auch gleiche Massen und der Körper ist homogen, wogegen dieser Körper heterogen ist, wenn gleiche Volumentheile desselben verschiedene Massen enthalten.

Wenn man Körper von demselben Volumen in Beziehung auf ihre Massen vergleicht, so erhält man einen Begriff von der Dichtigkeit, welche nichts anders ist, als die in der Volumeneinheit dieses Körpers enthaltene Masse, und folglich verhalten sich die Dichtigkeiten zweier Körper von gleichem Volumen wie ihre Massen.

Wenn V das Volumen, M die Masse, D die Dichtigkeit und P das Gewicht eines Körpers und endlich g die Intensität der Schwere bezeichnet; so hat man:

$$M = DV,\ P = Mg = DVg.$$

Bekanntlich ist $g = 9^m,8089$ und dieser Werth ist, wie wir später sehen werden, durch Pendelbeobachtungen bestimmt. Wenn also von den noch übrigen vier in den vorhergehenden Gleichungen vorkommenden Größen irgend zwei gegeben sind, so kann man die Werthe der beiden andern leicht finden.

Man betrachtet in der Mechanik die festen Körper vorzugsweise in Beziehung auf die Modificationen, welche sie unter der Wirkung der Kräfte erfahren können. Zwei Körper können nicht denselben Raum einnehmen, denn man kann sie zwar zusammendrücken, aber sie können nicht mit einander zusammenfallen, wie die geometrischen Körper, welche keine materiellen Theilchen enthalten, und man nennt diese allgemeine Eigenschaft der Materie Undurchdringlichkeit.

Körper, deren Bestandtheilchen sich nicht verrücken lassen und deren Form weder durch den Stoß, noch durch den Druck gegen andere Körper verändert wird, nennt man starre oder feste Körper. Obgleich in der Natur kein vollkommen starrer oder fester Körper vorkommt, so führen die in dieser Voraussetzung gemachten Schlüsse doch

zu Resultaten, welche sich wenig von denen entfernen, die man bei den Versuchen mit den härtesten Körpern erhält.

Ein weicher Körper ist ein solcher, dessen Form durch den Stoß oder Druck einer Kraft verändert werden kann, und welcher die angenommene neue Form beibehält.

Ein elastischer Körper wird der genannt, dessen Form durch einen Stoß oder Druck verändert werden kann, aber welcher seine ursprüngliche Form sofort wieder annimmt, wenn die auf ihn wirkende Kraft aufhört zu wirken.

Wenn ein elastischer Körper, welcher die Kugelform haben mag, in senkrechter Richtung auf ein festes und unbiegsames Hinderniß geworfen wird, so verkürzt sich sein auf dem Hindernisse senkrechter Durchmesser und sein dazu paralleler Durchmesser verlängert sich; aber unmittelbar nach dem Stoße nimmt die Kugel ihre ursprüngliche Form wieder an und die ihr dadurch restituirte Kraft ertheilt ihr nach der ursprünglichen Richtung eine entgegengesetzte Bewegung und wenn die Kugel vollkommen elastisch wäre, so wäre ihre rückläufige Geschwindigkeit der gleich, welche sie von der Kraft erhalten hat, wodurch sie in Bewegung gesetzt ist.

Der Grad der Elasticität eines Körpers wird durch das Verhältniß zwischen der ihm durch die bewegende Kraft ertheilten Geschwindigkeit und der ihm durch die Elasticität restituirten Geschwindigkeit bestimmt.

§. 202. Nachdem wir die allgemeinen Eigenschaften der starren oder festen Körper angegeben haben, wollen wir nun untersuchen, wie man die Intensitäten der darauf wirkenden Kräfte messen kann, und zwar wollen wir zunächst die augenblicklich wirkenden Kräfte betrachten. Ein Körper, welcher durch den Stoß oder einen Impuls einer Kraft in Bewegung gesetzt ist, bewegt sich nach der geradlinigen Richtung dieses Stoßes oder Impulses und durchläuft in gleichen Zeiten gleiche Räume, d. h. seine Bewegung ist gleichförmig.

Wenn zwei Kräfte successive auf denselben Körper wirken, so sind die Geschwindigkeiten, welche sie ihm ertheilen, gleich oder ungleich. Wenn die beiden Kräfte demselben Körper gleiche Geschwindigkeiten ertheilen, so schließt man daraus, daß diese beiden Kräfte einander gleich sind, und wenn sie gleichzeitig in entgegengesetztem Sinne nach der Richtung derselben geraden Linie wirkten, so würden sich ihre Wirkungen gegenseitig aufheben und der Körper würde in Ruhe oder im Gleichgewichte bleiben.

Wenn zwei Kräfte successive auf denselben Körper wirken und ihm ungleiche Geschwindigkeiten ertheilen, so sind diese Kräfte offenbar ungleich und zwar ist die die größte, welche dem Körper die größte Geschwindigkeit ertheilt. Man nimmt sogar an, obgleich es sich nicht streng beweisen läßt, daß sich die beiden Kräfte wie die Geschwindigkeiten verhalten, welche sie demselben Körper ertheilen; denn diese Annahme ist die einfachste und wahrscheinlichste von allen, welche man möglicherweise machen könnte. Auch wird sie durch die Beobachtung bestätigt, und Galiläi hat unter dieser Voraussetzung die Gesetze der gleichförmig beschleunigten Bewegung bei dem freien verticalen Falle der Körper und auf schiefen Ebenen nachgewiesen.

In der Dynamik kommen also zwei allgemeine Principe oder zwei Fundamentalgesetze der Bewegung vor, welche von jeher als für sich klar angenommen sind, obgleich sie nur auf Voraussetzungen beruhen, welche durch die Erfahrung bestätigt werden, nämlich das Gesetz der Trägheit (§. 187) und das eben erörterte Gesetz der Proportionalität zwischen den Kräften und Geschwindigkeiten, so daß man nach diesem letzten Gesetze das Verhältniß der Geschwindigkeiten für das der Kräfte substituiren kann.

§. 203. Zwei Kräfte f und f', welche zwei verschiedenen Massen m und m' dieselbe Geschwindigkeit ertheilen, verhalten sich wie diese Massen. Diese Proportionalität zwischen den Kräften und den Massen bei gleichen Geschwindigkeiten ergibt sich durch ähnliche Betrachtungen, wie die, durch welche man die Proportionalität zwischen den Kräften und Geschwindigkeiten bei derselben Masse erklärt.

Es läßt sich nun auch leicht das Verhältniß zweier Kräfte f und f' finden, welche in demselben Augenblicke zwei Körpern von den Massen m und m' die Geschwindigkeiten v und v' ertheilen. Denn es seien F und F' zwei andere Kräfte und M die Masse eines Körpers von solcher Beschaffenheit, daß demselben diese Kräfte die Geschwindigkeiten v, v' ertheilen, so hat man die Proportion:

$$F : F' = v : v',$$

und da die Kräfte f, F den Massen m, M dieselbe Geschwindigkeit v ertheilen, so hat man:

$$m : M = f : F = \frac{Mf}{m},$$

und ebenso ergibt sich in Beziehung auf die Kräfte f', F':

$$m' : M = f' : F' = \frac{Mf'}{m'}.$$

Substituirt man diese Werthe der Hilfskräfte F, F' in die erste Proportion und läßt den gemeinschaftlichen Factor M der beiden Glieder des ersten Verhältnisses hinweg, so erhält man:

$$\frac{f}{m} : \frac{f'}{m'} = v : v', \text{ oder } f : f' = mv : m'v'. \quad (1)$$

Aus dieser letzten Proportion folgt, daß sich die beiden Kräfte f, f', welche den Körpern von den Massen m, m' die Geschwindigkeiten v, v' ertheilen wie die Producte aus diesen Massen und ihren Geschwindigkeiten verhalten.

Wenn die Kräfte f, f' einander gleich sind, so hat man:

$$mv = m'v',$$

d. h. die verschiedenen Massen von gleichen Kräften ertheilten Geschwindigkeiten verhalten sich umgekehrt wie diese Massen.

Ferner folgt aus der Proportion (1), wenn man darin $f' = 1$, $m' = 1$ und $v' = 1$ setzt:

$$f = mv,$$

d. h. die Intensität oder Energie einer Kraft f wird gemessen durch das Product aus der Masse m, auf welche diese Kraft wirkt und der Geschwindigkeit v, welche sie dieser Masse ertheilt.

§. 204. Das Product mv aus der Masse eines Körpers und seiner Geschwindigkeit kommt bei verschiedenen mechanischen Untersuchungen häufig vor und hat deshalb den besondern Namen Größe oder Quantität der Bewegung erhalten.

Es sei f eine auf einen homogenen oder heterogenen festen Körper von einer beliebigen Form und von der Masse m wirkende Kraft, so kann man diese Masse als den Inbegriff aller materiellen Theilchen betrachten, woraus der Körper besteht, welche sich vermöge der auf sie wirkenden gleichen Kräfte, deren Resultante f ist, nach parallelen geraden Linien bewegen.

Es bezeichne φ die auf ein materielles Theilchen oder auf die Masseneinheit wirkende Kraft, so verhalten sich die Kräfte f und φ, da die Geschwindigkeit dieselbe ist, wie die Massen, oder wie $m : 1$ und folglich ist:

$$f = m\varphi.$$

Die Kraft φ wird die beschleunigende Kraft genannt und das Product $m\varphi$ aus der beschleunigenden Kraft und der Masse des Körpers nennt man die bewegende Kraft.

Bei den veränderlichen Bewegungen ist die beschleunigende Kraft im Allgemeinen veränderlich, wie wir bald sehen werden; allein wir wollen hier bloß den Fall der Schwerkraft betrachten, welche nahe an der Erdoberfläche eine constante beschleunigende Kraft ist, weil sie den frei ihrer Wirkung folgenden Körpern in jeder Zeiteinheit oder in jeder Secunde einen Geschwindigkeitszuwachs $g = 9^m,8089$ ertheilt, und wenn man in der vorgehenden Formel g statt φ setzt, so verwandelt sie sich in:

$$f = mg.$$

Das Product mg aus der Masse eines Körpers und der beschleunigenden Kraft der Schwere drückt das Gewicht dieses Körpers aus, welches, wenn es sich in Bewegung befindet, eine bewegende Kraft ist. Wenn sich der Körper in Ruhe befindet, und z. B. auf einer horizontalen Tafel liegt, oder vermittelst eines Seiles oder einer Kette an einem festen Puncte aufgehangen ist, so reducirt sich die Wirkung der Schwere auf ein bloßes Bestreben zur Bewegung und die Kraft wird eine Druckkraft genannt.

§. 205. Unter der Quantität der Wirkung, oder der Größe der Leistung einer an einer Maschine wirkenden Kraft versteht man die Wirkung, welche sie ausübt, um ein Gewicht zu heben, einen Widerstand zu überwinden, oder die irgend einer Arbeit entsprechenden Bewegungen zu bewirken. Wenn es z. B. darauf ankommt, ein Gewicht auf eine gewisse Höhe zu heben, so kann man das Product aus diesem Gewichte und aus der Höhe, auf welche dasselbe gehoben ist, zum Maaße der Quantität der Wirkung oder Leistung nehmen. Wenn also das Gewicht p auf die Höhe h gehoben ist, so drückt das Product ph die Quantität der Wirkung oder Leistung aus.

§. 206. Es sei m die Masse des Körpers und g die beschleunigende Kraft der Schwere, oder der Geschwindigkeitszuwachs während der Zeiteinheit, so hat man:

$$p = mg,\ ph = mgh.$$

Die Geschwindigkeit, welche ein von der Höhe h herabfallender Körper erlangt, wird durch die Gleichung:

$$v^2 = 2gh,\ {}^1/_2 v^2 = gh$$

bestimmt, und wenn man ${}^1/_2 v^2$ für gh substituirt, so erhält man:

$$ph = {}^1/_2 mv^2.$$

Das Product mv^2 aus der Masse eines Körpers und dem Quadrate seiner Geschwindigkeit wird seine lebendige Kraft genannt und man macht davon bei der Berechnung der in Bewegung befindlichen Maschinen häufig Gebrauch.

Die Messung der Kräfte ist der Gegenstand eines sehr lebhaften Streites unter den großen Mathematikern, welche die Wissenschaft der Bewegung durch ihre Entdeckungen beträchtlich erweitert haben, gewesen. Bei allen Rechnungen über die in Bewegung befindlichen Körper nahmen sie das Product aus der Masse des Körpers und aus seiner Geschwindigkeit, als Maaß der Kraft; allein Leibnitz behauptete im Jahre 1686, daß man das Product aus der Masse und dem Quadrate der Geschwindigkeit des Körpers, welches er seine lebendige Kraft nannte, zum Maaße der Kraft nehmen müsse. Die Meinungen der Gelehrten waren über diesen Gegenstand getheilt und man hat sich länger als ein halbes Jahrhundert gestritten, bis man endlich einsah, daß man dasselbe Resultat erhält, man mag das eine oder andere Maaß nehmen, wenn man nur consequent schließt.

§. 207. Der Lehrsatz von der Zusammensetzung der Kräfte ist in der Statik unabhängig von der Betrachtung der Geschwindigkeiten erwiesen, wie es auch die geometrische Strenge erfordert, weil man bei einer Untersuchung keinen dem Gegenstande fremdartigen Begriff anwenden muß.

Man kann auch den Lehrsatz von der Zusammensetzung der Bewegungen, welcher derselbe ist, als der von der Zusammensetzung der Kräfte, erweisen, wenn man die Geschwindigkeiten in Betracht zieht, wodurch der Beweis noch viel einfacher gemacht wird, als der, welcher sich bloß auf den Begriff der Kraft gründet. Uebrigens ist dieses der ursprüngliche Zustand des in Rede stehenden Lehrsatzes; denn man hatte denselben viel früher zur Zusammensetzung der Bewegungen oder der Geschwindigkeiten angewandt, als Varignon auf die Idee kam, denselben auf die Kräfte anzuwenden, um daraus die Gesetze ihres Gleichgewichtes und die Bedingungen des Gleichgewichtes der einfachen Maschinen abzuleiten.

Es sei A (Fig. 120) der Ausgangspunct eines Körpers, auf welchen gleichzeitig zwei Kräfte wirken, wovon die eine ihm nach der Richtung AB und die andere nach der Richtung AC eine gleichförmige Geschwindigkeit erheilt. Wenn die auf den Körper wirkenden beiden Kräfte nach ihren resp. Richtungen die Längen AB, AC durchlaufen haben, so befindet sich der Körper im Endpuncte D der Diagonale des Pa-

rallelogrammes, deſſen Seiten *AB*, *AC* ſind. Denn man kann ſich vorſtellen, daß der Körper auf einem Lineale *AC* liege, welches durch die nach *AB* wirkende Kraft parallel zu ſich ſelbſt fortgeſchoben wird, und daß zu gleicher Zeit der Körper vermöge der Wirkung der nach *AC* gerichteten Kraft die Länge *AC* dieſes Lineales durchläuft, und wenn daſſelbe in die Lage *BD* gekommen iſt, ſo iſt klar, daß der Punct *C*, worin ſich der Körper befindet, mit dem Endpuncte *D* der Diagonale zuſammenfällt.

Wenn man auf den Richtungen der Kräfte zwei beliebige Längen *Ab*, *Ac* nimmt, welche ſich wie die Geſchwindigkeiten nach den Richtungen *AB*, *AC* verhalten, ſo beweiſt man ebenſo, daß ſich der Körper im Endpuncte *d* der Diagonale des Parallelogrammes *Abdc* befindet, wenn er ſich, jeder der einzelnen Kräfte folgend, in den Puncten *b* und *c* befände. Aber da die Parallelogramme *Abdc*, *ABDC* einander ähnlich ſind, ſo liegen ihre Diagonalen in derſelben geraden Linie, und folglich bewegt ſich der Körper unter der gleichzeitigen Wirkung der nach *AB*, *AC* gerichteten Kräfte nach der Diagonale des Parallelogrammes *ABDC*, welches das Parallelogramm der Kräfte oder Geſchwindigkeiten genannt wird, weil die Seiten deſſelben die Kräfte oder die ihnen entſprechenden Geſchwindigkeiten ausdrücken.

Dieſer Lehrſatz findet nicht bloß für beliebige gleichförmige Geſchwindigkeiten, ſondern auch für beſchleunigte und verzögerte Geſchwindigkeiten ſtatt, wofern nur die Veränderungen derſelben in demſelben Verhältniſſe ſtehen, und ſo oft dieſe Bedingungen erfüllt werden, laſſen ſich die Geſchwindigkeiten durch ähnliche Methoden zuſammenſetzen, wie die in der Statik zur Zuſammenſetzung der Kräfte angewandten.

Allgemeine Formeln für die veränderliche Bewegung.

§. 208. Durch Betrachtungen, welche ſich auf die Principien der elementaren Geometrie und Algebra ſtützen, haben wir die Formeln abgeleitet, welche uns zur Auflöſung einiger der Hauptaufgaben über die gleichförmige und gleichförmig veränderliche Bewegung gedient haben, und wir wollen nun die Theorie der veränderlichen Bewegung wieder vornehmen, indem wir die Principien der Differential- und Integralrechnung darauf anwenden, wodurch ſich auf eine directe und leichte Weiſe die Formeln für die gleichförmig und für die beliebig veränderliche Bewegung ergeben, deren man oft bedarf, um ſehr wichtige Aufgaben der Mechanik und Phyſik, worauf die gewöhnlichen Methoden nicht anwendbar ſind, zu löſen.

In der allgemeinen Gleichung für die gleichförmige Bewegung:

$$x = e + vt$$

kommen zwei verſchiedene Arten von Größen vor. Der von dem Körper durchlaufene Raum x und die Zeit t, während welcher man ſeine Bewegung beobachtet hat, ſind zwei veränderliche Größen, wogegen die beiden andern Größen e und v conſtante Größen ſind. Die gleichförmige Bewegung eines Körpers wird alſo durch eine unbeſtimmte Gleichung des erſten Grades ausgedrückt, welche man nach den Principien der analytiſchen Geometrie auf folgende Weiſe conſtruiren kann.

Wir wollen zwei auf einander senkrechte Axen AX, AY (Fig. 121) ziehen und die Puncte suchen, worin diese Axen von der durch die Gleichung $x = e + vt$ ausgedrückten geraden Linie geschnitten werden, wobei wir annehmen, daß die Werthe der beiden constanten Größen e und v bekannt sind. Wenn man $t = o$ setzt, so erhält man $x = e = AD$, und wenn man $x = o$ setzt, so hat man $o = e + vt$, woraus folgt $t = -\frac{e}{v} = -AC$. Ziehen wir nun durch die eben bestimmten Puncte C und D der Axen eine gerade Linie, so ist dieselbe die durch die Gleichung für die gleichförmige Bewegung ausgedrückte gerade Linie oder der geometrische Ort der von dem Körper durchlaufenen Räume. Denn wenn man aus einem beliebigen Puncte M dieser geraden Linie ein Perpendikel oder eine Ordinate NM auf die Axe AX fällt, so ist die zugehörige Abscisse DM der von dem Körper während der durch die Ordinate NM ausgedrückten Zeit durchlaufene Raum.

Das rechtwinklige Dreieck DMN gibt $tang.\ DNM = \frac{DM}{MN}$, und wenn man bemerkt, daß $tang.\ DNM = v$, $MN = t$, $AD = e$ und $DM = x - e$ ist, so findet man:

$$v = \frac{x - e}{t}.$$

Aus einem auf der Verlängerung der geraden Linie CN in einer sehr kleinen Entfernung vom Puncte N genommenen Puncte n wollen wir die Ordinate nm fällen und Np parallel zu der Axe AX ziehen; so sind die beiden rechtwinkligen Dreiecke DMN, Npn einander ähnlich und statt des Verhältnisses $\frac{DM}{MN}$ der beiden Katheten des ersten Dreieckes kann man das Verhältniß $\frac{Np}{pn}$ der beiden Katheten des zweiten Dreieckes setzen, und da außerdem $Np = dx$, $pn = dt$ ist; so hat man:

$$v = \frac{dx}{dt},$$

d. h. die Geschwindigkeit eines Körpers wird durch den Quotienten aus dem Differentiale des durchlaufenen Raumes und dem Differentiale der dazu gebrauchten Zeit ausgedrückt.

Diese Differentialformel drückt nicht bloß die Geschwindigkeit bei der gleichförmigen Bewegung aus, sondern sie ist der allgemeine Ausdruck der Geschwindigkeit, von welcher Beschaffenheit die Kraft auch sein mag, welche die Bewegung hervorbringt. Wenn sie eine stetig wirkende Kraft ist, so bringt sie eine veränderliche Bewegung hervor, und wenn wir annehmen, daß es eine beschleunigte Bewegung ist, so können wir sie als durch eine Reihe von Impulsen, welche nach gleichen und unendlich kleinen Intervallen auf einander folgen, hervorgebracht betrachten. Während eines dieser unendlich kleinen Zeitintervalle dt durchläuft der Körper den unendlich kleinen Raum dx und seine Bewegung ist bis zu dem folgenden Impulse, welcher ihm einen

neuen Zuwachs von Geschwindigkeit ertheilt, gleichförmig. Die vorhergehende Formel ist also der Ausdruck der Geschwindigkeit des Körpers, während eines beliebigen unendlich kleinen Zeitraumes seiner Bewegung, und ebenso beweist man, daß sie auch die Geschwindigkeit des Körpers ausdrückt, wenn seine Bewegung eine verzögerte ist.

Die einfachste Bewegung nach der gleichförmigen ist die gleichförmig beschleunigte, wie die, welche nahe an der Erdoberfläche durch die Wirkung der Schwere den freifallenden Körpern ertheilt wird, deren Geschwindigkeit am Ende irgend einer Zeit t durch die Formel:

$$v = a + gt$$

ausgedrückt wird, worin a die Geschwindigkeit des Körpers in dem Augenblicke bezeichnet, worin man die Zeit anfängt zu zählen und g die Geschwindigkeitszunahme während jeder Secunde oder Zeiteinheit.

Dieser Werth der Geschwindigkeit v ist der durch die vorhergehende Formel ausgedrückten Geschwindigkeit gleich, also:

$$\frac{dx}{dt} = a + gt,\ dx = adt + gtdt,$$

folglich, wenn man integrirt und die Constante mit b bezeichnet:

$$x = b + at + {}^1/_2 gt^2.$$

Wenn der Körper keine anfängliche Geschwindigkeit hat, so sind die beiden Constanten a und b Null und die allgemeinen Formeln für die gleichförmig veränderliche Bewegung reduciren sich auf die bereits in §. 192 gefundenen:

$$v = gt,\ x = {}^1/_2 gt^2,$$

woraus folgt:

$$g = \frac{v}{t},\ g = \frac{2x}{t^2}.$$

Hieraus sieht man, daß g oder die von der Schwere herrührende Beschleunigung durch den Quotienten aus der am Ende der Zeit t erlangten Geschwindigkeit und aus dieser Zeit selbst ausgedrückt wird, oder vielmehr durch den Quotienten aus dem doppelten durchlaufenen Raume und aus dem Quadrate der zu seinem Durchlaufen erforderlichen Zeit.

Wir wollen nun die Formeln für die beliebig veränderliche Bewegung abzuleiten suchen.

§. 209. Es bezeichne φ die auf den Körper wirkende Kraft, welche demselben eine veränderliche Bewegung ertheilt, die wir als eine beschleunigte annehmen wollen. Um den Werth dieser Kraft zu bestimmen, wollen wir annehmen, daß sie am Ende der Zeit t constant werde, und untersuchen, welche Wirkung sie unmittelbar nach der Zeit t in der Secunde oder in der Zeiteinheit hervorbringen kann.

Es sei v die Geschwindigkeit, welche der Körper am Ende der Zeit t erlangt hat, so wird seine Geschwindigkeit nach Verlauf der Zeit $t + dt$ durch $v + dv$ ausgedrückt, und folglich ertheilt die constant gewordene Kraft φ dem Körper während des Zeitelementes dt eine Geschwindigkeit dv, mithin wird die dem Körper während der Zeiteinheit oder während 1″ ertheilte Geschwindigkeit durch das Product aus dv

und der Zahl, welche angibt, wie vielmal dt in $1''$ enthalten ist, oder durch $\frac{1''}{dt} \times dv$ ausgedrückt, und hieraus folgt:

$$\varphi = \frac{dv}{dt}, \quad dv = \varphi dt.$$

Dieser Werth von φ ist dem ähnlich, welchen wir für g bei der gleichförmig veränderlichen Bewegung gefunden haben und beide unterscheiden sich nur dadurch von einander, daß der Werth von g der Quotient zweier endlicher Größen ist, während der Werth von φ durch den Quotienten der Differentiale derselben Größen ausgedrückt wird.

Die eben gefundene Formel kann mit der Formel:

$$v = \frac{dx}{dt}$$

verbunden werden, welche, wie wir in §. 208 gesehen haben, die Geschwindigkeit bei jeder Art von Bewegung ausdrückt.

Wenn man diese letzte Gleichung differentiirt, indem man dt als constant betrachtet, so erhält man:

$$dv = \frac{d^2x}{dt},$$

und wenn man diesen Werth von dv in die vorhergehende Formel substituirt, so verwandelt sie sich in:

$$\frac{d^2x}{dt} = \varphi dt, \quad \varphi = \frac{d^2x}{dt^2},$$

und wenn man endlich dt zwischen denselben Gleichungen eliminirt; so erhält man:

$$\varphi = \frac{v dv}{dx} = {}^1/_2 \frac{dv^2}{dx}.$$

§. 210. Bei den vorhergehenden Formeln ist vorausgesetzt, daß sich der Körper auf einen materiellen Punct, oder auf die Masseneinheit reducirt, und wenn f die auf den Körper von der Masse m wirkende Kraft bezeichnet; so wird diese Kraft ausgedrückt durch:

$$f = m\varphi, \text{ oder } f = m.\frac{dv}{dt}.$$

Das Product $m\varphi$ wird die bewegende Kraft und die auf die Masseneinheit wirkende Kraft φ die beschleunigende Kraft genannt, indem die letztere durch den Quotienten aus der bewegenden Kraft und der Masse des Körpers ausgedrückt wird.

Diese Formeln werden in der analytischen Mechanik häufig angewandt, und um ihren Nutzen zu zeigen, wollen wir sie auf die Auflösung der folgenden Aufgaben anwenden, welche sich an die bereits über die gleichförmig veränderliche Bewegung gelösten anschließen.

Aufgabe 1. — Die Fallzeit t, die erlangte Geschwindigkeit und den durchlaufenen Raum am Ende dieser Zeit zu finden, wenn der Widerstand der Luft in Rechnung gebracht wird.

Auflösung. — Der Körper kann als ein Inbegriff von materiellen Puncten betrachtet werden, welche vermöge der Wirkung der Schwere alle dieselbe Geschwindigkeit annehmen und sich gerade so nach der verticalen Richtung bewegen, wie wenn sie in keinem Zusammenhange mit einander ständen.

Der Widerstand der Luft ist eine verzögernde Kraft, welche nach einer Richtung auf die Oberfläche des Körpers wirkt, die der, nach welcher die Schwere wirkt, entgegengesetzt ist. Dieser Widerstand und das Gesetz, nach welchem er wirkt, ist ungeachtet der vielen über diesen Gegenstand angestellten Untersuchungen noch nicht genau bekannt; denn die angestellten Versuche geben für den Werth dieses Widerstandes keine übereinstimmenden Resultate, was doch erforderlich wäre zur Begründung einer allgemeinen Theorie. Jedoch folgt aus diesen Versuchen, daß der in Rede stehende Widerstand bei nicht zu kleinen und nicht zu großen Geschwindigkeiten, und wenn die Luft, durch welche der Körper geht, als überall von derselben Dichtigkeit angenommen wird, dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional ist.

Wenn v die Geschwindigkeit des Körpers und k einen Coefficienten bezeichnet, welcher durch Beobachtung bestimmt werden muß, so wird die beschleunigende Kraft ausgedrückt durch:

$$\varphi = g - kv^2.$$

Zunächst muß in dieser Gleichung für φ sein Werth $\frac{dv}{dt}$ gesetzt werden; aber man kann auch zur Herstellung der Homogeneität der Glieder und zur Vereinfachung der Rechnungen $k = \frac{g}{a^2}$ setzen, und nach diesen Substitutionen hat man die Differentialgleichung:

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{gv^2}{a^2} = g\,\frac{a^2 - v^2}{a^2},$$

$$gdt = \frac{a^2 dv}{a^2 - v^2} = \frac{a^2 dv}{(a+v)(a-v)},$$

deren Integral ist:

$$gt = a^2 \int \frac{dv}{(a+v)(a-v)}.$$

Um die angezeigte Integration zu verrichten, wollen wir den Bruch unter dem Integralzeichen in zwei andere zerlegen, deren Zähler wir mit A und B bezeichnen wollen, so daß

$$\frac{dv}{a^2 - v^2} = dv\left(\frac{A}{a+v} + \frac{B}{a-v}\right),$$

woraus folgt, wenn man den gemeinschaftlichen Factor dv hinwegläßt, auf denselben Nenner reducirt und alle Glieder in den ersten Theil der Gleichung setzt:

$$(A - B)\,v - (A + B)\,a + 1 = 0,$$

und da von den beiden Gliedern des ersten Theiles dieser Gleichung das eine die Veränderliche v und das andere nur constante Größen enthält; so muß jedes derselben für sich verschwinden, welches gibt:

$$A = B,\ -2Aa + 1 = 0,\ A = \frac{1}{2a},$$

$$\frac{dv}{(a+v)(a-v)} = \frac{1}{2a}\left(\frac{dv}{a+v} + \frac{dv}{a-v}\right),$$

und die Gleichung der Aufgabe verwandelt sich also in folgende:

$$gt = \frac{a}{2}\int\left(\frac{dv}{a+v} + \frac{dv}{a-v}\right),$$

deren zweiter Theil sich durch Logarithmen integriren läßt, so daß man hat:

$$gt = \frac{a}{2}[log.(a+v) - log.(a-v)],$$

$$\frac{2gt}{a} = log.\frac{a+v}{a-v},$$

wo keine Constante hinzugefügt zu werden braucht, weil die Veränderlichen v und t zu gleicher Zeit verschwinden.

Wenn die von dem Körper erlangte Geschwindigkeit v gegeben ist, so berechnet man die Fallzeit durch die eben gefundene Formel, worin die vorkommenden Logarithmen neperſche sind, deren Basis oder Grundzahl $e = 2,7182818....$ ist. In jedem Logarithmensysteme ist der Logarithmus der Grundzahl $= 1$, und folglich $log.\, e = 1$. Multiplicirt man die vorhergehende Gleichung durch $log.\, e = 1$ und bemerkt, daß $m\, log.\, e = log.\, e^m$ ist, so hat man:

$$\frac{2gt}{a} log.\, e = log.\frac{a+v}{a-v},\quad e^{\frac{2gt}{a}} = \frac{a+v}{a-v}.$$

Wenn man diese letzte Gleichung in Beziehung auf v auflöst, so findet man:

$$v = \frac{a\,(e^{\frac{2gt}{a}} - 1)}{e^{\frac{2gt}{a}} + 1} = a\left(1 - \frac{2}{e^{\frac{2gt}{a}} + 1}\right).$$

Je mehr also die Zeit t zunimmt, desto kleiner wird der Bruch $\frac{2}{e^{\frac{2gt}{a}} + 1}$ und der Werth der Geschwindigkeit v nähert sich dem Werthe von a, d. h. sie strebt, gleichförmig zu werden; aber obgleich der Werth von v schon nach einer kurzen Zeit wenig von a verschieden ist, so wird die Geschwindigkeit in aller Strenge doch erst nach einer unendlich langen Zeit gleichförmig.

§. 211. Um die Relation zwischen dem durchlaufenen Raume und der erlangten Geschwindigkeit, oder den Raum x als Function dieser Geschwindigkeit zu finden, wollen wir uns der beiden Gleichungen:

$$dx = vdt,\ \frac{dv}{dt} = g.\frac{a^2 - v^2}{a^2}$$

bedienen. Wenn man den aus der ersten Gleichung abgeleiteten Werth von *dt* in die zweite substituirt, so erhält man:

$$gdx = a^2 . \frac{vdv}{a^2 - v^2}.$$

Der Bruch im zweiten Theile dieser Gleichung ist ein logarithmisches Differential, weil der Zähler dieses Bruches das Differential seines Nenners ist, bis auf eine Constante, und um das Integral zu finden, wollen wir

$$a^2 - v^2 = z, \; vdv = -\frac{dz}{2}$$

setzen. Werden diese Werthe in die vorhergehende Gleichung substituirt, so verwandelt sie sich in:

$$gdx = -\frac{a^2}{2} . \frac{dz}{z},$$

deren Integral ist:

$$gx = C - \frac{a^2}{2} log. z,$$

und wenn man für z seinen Werth wieder setzt, so erhält man:

$$gx = C - \frac{a^2}{2} log. (a^2 - v^2).$$

Zur Bestimmung des Werthes der Constante C braucht man nur zu bemerken, daß zu gleicher Zeit $x = o$ und $v = o$ ist, welches gibt:

$$o = C - \frac{a^2}{2} log. a^2, \; C = \frac{a^2}{2} log. a^2,$$

und folglich ist das vollständige Integral:

$$gx = \frac{a^2}{2} [log. a^2 - log. (a^2 - v^2)],$$

$$x = \frac{a^2}{2g} log. \frac{a^2}{a^2 - v^2}.$$

Wird der oben für die Geschwindigkeit v gefundene Werth zum Quadrate erhoben und in die letzte Gleichung substituirt, so erhält man nach verrichteten Reductionen zur Berechnung der Fallhöhe, wenn die Fallzeit bekannt ist, folgende Formel:

$$x = \frac{a^2}{g} log. \frac{e^{\frac{2gt}{a}} + 1}{2e^{\frac{gt}{a}}} = \frac{a^2}{g} log. \frac{e^{\frac{gt}{a}} + e^{\frac{-gt}{a}}}{2}.$$

Durch ähnliche Operationen wie die vorhergehenden fände man unter Berücksichtigung des Widerstandes der Luft die Gleichungen für die Bewegung eines in verticaler Richtung aufwärts geworfenen Körpers.

§. 212. Aus den eben gefundenen Gleichungen müssen sich die für den verticalen Fall der Körper im leeren Raume, oder in einem

Mittel von unmerklichem Widerstande, d. h. wenn $a = \infty$ ist, als besonderer Fall wieder ergeben. Bei dieser Untersuchung, womit wir uns jetzt beschäftigen wollen, wollen wir zur Vermeidung der indirecten Transformationen, welche bei der Betrachtung der erhaltenen endlichen Gleichungen erforderlich sind, die Differentialgleichungen:

$$gdt = dv.\ \frac{a^2}{a^2 - v^2},\ gdx = vdv.\ \frac{a^2}{a^2 - v^2}$$

wieder betrachten.

Der Bruch $\frac{a^2}{a^2 - v^2}$ kann durch Division oder durch die Binomialformel in eine Reihe entwickelt werden, wodurch man erhält:

$$\frac{a^2}{a^2 - v^2} = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{a^2}} = \left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right)^{-1} = 1 + \frac{v^2}{a^2} + \frac{v^4}{a^4} + \frac{v^6}{a^6} + etc.,$$

und wenn man die ersten Glieder dieser Reihe in die beiden vorhergehenden Differentialgleichungen substituirt, so erhält man:

$$gdt = dv + \frac{v^2 dv}{a^2} + \frac{v^4 dv}{a^4} + \frac{v^6 dv}{a^6} + etc.,$$

$$gdx = vdv + \frac{v^3 dv}{a^2} + \frac{v^5 dv}{a^4} + \frac{v^7 dv}{a^6} + etc.,$$

und die Integrale dieser beiden Gleichungen sind:

$$gt = v + \frac{v^3}{3a^2} + \frac{v^5}{5a^4} + \frac{v^7}{7a^6} + etc.,$$

$$gx = {}^1/_2 v^2 + \frac{v^4}{4a^2} + \frac{v^6}{6a^4} + \frac{v^8}{8a^6} + etc.$$

Wenn man in diesen letzten Gleichungen $a = \infty$ setzt, so verschwinden alle Brüche, worin diese Größe im Nenner vorkommt, jede der beiden Reihen reducirt sich auf ihr erstes Glied und man hat bloß die beiden Gleichungen:

$$v = gt,\ v^2 = 2gx,$$

welche die Gesetze des verticalen Falles schwerer Körper in geringen Entfernungen von der Erdoberfläche und im leeren Raume ausdrücken.

§. 213. Durch a haben wir eine Größe bezeichnet, welche in den Formeln der eben gelösten Aufgabe unbestimmt geblieben ist, und wir wollen nun den Werth dieser Größe suchen.

Der Widerstand der Luft ist, wie bereits bemerkt worden, eine der Schwere direct entgegenwirkende Kraft und man nimmt an, daß die erste dieser Kräfte der Dichtigkeit D' der Flüssigkeit, der Oberfläche S des Körpers und dem Quadrate seiner Geschwindigkeit v^2 proportional ist, und wenn man dieselbe durch die Masse m des Körpers dividirt, so erhält man $\frac{SD'v^2}{m}$. Wir haben aber die Intensität dieser Kraft bereits durch $\frac{gv^2}{a^2}$ ausgedrückt, und folglich haben wir die Gleichung:

$$\frac{g}{a^2} = \frac{SD'}{m}.$$

Zur Erleichterung der Rechnungen wollen wir annehmen, daß der Körper eine Kugel von dem Halbmesser r und von der Dichtigkeit D sei. Der auf die ganze Kugel wirkende Widerstand ist bloß der Hälfte des Widerstandes gleich, welcher auf einen ihrer größten Kreise wirken würde, und folglich ist $S = \frac{1}{2}\pi r^2$. Das Volumen der Kugel ist gleich $\frac{4}{3}\pi r^3$ und ihre Masse $m = \frac{4}{3}\pi r^3 D$, und wenn man diese Werthe in die vorhergehende Gleichung subſtituirt, so erhält man:

$$\frac{g}{a^2} = \frac{\frac{1}{2}\pi r^2 D'}{\frac{4}{3}\pi r^3 D} = \frac{3}{8}.\frac{1}{r}.\frac{D'}{D}.$$

Diese Formel muß noch nach folgenden Betrachtungen modificirt werden: Durch g haben wir die von der Schwere herrührende beschleunigende Kraft im leeren Raume bezeichnet, welche auf $g - g \times \frac{D'}{D}$, oder $g\left(1 - \frac{D'}{D}\right)$ reducirt werden muß, wenn der Körper in der Luft nach der Verticale herabfällt, und nach den von Newton bei seinen Untersuchungen über diesen Gegenstand gefundenen Resultaten ist der Widerstand der Luft nur halb so groß, als derselbe durch die vorhergehende Theorie angegeben wird.

Werden diese beiden Bedingungen in die vorhergehende Gleichung eingeführt, so verwandelt sie sich in:

$$\frac{g\left(1 - \frac{D'}{D}\right)}{a^2} = \frac{3}{16}.\frac{1}{r}.\frac{D'}{D'}, \quad \frac{a^2}{g} = \frac{16}{3}\left(1 - \frac{D'}{D}\right) r \frac{D}{D'},$$

$$a^2 = \frac{16}{3} r \left(\frac{D}{D'} - 1\right) g.$$

Die Theorie, worauf die vorhergehenden Formeln beruhen, verdankt man Newton und ist im zweiten Buche seiner Principien nach der synthetischen Methode, deren sich Newton bei der Darlegung seiner Entdeckungen bediente, auseinander gesetzt.

Um ein Anwendungsbeispiel von den gefundenen Formeln zu geben, wollen wir den ersten Versuch Newton's nehmen. Die Körper waren gläserne Kugeln, welche inwendig mit Luft gefüllt waren. Newton ließ sie in der St. Paulskirche zu London von einer Höhe von 220 engl. Fußen herabfallen. Die Kugel, womit der erste Versuch angestellt wurde, wog 510 Gran, ihr Durchmesser betrug 5,1 engl. Zoll und die Fallzeit 8,2 Secunden.

Da der Halbmesser der Kugel 2,55 Zoll beträgt, so ist ihr Volumen $\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \times 3{,}1416 \times (2{,}55)^3 = 69{,}45$ Cubikzoll. Ein Cubikzoll Wasser wiegt 252,5 Gran, und folglich wiegt ein Volumen Wasser, welches dem der Glaskugel gleich ist $252{,}5 \times 69{,}45 = 17536$ Gran. Das Verhältniß eines Volumens Wasser zu einem gleichen Volumen Luft ist $= 812$, und folglich wiegt ein Volumen Luft, welches dem

der Glaskugel gleich ist, $\frac{17536}{812} = 21{,}59$ Gran. Das Gewicht der Kugel in der Luft ist $= 510{,}00$ Gran und das Gewicht des von ihr verdrängten Volumens Luft 21,59 Gran, folglich wiegt die Kugel im leeren Raume 531,59 Gran. Da das Verhältniß der Dichtigkeiten dem der Gewichte gleich ist, so hat man:

$$\frac{D}{D'} - 1 = \frac{531{,}59}{21{,}59} - 1 = 23{,}622.$$

Da die Rechnungen in englischen Maaßen angestellt sind, um das Resultat der Rechnung mit dem der Beobachtung unmittelbar vergleichen zu können, so muß man bemerken, daß für London $g = 384$ Zoll ist, und wenn man für die Buchstaben D, D' und g die eben gefundenen Zahlen substituirt; so verwandelt sich die letzte Formel in:

$$a^2 = \frac{16}{3} \times 2{,}55 \times 23{,}622 \times 384.$$

Verrichtet man die angezeigten Rechnungen mit Hilfe der Logarithmen, so hat man:

	$log.\ 16$	$=$	1,2041200
	$log.\ 2{,}55$	$=$	0,4065402
	$log.\ 23{,}622$	$=$	1,3733167
	$log.\ 384$	$=$	2,5843312
dec. Erg.	$log.\ 3$	$=$	9,5228787
	$log.\ a^2$	$=$	15,0911868,

also: $a^2 = 123363{,}5,$

folglich: $\frac{a^2}{g} = 321{,}26.$

und wenn man alsdann die Hälfte des Logarithmus von a^2 nimmt und die zugehörige Zahl sucht, so erhält man:

$$log.\ a = 2{,}5455934,\ a = 351{,}2314.$$

§. 214. Um den von dem Körper durchlaufenen Raum oder die theoretische Fallhöhe zu finden, muß man die Werthe der Buchstaben in die Formel:

$$x = \frac{a^2}{g}\ log.\ \frac{e^{\frac{gt}{a}} + e^{\frac{-gt}{a}}}{2}$$

substituiren; aber da das Glied $e^{\frac{-gt}{a}} = \frac{1}{e^{\frac{gt}{a}}}$ ein sehr kleiner Bruch ist, welcher vernachlässigt werden kann, so verwandelt sich die vorhergehende Formel in:

$$x = \frac{a^2}{g}\ log.\ \frac{e^{\frac{gt}{a}}}{2} = at - \frac{a^2}{g}\ log.\ 2,$$

und wenn wir den neperschen Logarithmus vermittelst des correspondirenden gewöhnlichen Logarithmus berechnen, so haben wir:

$$log.\ 2 = log.\ 2 \times 2{,}302585 = 0{,}30103 \times 2{,}302585$$
$$= 0{,}69315.$$

Werden die bekannten Werthe der Buchstaben in die vorhergehende Formel substituirt und die Rechnungen verrichtet, so erhält man:

$$x = 351{,}2314 \times 8{,}2 - 321{,}26 \times 0{,}69315$$
$$= 2657{,}42 \text{ Zoll},$$
$$= 221{,}45 \text{ Fuß}.$$

Newton hat 226 Fuß gefunden und dieser Unterschied von 5 Fuß rührt hauptsächlich von dem Verhältnisse des Gewichtes eines Volumens Wasser zu dem eines gleichen Volumens Luft her, welches von Newton und mehreren andern Geometern, welche die Analysis auf seine Theorie angewandt haben, $= 850$ angenommen ist, wogegen wir dieses Verhältniß nach Lavoisier's Versuchen $= 812$ angenommen haben.

Wenn der Fall im leeren Raume stattgefunden hätte, so wäre die Höhe von 220 Fuß in 3″,7 von dem Körper durchfallen, woraus man sieht, daß bei dieser Höhe die Fallzeit durch den Widerstand der Luft mehr als doppelt so groß wird.

§. 215. Aufgabe. — Die Gesetze der Bewegung des verticalen Falles der Körper zu bestimmen, wenn man die Schwere als eine Kraft betrachtet, welche sich im umgekehrten Verhältnisse des Quadrates der Entfernungen ändert.

Auflösung. — Bisher haben wir vorausgesetzt, daß die Schwere eine constante Kraft ist und daß die Bewegung, welche sie den Körpern ertheilt, eine gleichförmig beschleunigte ist. Obgleich diese Voraussetzung sich für Höhen, welche wir erreichen können, nicht merklich von der Wahrheit entfernt; so ist sie doch nicht in aller Strenge genau; denn Newton hat zuerst gezeigt, daß sich die Intensität der Schwere im umgekehrten Verhältnisse des Quadrates der Entfernungen vom Mittelpuncte der Erde ändert, und wir wollen nun die Formeln abzuleiten suchen, welche man nach diesem Gesetze zur Auflösung der Aufgaben über den Fall der Körper anwenden müßte.

Es sei A (Fig. 122) der Punct, von welchem der Körper ausgeht, und wir wollen die Entfernung AC dieses Punctes vom Mittelpuncte der Erde, deren Halbmesser $CB = r$ sei, mit a bezeichnen. Am Ende der Zeit t hat der Körper die Höhe $AD = x$ durchfallen unter der Wirkung der beschleunigenden Kraft φ, deren Intensität sich zu der Intensität g der Schwere an der Erdoberfläche oder am Niveau des Meeres umgekehrt wie die Quadrate der Entfernungen $a - x$ und r der Puncte D und B vom Mittelpuncte C der Erde verhalten, so daß man hat:

$$\frac{\varphi}{g} = \frac{r^2}{(a-x)^2},\ \varphi = \frac{gr^2}{(a-x)^2}.$$

Setzt man für die beschleunigende Kraft φ ihren Werth $\frac{dv}{dt}$; so verwandelt sich diese Gleichung in:

$$dv = \frac{gr^2 dt}{(a-x)^2},$$

und wenn man für dt seinen aus der Gleichung $v = \frac{dx}{dt}$ genommenen Werth subſtituirt, ſo kommt:

$$v dv = gr^2 \frac{dx}{(a-x)^2},$$

und wenn man endlich integrirt, ſo erhält man:

$$\tfrac{1}{2} v^2 = \frac{gr^2}{a-x} + C.$$

Die Conſtante C wird beſtimmt, wenn man bemerkt, daß im Anfange der Bewegung $v = o$, $x = o$, folglich:

$$o = \frac{gr^2}{a} + C, \quad C = -\frac{gr^2}{a}$$

iſt, und das vollſtändige Integral wird:

$$v^2 = \frac{2gr^2}{a-x} - \frac{2gr^2}{a} = \frac{2gr^2 x}{a(a-x)}.$$

§. 216. Wenn der Körper bis zur Erdoberfläche oder bis zum Niveau des Meeres herabgefallen iſt, ſo iſt $a - x = r$ und die erlangte Geſchwindigkeit:

$$v = \sqrt{\frac{r}{a} 2gx}.$$

Wenn die Schwere als eine conſtante Kraft betrachtet wird, ſo wird dieſe Geſchwindigkeit durch die Formel $v = \sqrt{2gx}$ ausgedrückt (§. 193), und die erſte dieſer Formeln gäbe für die Geſchwindigkeit v einen kleinern Werth, als die zweite; aber der Unterſchied iſt ſo klein, daß derſelbe bei allen gewöhnlichen Anwendungen unberückſichtigt bleiben kann.

Um die Relation zwiſchen der Zeit und dem durchlaufenen Raume zu erhalten, wollen wir für die Geſchwindigkeit v ihren Werth $\frac{dx}{dt}$ ſetzen, ſo verwandelt ſich die Gleichung in:

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2gr^2 x}{a(a-x)}}, \quad \left(\frac{2g}{a}\right)^{\frac{1}{2}} r dt = \left(\frac{a-x}{x}\right)^{\frac{1}{2}} dx,$$

und wenn man den zweiten Theil mit $\left(\frac{a-x}{a-x}\right)^{\frac{1}{2}}$ multiplicirt, ſo wird ſie:

$$\left(\frac{2g}{a}\right)^{\frac{1}{2}} r dt = \frac{(a-x)\,dx}{\sqrt{ax - x^2}} = \frac{(\frac{1}{2}a - x)\,dx}{\sqrt{ax - x^2}} + \frac{\frac{1}{2} a dx}{\sqrt{ax - x^2}}.$$

Integrirt man, ſo erhält man:

$$\left(\frac{2g}{a}\right)^{\frac{1}{2}} rt = \sqrt{ax - x^2} + \tfrac{1}{2} a \int \frac{dx}{\sqrt{ax - x^2}}.$$

Die Größe, welche noch zu integriren bleibt, kann auf die Form des Differentiales eines Kreisbogens zurückgeführt werden; denn setzt man $x = {}^1/_2 a - z$, so verwandelt sich diese Größe in folgende:

$$\frac{dx}{\sqrt{ax - x^2}} = \frac{-dz}{\sqrt{\left(1 - \frac{z^2}{\frac{1}{4}a^2}\right)\frac{1}{4}a^2}},$$

deren Integral ist:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax - x^2}} = \int \frac{-\frac{2}{a}dz}{\sqrt{1 - \left(\frac{2z}{a}\right)^2}} = arc.\left(cos. = \frac{2z}{a}\right),$$

und wenn man dieses Integral, nachdem man für z seinen Werth ${}^1/_2 a - x$ gesetzt hat, in die letzte Gleichung substituirt; so wird die Relation zwischen der Zeit und dem durchlaufenen Raume durch folgende Gleichung ausgedrückt:

$$\left(\frac{2g}{a}\right)^{\frac{1}{2}} rt = \sqrt{ax - x^2} + {}^1/_2 a.\, arc.\left(cos. = \frac{a - 2x}{a}\right),$$

wo keine Constante hinzugefügt zu werden braucht, weil zu gleicher Zeit $t = o$ und $x = o$ ist.

Das eben gefundene Integral kann durch folgende Construction geometrisch ausgedrückt werden. Wenn man aus dem Puncte O, die Mitte von AC, mit dem Halbmesser OA einen Halbkreis AMC beschreibt, und die Ordinate DM zieht, so hat man:

$$DM = \sqrt{AD \times DC} = \sqrt{x(a - x)}.$$

Die Größe $arc.\left(cos. = \frac{\frac{1}{2}a - x}{\frac{1}{2}a}\right)$ ist der Bogen α des Kreises, dessen Halbmesser $= 1$ ist, und das Product dieses Bogens und des Halbmessers ${}^1/_2 a$ drückt die Größe oder Länge des Bogens AM aus, so daß man hat:

$$\left(\frac{2g}{a}\right)^{\frac{1}{2}} rt = DM + arc.\, AM.$$

Die allgemeine Formel kann so transformirt werden, daß sich daraus die wieder ableiten läßt, welche wir erhalten haben, indem wir die Schwere als eine constante Kraft betrachteten.

Es ist:

$$arc.\left(cos. = \frac{a - 2x}{a}\right) = arc.\left[sin. = \sqrt{1 - \left(\frac{a - 2x}{a}\right)^2}\right]$$

$$= arc.\left(sin. = \frac{2\sqrt{ax - x^2}}{a}\right),$$

und wenn man den Sinus für den Cosinus in die allgemeine Gleichung substituirt, so verwandelt sie sich in folgende:

$$\left(\frac{2g}{a}\right)^{\frac{1}{2}} rt = \sqrt{ax - x^2} + {}^1/_2\, a.\, arc.\left(sin. = \frac{2\sqrt{ax - x^2}}{a}\right).$$

Wenn der Sinus sehr klein ist, so kann man denselben statt des Bogens nehmen, und alsdann ist das erste Glied des zweiten Theiles dem zweiten Gliede gleich. Wenn man im ersten Theile der vorhergehenden Gleichung r für a und $a - x = r$ setzt, so verwandelt sie sich in:

$$\sqrt{2gr} \times t = 2\sqrt{rx},\ 2gt^2 = 4x,$$

woraus folgt: $$x = {}^1/_2 gt^2,$$

welche Formel die zwischen dem Raume und der Zeit bei der gleichförmig beschleunigten Bewegung stattfindende Relation ausdrückt.

Viertes Kapitel.

Allgemeines Princip der Bewegung oder D'Alembert'sches Princip, vermittelst dessen die Aufgaben der Dynamik auf statische Aufgaben zurückgeführt werden.

§. 217. Bei unsern bisherigen Untersuchungen in Beziehung auf die Bestimmung der Bewegung, welche gegebene Kräfte beliebigen Körpern ertheilen können, haben wir bloß einzelne Körper betrachtet, welche wir uns sogar als auf ihren Schwerpunct reducirt und als bloße materielle Puncte bildend vorstellen konnten. Die Regeln, welche wir angewandt haben, werden aber unzureichend, wenn die Bewegung durch Kräfte hervorgebracht wird, welche auf verschiedene Puncte eines festen Körpers oder auf verschiedene Körper eines Systemes wirken, weil diese Puncte oder Körper durch vollkommen starre und unbiegsame Stangen oder durch unausdehnbare Seile mit einander verbunden sind, so daß die jedem Theile ertheilte Geschwindigkeit, welche er haben würde, wenn er von dem Körper oder Systeme, wozu er gehört, abgesondert wäre, in Folge seines Zusammenhanges mit den übrigen Theilen geändert wird.

Die Regeln, welche auf den eben angedeuteten Fall anwendbar sind, ergeben sich aus einem allgemeinen Principe der Bewegung, welches wir an einigen Beispielen sogleich erläutern wollen, und welches unter dem Namen des D'Alembert'schen Principes bekannt ist. D'Alembert hat dieses Princip zur Grundlage seiner zuerst im Jahre 1743 erschienenen Dynamik gemacht und sich desselben zur Auflösung mehrerer Aufgaben bedient, welche die geschicktesten Mathematiker nicht zu lösen vermochten.

Wenn ein Körper, oder ein System von Körpern durch Kräfte in Bewegung gesetzt wird, die auf jeden Theil desselben wirken, so ist die jedem Theile ertheilte Geschwindigkeit, und welche er haben würde, wenn er frei wäre, die Resultante aus der Geschwindigkeit dieses

Theiles in der Bewegung des Systemes und aus der Geschwindigkeit, welche durch den Widerstand der übrigen Theile aufgehoben wird.

Es sei *A* (Fig. 123) einer der Körper des Systemes, *m* seine Masse und *v* die Geschwindigkeit, welche ihm die auf ihn wirkende Kraft mittheilen würde, wenn er frei wäre. Ferner bezeichne *u* die Geschwindigkeit, welche der Körper *A* wegen seines Zusammenhanges mit den übrigen Theilen des Systemes verliert und *r* die Geschwindigkeit, welche er behält; so hat die auf diesen Körper wirkende Kraft die Quantität der Bewegung *mv*, welche wir durch die gerade Linie *AP* darstellen wollen, zum Maaße. Diese Größe der Bewegung wollen wir nach dem Parallelogramm der Kräfte in zwei andere zerlegen, wovon die eine *mu*, welche durch die gerade Linie *AN* dargestellt wird, die verlorne Kraft ist und die stattfindende Wirkung wird durch die noch übrige Kraft oder Quantität der Bewegung *mr*, welche durch die gerade Linie *AM* dargestellt wird, hervorgebracht.

Es seien *m'*, *m''*, *etc.* die Massen der übrigen Körper des Systemes, *v'*, *v''*, *etc.* die diesen Körpern ertheilten Geschwindigkeiten, *u'*, *u''*, *etc.* ihre Geschwindigkeitsverluste wegen ihres Zusammenhangens mit den übrigen Theilen des Systemes und *r'*, *r''*, *etc.* die Geschwindigkeiten, welche sie behalten; so sind die mitgetheilten Quantitäten der Bewegung, oder die auf die Massen *m'*, *m''*, ... wirkenden Kräfte resp. *m'v'*, *m''v''*, *etc.*, die verlornen Kräfte *m'u'*, *m''u''*, *etc.* und die Componenten, durch welche das System in Bewegung gesetzt ist, sind die Kräfte *m'r'*, *m''r''*, *etc.*

Die verlornen Kräfte *mu*, *m'u'*, *m''u''*, *etc.* müssen so beschaffen sein, daß, wenn sie allein auf den Körper, oder auf das System wirkten, das Gleichgewicht stattfände; denn wenn diese Kräfte in der Bewegung des Systemes eine Veränderung hervorbrächten, so würde diese Bewegung nicht ausschließlich durch die übrigen Componenten hervorgebracht, was gegen die Voraussetzung ist.

§. 218. Das allgemeine Princip der Bewegung findet statt, von welcher Beschaffenheit die auf den Körper, oder auf das System von Körpern wirkenden Kräfte auch sein mögen, nämlich stetig wirkende, wie die Schwere, oder momentan wirkende, wie der Stoß.

Bei der Anwendung des eben angeführten Principes ist die erforderliche Zerlegung der Kräfte oder der Quantitäten der Bewegung oft beschwerlich und man vermeidet diese Zerlegung auf folgende Weise.

Die verlorne Quantität Bewegung oder die verlorne Kraft *mu*, welche durch die gerade Linie *AN* ausgedrückt wird, kann in zwei andere Kräfte zerlegt werden, indem man die gegebene Kraft *AP* für eine der Componenten nimmt und die andere Componente *AM'* ist die mit entgegengesetztem Zeichen genommene noch übrig bleibende Kraft *AM*. Man erhält also die verlorne Kraft oder Geschwindigkeit des Körpers *A*, wenn man von der diesem Körper ertheilten Geschwindigkeit, welche gegeben ist, die noch übrig bleibende Geschwindigkeit abzieht. Dieselben Schlüsse sind auf alle Kräfte anwendbar, welche auf das System wirken oder auf alle seinen verschiedenen Theilen ertheilten Geschwindigkeiten. Man kann daher das in Rede stehende allgemeine Bewegungsprincip folgendermaßen ausdrücken:

Wenn man von der Summe aller Kräfte oder aller den verschiedenen Theilen des Systemes ertheilten Geschwindigkeiten die Geschwindigkeit abzieht, mit welcher sich dieses System bewegt; so drückt der Unterschied die Summe der wegen des Zusammenhanges der Theile des Systemes verlornen oder absorbirten Geschwindigkeiten aus, was darauf hinaus läuft, zwischen den gegebenen Kräften und den in entgegengesetztem Sinne genommenen hervorgebrachten Bewegungen das Gleichgewicht herzustellen.

Dieser zweite Ausdruck des D'Alembert'schen Principes ist weniger direct, als der erste; aber er gewährt den Vortheil der leichtern Anwendung desselben, weil man die auf das System wirkenden Kräfte nicht zu zerlegen, sondern zwischen diesen Kräften und denen, welche ihre Wirkung hervorbringen, nur die Gleichung des Gleichgewichtes zu bilden braucht, wie wir an einigen Beispielen zeigen wollen.

Beispiel 1. — Die Bewegung zweier auf zwei gegeneinander gestellten schiefen Ebenen von derselben Höhe liegender Körper zu finden, wenn von der Reibung abstrahirt wird, und die beiden Körper durch einen unausdehnbaren Faden mit einander verbunden sind, welcher über eine an der gemeinschaftlichen Spitze der beiden schiefen Ebenen befindliche feste Rolle geht.

Es seien M und M' (Fig. 113) die beiden auf den schiefen Ebenen von derselben Höhe liegenden Körper, welche durch einen biegsamen und unausdehnbaren Faden mit einander verbunden sind, der über die feste Rolle E geht, und es kommt darauf an, die Geschwindigkeit dieser beiden Körper zu finden.

Wir wollen die Massen der Körper M, M' resp. mit m, m', die Längen CA, CA' der schiefen Ebenen mit l, l' und ihre gemeinschaftliche Höhe CB mit h bezeichnen.

Wenn die Intensität der Schwere durch g bezeichnet wird, so drückt $\frac{gh}{l}$ ihre Componente oder die beschleunigende Kraft auf der schiefen Ebene CA und $\frac{gh}{l'}$ die beschleunigende Kraft auf der schiefen Ebene CA' aus (§. 195). Wenn die Geschwindigkeit der Masse m am Ende der Zeit t durch u und die der Masse m' durch u' ausgedrückt wird, so sind $u + du$ und $u' + du'$ nach Verlauf der Zeit $t + dt$ die Geschwindigkeiten, welche die Körper behalten. Die den Massen m, m' auf den schiefen Ebenen CA, CA' während des Zeitelementes dt ertheilten Geschwindigkeiten waren resp. $\frac{gh}{l}\,dt$, $\frac{gh}{l'}\,dt$, wenn die Körper frei wären, und folglich werden die nach Verlauf der Zeit $t + dt$ den Körpern ertheilten Geschwindigkeiten ausgedrückt durch:

$$u + \frac{gh}{l}\,dt,\quad u' + \frac{gh}{l'}\,dt.$$

Wenn man von der jedem Körper ertheilten Geschwindigkeit die ihm bleibende Geschwindigkeit abzieht, so drücken die Differenzen:

$$\frac{gh}{l}\,dt - du,\ \frac{gh}{l'}\,dt - du'$$

die verlornen Geschwindigkeiten aus.

Die diesen letzten Geschwindigkeiten entsprechenden Quantitäten der Bewegung müssen einander nach dem D'Alembert'schen Principe das Gleichgewicht halten, und da sie nach entgegengesetztem Sinne wirken, weil, wenn der eine Körper herabsinkt, der andere aufsteigt, so müssen sie einander gleich sein, so daß man folgende Gleichung hat:

$$m\left(\frac{gh}{l}\,dt - du\right) = m'\left(\frac{gh}{l'}\,dt - du'\right).$$

Die Geschwindigkeiten u und u' sind einander gleich und von entgegengesetztem Zeichen, folglich ist $du' = -du$, und wenn man diesen Werth von du' in die vorhergehende Gleichung substituirt, so erhält man:

$$m\left(\frac{gh}{l}\,dt - du\right) = m'\left(\frac{gh}{l'}\,dt + du\right),$$

woraus folgt:
$$du = \frac{(ml' - m'l)\,h}{(m + m')\,ll'} \cdot g\,dt,$$

und wenn man integrirt:

$$u = \frac{(ml' - m'l)\,h}{(m + m')\,ll'}\,gt.$$

Wir fügen keine Constante hinzu, weil wir annehmen, daß die Bewegung angefangen hat, als $t = o$ war, d. h. daß keine anfängliche Geschwindigkeit stattgefunden hat.

Dieser Ausdruck der Geschwindigkeit zeigt, daß die Bewegung eine gleichförmig beschleunigte ist, aber weniger schnell, als der verticale Fall eines Körpers im leeren Raume, weil der Factor $\frac{(ml' - m'l)\,h}{(m + m')\,ll'}$ ein echter Bruch ist.

Beispiel 2. — Die Gesetze der Bewegung zu finden, die zwei Körper unter der Wirkung der Schwere annehmen, welche an den beiden Enden eines über eine feste Rolle gehenden vollkommen biegsamen und unausdehnbaren Seiles oder Fadens aufgehangen sind.

Es seien P, P' die beiden an den beiden Enden des über die Rolle BED (Fig. 124) gehenden Seiles oder Fadens aufgehangenen Körper, m, m' seien resp. die Massen dieser Körper und u, u' die während der Zeit t erlangten Geschwindigkeiten derselben; so werden diese Geschwindigkeiten am Ende der Zeit $t + dt$ resp. durch $u + du$, $u' + du'$ ausgedrückt. Nimmt man an, daß die beiden Körper der Wirkung der Schwere überlassen sind, so ertheilt sie jedem derselben während des Zeitelementes dt die Geschwindigkeit gdt und am Ende der Zeit $t + dt$ werden die Geschwindigkeiten dieser Körper ausgedrückt durch:

$$u + gdt,\ u' + gdt.$$

Zieht man hiervon die wirklichen Geschwindigkeiten $u + du$, $u' + du'$ ab und bemerkt, daß nach der Einrichtung des Systemes die

Geschwindigkeiten u, u' einander gleich und von entgegengesetztem Zeichen sind; so bleibt:

$$gdt - du,\ gdt + du.$$

Diese Reste sind die verlornen Geschwindigkeiten, und die correspondirenden Quantitäten der Bewegung, welche diesen Geschwindigkeiten proportional sind, oder die verlornen Kräfte müssen einander nach dem D'Alembert'schen Principe das Gleichgewicht halten. Außerdem sind diese beiden Kräfte einander entgegengesetzt; denn wenn der eine Körper sinkt, so muß der andere steigen; beide Kräfte sind also einander gleich und man hat die Gleichung:

$$m(gdt - du) = m'(gdt + du),$$

woraus folgt:
$$du = \frac{m - m'}{m + m'} \cdot gdt,$$

und wenn man integrirt und annimmt, daß zugleich $t = o$, $v = o$ ist; so erhält man:
$$u = \frac{m - m'}{m + m'} \cdot gt.$$

Diese Formel ließe sich aus der bei der Auflösung der vorhergehenden Aufgabe erhaltenen ableiten; denn wenn man annimmt, daß die schiefen Ebenen vertical werden, indem sie sich um ihre gemeinschaftliche Spitze drehen, so werden ihre Längen ihrer Höhe gleich, d. h. es ist $l = l' = h$ und die Formel für die Geschwindigkeit des Falles auf den beiden gegeneinander gestellten schiefen Ebenen reducirt sich auf die eben gefundene Formel für den verticalen Fall zweier an den Enden eines über eine feste Rolle gehenden Seiles aufgehangenen Körper.

§. 219. Wenn man zur Bestimmung des durchlaufenen Raumes die Formel $u = \frac{dx}{dt}$ mit der vorhergehenden verbindet, so erhält man:

$$dx = \frac{m - m'}{m + m'} gtdt,$$

und wenn man integrirt:

$$x = \frac{m - m'}{m + m'} \cdot \frac{gt^2}{2}.$$

Wir fügen keine Constante hinzu, weil wir annehmen, daß der fallende Körper von dem Puncte ausgeht, welcher zum Anfangspuncte der Räume genommen wird, wenn man die Zeit anfängt zu zählen. Substituirt man in diese letzte Formel den aus der ersten genommenen Werth von t, so kommt:

$$u^2 = \frac{m - m'}{m + m'} \cdot 2gx,$$

und wenn ein Körper von der Höhe x frei herabgefallen ist, so wird das Quadrat seiner Geschwindigkeit ausgedrückt durch:

$$v^2 = 2gx,$$

und wenn man endlich die erste dieser Gleichungen durch die zweite dividirt, so erhält man:

$$\frac{u^2}{v^2} = \frac{m - m'}{m + m'}, \quad mu^2 + m'u^2 = mv^2 - m'v^2,$$

d. h. die Summe der Producte, welche man erhält, wenn man die Massen zweier Körper des Systemes resp. durch das Quadrat ihrer Geschwindigkeit multiplicirt, ist gleich der Differenz der Producte, welche man erhält, wenn man die Massen dieser Körper resp. durch die Quadrate der Geschwindigkeit multiplicirt, welche sie erlangt haben würden, wenn sie von derselben Höhe frei herabgefallen wären.

Das Product aus der Masse eines Körpers und dem Quadrate seiner Geschwindigkeit wird die lebendige Kraft desselben genannt (§. 206), und folglich zeigt die eben gefundene Formel, daß die Summe der lebendigen Kräfte des Systemes der Differenz der lebendigen Kräfte gleich ist, welche die Schwere bei dem freien Falle der Massen dieses Systemes erzeugen würde.

Wenn die Massen m, m' einander gleich wären, so wäre die Summe ihrer lebendigen Kräfte gleich Null, weil sie im Gleichgewichte blieben.

§. 220. Die Vorrichtungen in den beiden eben gelösten Aufgaben geben das Mittel an die Hand, die durch die Schwere hervorgebrachte Bewegung beliebig zu verzögern, ohne ihre Natur zu verändern. Im Vorhergehenden haben wir gesehen, wie sich Galiläi der schiefen Ebene zu demselben Zwecke und zur Nachweisung der Gesetze des Falles schwerer Körper durch das Experiment bedient hat. Diese Gesetze bilden die Grundlage der Dynamik und die Physiker haben sie durch Versuche zu versinnlichen gesucht, was für Anfänger immer sehr wünschenswerth ist; denn selbst der berühmte Lagrange sagt in dieser Beziehung: „Man sieht immer gern das realisirt, was durch die Rechnung bewiesen ist."

Statt der Galiläi'schen geneigten Ebene wendet man jetzt die sogenannte Atwood'sche Maschine zur Verzögerung der Bewegung fallender Körper an, deren Haupttheile wir zunächst kurz beschreiben wollen und dann wollen wir die Formeln der letzten Aufgabe, welche die Theorie dieser Maschine enthalten, auf einige Versuche anwenden.

§. 221. Die Maschine, welche wir hier beschreiben wollen, ist nach der Atwood'schen construirt und mit Erfolg zu denselben Versuchen angewandt; um sie aber billiger herstellen zu können, sind ihre Bestandtheile aus einem weniger kostbaren Holze verfertigt, ihre Formen sind weniger elegant und die Verzierungen, so wie in dem Mechanismus verschiedene Nebenstücke, wovon weiter unten die Rede sein wird, hinweg gelassen.

Diese Maschine, wovon Figur 125 eine Projection nach dem Maaßstabe von $^1/_8$ darstellt, besteht aus einer messingenen Rolle A, welche sich in einem Biegel von demselben Metalle befindet, der mit einer Schraube auf einer hölzernen Tafel befestigt ist. Die Welle der Rolle besteht aus Stahl und ihre beiden kegelförmigen Zapfen liegen in den Pfeilern des Biegels oder Rahmens so, daß die möglichst kleinste Reibung stattfindet. Dieser einfache Apparat wird an die

Spitze einer Säule gebracht, welche auf einer viereckigen Platte ruhet, durch deren vier Ecken vier hölzerne Schrauben gehen, welche dazu dienen, den Fuß fest und horizontal zu stellen, damit die Säule vertical steht. Auf dieser Fußplatte ist parallel zu der Säule ein hölzerner Stab *HI* von einem rechteckigen oder quadratischen Querschnitte errichtet und an der Seite der obern Platte der Säule befestigt, welcher eine Länge von ungefahr $1^m,9$ hat und auf der zu der Rolle parallelen Fläche desselben befindet sich eine in Centimeter und Millimeter eingetheilte Scale.

Die Stücke *K* und *L* sind zwei Unterlagen mit hölzernen Handgriffen, welche man längs des Stabes *HI* verschieben und vermittelst einer Druckschraube bei einem beliebigen Theilstriche an dem Stabe befestigen kann. Diese Supporte sind zwei Messingplatten und in der Figur *l* ist der Grundriß des mit einem kreisförmigen Loche durchbrochenen Supportes *L* angegeben.

An der Säule befindet sich eine Secundenuhr *ST*, und eine Glocke, welche in der Zeichnung nicht angegeben ist, ist an dem Maaßstabe befestigt, deren Hammer von der Uhr in Bewegung gesetzt wird und Secunden schlägt. In den Schnurlauf der Rolle *A* läßt man einen sehr feinen seidenen Faden *BAC* gehen, dessen Länge ungefähr 2 Meter beträgt und welcher an jedem Ende mit einem Ringe versehen ist, in welchen man den Haken des senkrecht im Mittelpuncte einer messingenen Scheibe befestigten Stabes treten läßt und diese beiden messingenen Scheiben oder Schalen müssen wie die einer guten Wage einander gleich sein.

Die von Atwood angewandte Gewichtseinheit beträgt 7, 77 Gramm, welche er durch den Buchstaben *m* bezeichnet, und die Reihe von Gewichten, deren er sich bedient hat, sind $^1/_4\,m$, $^1/_2\,m$, m, $2\,m$ und $4\,m$ gewesen, und man muß eine hinreichende Anzahl von jedem dieser Gewichte haben, welche in ihrer Mitte mit einem Loche durchbrochen sind, damit man sie an den Stiel jeder Schale stecken kann, und außerdem muß man auch Gewichte haben, welche mit einem Einschnitte versehen sind, durch welchen der Faden gehen kann, wie die in den Figuren *i* und *k* abgebildeten, damit man sie noch hinzufügen kann, wenn die Schalen bereits an dem Faden befestigt sind.

§. 222. Die Formeln der letzten Aufgabe, nämlich:

$$u = \frac{m - m'}{m + m'} gt,\quad x = \frac{m - m'}{m + m'} \cdot \frac{gt^2}{2}$$

enthalten die Theorie der Atwood'schen Maschine, und man könnte sie anwenden, wenn man für die Buchstaben die durch die Versuche erhaltenen Zahlen substituirte; allein durch die folgenden Transformationen werden die Formeln einfacher und die Rechnungen leichter gemacht.

Bezeichnet *p* das kleinste Gewicht oder die kleinste Masse und *n* die Masse, welche man zu ihr hinzufügen muß, um sie der größten Masse gleich zu machen; so hat man:

$$\frac{m - m'}{m + m'} = \frac{p + n - p}{p + n + p} = \frac{n}{2p + n},$$

und die vorhergehenden Formeln verwandeln sich in:

$$u = \frac{n}{2p+n} . gt, x = \frac{n}{2p+n} \cdot \frac{gt^2}{2} .$$

Um die Richtigkeit dieser Formeln nachzuweisen, wollen wir die Gewichtseinheit $m = 8$ Gramm setzen, ferner annehmen, daß jede der Schalen mit ihrem Stiele $20\,m$ wiegt und daß jede dieser Schalen mit einem Gewichte von $19\,^1/_2\,m$ belastet ist, so daß die Gesammtbelastung $39\,^1/_2\,m \times 2 = 79\,m$ beträgt. Da der Faden sehr fein ist, so kann sein Gewicht unberücksichtigt bleiben und die an seinen Enden befestigten Schalen sind in allen Lagen im Gleichgewichte.

Wenn die untere Fläche der Schale C in die Horizontalebene gebracht ist, welche durch den Nullpunct der Scale geht und man legt auf das in dieser Schale befindliche Gewicht das Gewicht $i = m$, so wird das Gleichgewicht gestört und die Schale C bewegt sich mit einer gleichförmig beschleunigten Bewegung bis zu dem Puncte der Scale, wo das Support K befestigt ist.

Wenn man die gegebenen Zahlen für die Buchstaben substituirt, so verwandelt sich die zweite Formel in:

$$x = \frac{1}{80} \frac{gt^2}{2} .$$

Die Wirkung der Schwere auf das Zusatzgewicht m vertheilt sich gleichförmig auf die ganze bewegte Masse, so daß sie nur $^1/_{80}$ ihrer Intensität bei dem freien Falle eines Körpers beträgt und bei dieser Verzögerung der Bewegung kann man auf der Scale den Raum beobachten, welchen die Schale C während jeder Secunde durchläuft. Wenn man successive $t = 1''$, $t = 2''$, $t = 3''$, *etc.* und $g = 9^m.81$ setzt, so nehmen die Werthe von x oder die durchlaufenen Räume wie die Quadrate der Zeiten 1, 4, 9, *etc.* zu und man hat:

$$x = \frac{9,81}{160} \times 1 = 0^m,061,$$
$$x = 0,061 \times 4 = 0,244,$$
$$x = 0,061 \times 9 = 0,549,$$
$$x = 0,061 \times 16 = 0,976,$$
$$x = 0,061 \times 25 = 1,525.$$

Löst man die Gleichung in Beziehung auf t auf und nimmt den Werth von $x = 1^m,80$, so findet man:

$$t = \sqrt{\frac{160 \times 1,80}{9,81}}$$

	$^1/_2\,log.\,160$	$= 1,1020600$
	$^1/_2\,log.\,1,80$	$= 0,1276321$
dec. Erg.	$^1/_2\,log.\,9,81$	$= 9,5041655$
	$log.\,t$	$= 10,7338576,$

also: $t = 5,4182;$

d. h. die Schale C braucht fast $5\,^1/_2$ Secunde, um auf das Support K herabzufallen.

Die von der Schale C durchlaufenen Räume sind etwas kleiner, als die eben durch Rechnung gefundenen, weil die Wirkung der Schwere auf die Zusatzmasse m nicht ganz auf die Gesammtbelastung der Schalen vertheilt wird; denn ein kleiner Theil davon wird durch die Reibung und durch die Trägheit der Rolle absorbirt.

§. 223. Um die erste Formel zu prüfen, welche die nach Verlauf von t Secunden erlangte Geschwindigkeit ausdrückt, wollen wir zunächst für die Buchstaben die vorhin angewandten Zahlen setzen, so verwandelt sich diese Formel in:

$$v = {}^1/_{80} \times 9{,}81\, t = 0{,}122\, t.$$

Setzt man $t = 1''$, so hat man $v = 0^m{,}122$ und diese Geschwindigkeit drückt den doppelten Raum aus, welchen die Schale in der ersten Secunde vermöge der Wirkung der Schwere durchläuft. Wenn man $t = 2$ Secunden setzt, so durchläuft die Schale mit der erlangten Geschwindigkeit während der beiden folgenden Secunden mit dieser gleichförmigen Geschwindigkeit einen doppelt so großen Raum, als unter der Wirkung der Schwere während der beiden ersten Secunden, u. s. f.

Es braucht nur ein einziger Versuch erläutert zu werden, um die Art und Weise einzusehen, wie man sich der Atwood'schen Maschine bedienen muß, um diese Resultate zu erhalten.

Nach den vorhergehenden Versuchen durchläuft die Schale C in $2''$ einen Raum $= 0^m{,}244$. Wir wollen das Support L bei diesem Theilstriche der Scale befestigen und statt des Zusatzgewichtes i das Gewicht k hinzusetzen, welches nur eine andere Form hat. Nach $2''$ geht die Schale durch das Support, worauf das Gewicht k liegen bleibt, weil es eine größere Länge hat, als der Durchmesser der Oeffnung in dem Supporte. Die Bewegung wird alsdann gleichförmig und man beobachtet, daß die Schale in den beiden folgenden Secunden einen Raum von 48,8 Centimeter oder 488 Millimeter durchläuft.

Die beiden Formeln, welche die Grundgesetze der gleichförmig beschleunigten Bewegung enthalten, sind durch die eben angeführten Versuche bestätigt und die Atwood'sche Maschine gibt einfache und leichte Mittel zur Anstellung dieser Versuche an die Hand. Vermittelst dieser Maschine kann man auch die Gesetze der gleichförmig verzögerten Bewegung verificiren und sich derselben zugleich bei andern Versuchen mit Vortheil bedienen.

§. 224. Die eben betrachtete Atwood'sche Maschine ist in den Werkstätten der Herren Pixii construirt und kostet 240 Franken, d. h. ungefähr ${}^2/_7$ des Preises einer Atwood'schen Maschine mit allem Zubehör. Die Säule und die Platte, welche die Basis bildet, sind aus gutem Mahagoniholze sorgfältig gearbeitet und besonders durch den an dem Kapitäl der Säule angebrachten Mechanismus unterscheidet sich diese Maschine von der vorhin beschriebenen. Zur Vermeidung der Reibung der Zapfen der Welle der Rolle in den Löchern der Pfeiler ihres Rahmes oder Biegels sind parallel zu der Rolle 2 Paare Frictionsrollen angebracht, auf welchen sich die Welle der Rolle dreht. Die zur Zeitmessung dienende Uhr ist mit einem Räderwerke und mit einer Ankerhemmung versehen, welche in einem Gehäuse enthalten sind, dessen

Zifferblatt zu der Rolle parallel ist. Die Bewegung wird während ungefähr einer Stunde durch ein herabsinkendes Gewicht erhalten und die Secunden werden zu gleicher Zeit durch Schlagen und durch einen Zeiger auf dem Zifferblatte angegeben. Vermittelst eines Drückers, welcher durch das Pendel gelöst wird, wird die Schale mit dem Zusatzgewichte, welche sich am Nullpuncte der Scale befindet, in dem Augenblicke in Bewegung gesetzt, wo der Secundenzeiger auf dem Zifferblatte Null zeigt. Außer dem Supporte, welches die Schale auffängt und dem, welches sie mit ihrer ganzen Belastung hindurchgehen läßt, oder das Zusatzgewicht auffängt, wenn es größer ist, als der Durchmesser der Oeffnung der Platte des Supportes, kommt noch ein drittes Support vor, welches bei den Versuchen über die gleichförmig verzögerte Bewegung angewandt wird. Die Platte dieses dritten Supportes, welche der am weitesten von der Scale entfernten Schale entspricht, hat eine kreisrunde Oeffnung, durch welche die Schale hindurch gehen kann, und wenn man auf die Oeffnung dieses dritten Supportes ein Zusatzgewicht legt, so wird dasselbe durch die hindurch gehende Schale mit fortgenommen und die Bewegung, welche eine gleichförmig beschleunigte war, wird eine gleichförmig verzögerte. Uebrigens würde man auch die Gesetze der durch die Schwere hervorgebrachten Bewegung durch eine weit einfachere, nicht so kostspielige und nach demselben Principe construirte Maschine mit hinreichender Genauigkeit nachweisen können.

Fünftes Kapitel.

Vom Stoße der Körper.

§. 225. Die Gesetze der Mittheilung der Bewegung bei dem Stoße der Körper sind gegen die Mitte des 17. Jahrhunderts entdeckt und Descartes scheint der erste gewesen zu sein, welcher diese Gesetze erkannt und näher zu bestimmen gesucht hat; allein er wurde durch seine metaphysischen Begriffe über die Bewegung irre geführt, denn er glaubte, daß keine Verminderung in der Bewegung bei dem Stoße stattfinden könne Die wahren Gesetze der Mittheilung der Bewegung durch den Stoß verdankt man den Untersuchungen von Wallis, Wren und Huyghens und sind zuerst im Jahre 1669 in den **Philosophical transactions** der Londoner Societät bekannt gemacht. Mariotte, welcher sich unter den Physikern jener Zeit auszeichnete, hat sie durch viele Versuche geprüft, welche er in seinem **Traité de la percussion ou du choc des corps 1677** beschrieben hat.

Alle Körper haben gemeinschaftliche Eigenschaften, aber in verschiedenen Graden, und es gibt Körper, welche ihre Form nicht merklich verändern, wenn beträchtliche Druckkräfte auf sie wirken und welche man daher feste oder harte Körper nennt, wogegen andere Körper schon mäßigen Druckkräften nachgeben und die ihnen ertheilten Formen

beibehalten, weshalb man sie weiche Körper nennt. Diejenigen Körper, welche erst größern oder geringern Druckkräften nachgeben und dann ihre ursprünglichen Formen wieder annehmen, sobald diese Druckkräfte aufhören zu wirken, nennt man elastische Körper.

Die Klassification soll bloß zur Erleichterung der Gesetze der Bewegung dienen und ist allgemein angenommen, obgleich die Körper nicht in aller Strenge so beschaffen sind, wie man voraussetzt; denn die härtesten und weichesten Körper sind nicht ohne alle Elasticität und die am meisten elastischen Körper sind nicht vollkommen elastisch.

Eine Kraft, welche einem Körper eine gewisse Geschwindigkeit ertheilt, wird durch die Quantität der Bewegung dieses Körpers oder durch das Product aus seiner Masse und Geschwindigkeit gemessen (§. 203). Wenn zwei Kräfte f, f' den Massen m, m' resp. die Geschwindigkeiten v, v' ertheilen; so hat man $f = mv$, $f' = m'v'$, und wenn diese beiden Kräfte einander gleich sind, so hat man:

$$f = mv = m'v', \quad v = \frac{f}{m} = \frac{m'v'}{m},$$

d. h. wenn dieselbe Kraft successive auf zwei Körper wirkt, so verhalten sich die diesen Körpern ertheilten Geschwindigkeiten umgekehrt wie ihre Massen.

§. 226. Wenn sich zwei harte oder weiche Körper, deren Quantität der Bewegung $= mv = m'v'$ ist, auf der durch ihre Schwerpuncte gehenden geraden Linie nach entgegengesetztem Sinne bewegen und zusammenstoßen, so wird ihre Bewegung durch den Stoß aufgehoben. Dieser Fall des Gleichgewichtes, welches durch zwei in Bewegung befindliche Körper hervorgebracht wird, wenn die Wirkung des einen dieser Körper der Rückwirkung des andern gleich und direct entgegengesetzt ist, kommt in der Statik nicht vor.

Wenn die beiden Quantitäten der Bewegung einander nicht gleich wären, so würde durch den Stoß kein Gleichgewicht hervorgebracht; aber das Gesetz der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung würde immer stattfinden; die größte Quantität der Bewegung würde durch die Rück- oder Gegenwirkung der kleinsten vermindert und es bliebe nur ihr Unterschied übrig.

Stoß harter Körper.

§. 227. Wir wollen annehmen, daß die zusammenstoßenden Körper homogene Kugeln sind, deren Mittelpuncte sich nach derselben geraden Linie bewegen und deren andere Puncte Parallelen zu dieser geraden Linie beschreiben, ohne daß die Reibung, der Widerstand der Luft und die Schwere dieser Bewegung irgend hinderlich sein könnten. In der Wirklichkeit sind die Erscheinungen nicht mit den aus der Theorie abgeleiteten identisch; aber sie nähern sich denselben desto mehr, einen je kleinern Einfluß die eben angeführten Ursachen haben.

Wenn zwei harte Körper gegeneinander stoßen, so findet die Mittheilung der Bewegung vollständig statt, sobald der Stoß erfolgt, und man kann zwischen dem Anfange und dem Ende der Mittheilung der Bewegung kein Zeitintervall unterscheiden. Wenn zwei weiche Körper

zusammenstoßen, so erfolgt die Mittheilung der Bewegung allmählig, je mehr sich die Körper zusammendrücken und ist erst am Ende der gewöhnlich sehr kurzen Zeit vollständig, wo diese Zusammendrückung aufhört. Obgleich die Mittheilung der Bewegung bei dem Zusammenstoßen harter und weicher Körper verschieden ist, so ist doch das Gesetz der Bewegung nach dem Stoße dasselbe.

Zunächst wollen wir uns mit dem Stoße harter Körper beschäftigen und die Geschwindigkeit zu bestimmen suchen, welche zwei harte Körper nach dem Stoße haben müssen, wenn die Massen dieser Körper, so wie ihre Geschwindigkeiten vor dem Stoße gegeben sind.

Wir wollen zwei harte Kugeln c, c' betrachten, welche sich auf der durch ihre Mittelpuncte c, c' gehenden geraden Linie RS (Fig. 126) nach demselben Sinne bewegen und deren sämmtliche Puncte Parallelen zu dieser geraden Linie beschreiben. Die Kräfte f, f', welche diese Körper in Bewegung gesetzt haben, so wie ihre Massen m, m' und ihre Geschwindigkeiten v, v' sind gegeben, und wir wollen annehmen, daß der Körper c der stoßende sei, so muß seine Geschwindigkeit v größer sein, als die Geschwindigkeit v' des gestoßenen Körpers.

Wenn man die Quantitäten der Bewegung zusammenaddirt, so hat man:

$$f + f' = mv + m'v'.$$

Nach dem Stoße sind die beiden Körper mit einander in Berührung, ihre Bewegung ist dieselbe, als die eines einzigen Körpers, welcher ihrer Summe gleich ist, und wenn man ihre gemeinschaftliche Geschwindigkeit, welche die unbekannte Größe der Aufgabe ist, mit u bezeichnet; so hat man:

$$f + f' = (m + m')\,u.$$

Diese beiden Gleichungen geben:

$$(m + m')\,u = mv + m'v',\ u = \frac{mv + m'v'}{m + m'},$$

d. h. die Geschwindigkeit der beiden Körper nach dem Stoße ist gleich dem Quotienten aus der Summe ihrer Quantitäten der Bewegung vor dem Stoße und der Summe ihrer Massen.

§. 228. Das D'Alembert'sche Princip kann auf die eben aufgelöste Aufgabe unmittelbar angewandt werden; denn man sieht leicht ein, daß die Geschwindigkeit v des stoßenden Körpers in Folge des Stoßes einen Verlust $= v - u$ erfährt, und daß die Geschwindigkeit v' des gestoßenen Körpers einen Zuwachs $u - v'$ erhält, woraus folgt, daß die verlornen und gewonnenen Quantitäten Bewegung durch $m(v - u)$, $m'(u - v')$ ausgedrückt werden. Diese Quantitäten der Bewegung müssen aber nach dem D'Alembert'schen Principe einander das Gleichgewicht halten, so daß man die Gleichung hat:

$$m(v - u) - m'(u - v') = o,$$

und wenn man dieselbe in Beziehung auf die unbekannte Größe u auflöst, so erhält man die Formel:

$$u = \frac{mv + m'v'}{m + m'}$$

welche mit der vorhergehenden übereinstimmt.

§. 229. Wir wollen nun annehmen, daß sich die beiden Massen m, m' nach entgegengesetztem Sinne bewegen, nämlich die Masse m nach der Richtung RS und die Masse m' nach der entgegengesetzten Richtung SR. Wird die Geschwindigkeit nach dem Stoße wieder mit u bezeichnet, so erfährt die Geschwindigkeit v der Masse m denselben Verlust $v - u$, als im vorhergehenden Falle; aber die Geschwindigkeit von m', welche vor dem Stoße $-v'$ war, wächst um $v' + u$, und die Bedingung der Gleichheit zwischen den verlornen und den gewonnenen Quantitäten der Bewegung gibt die Gleichung:

$$m(v - u) - m'(v' + u) = o,$$

woraus folgt:

$$u = \frac{mv - m'v'}{m + m'},$$

d. h. bei dem directen Zusammenstoßen zweier harter Körper, welche sich nach entgegengesetztem Sinne bewegen, ist die Geschwindigkeit nach dem Stoße dem Quotienten aus der Differenz der Quantitäten der Bewegung vor dem Stoße und aus der Summe der Massen gleich.

Diese Formel ließe sich auch ohne Rechnung aus der vorhergehenden ableiten, wenn man die Geschwindigkeit v' mit dem negativen Zeichen nähme. Der Zähler $mv - m'v'$ in der letzten Formel kann Null, positiv oder negativ sein, und diese Werthe entsprechen der nach dem Stoße stattfindenden Bewegung.

§. 230. Vermittelst der vorhergehenden Formeln kann man leicht die von dem stoßenden Körper verlorne und die von dem gestoßenen Körper gewonnene Geschwindigkeit finden. Wenn sich die beiden Körper nach derselben Richtung bewegen, so hat man:

$$v - u = v - \frac{mv + m'v'}{m + m'} = \frac{m'(v - v')}{m + m'},$$

$$u - v' = \frac{mv + m'v'}{m + m'} - v' = \frac{m(v - v')}{m + m'},$$

woraus erhellet, daß die verlornen und gewonnenen Geschwindigkeiten der zusammenstoßenden Körper im umgekehrten Verhältnisse der Massen stehen.

Wenn der zweite Körper in Ruhe ist, so ist $v' = o$ und die Geschwindigkeit nach dem Stoße wird ausgedrückt durch:

$$u = \frac{mv}{m + m'},$$

d. h. sie ist gleich dem Quotienten aus der Quantität der Bewegung des stoßenden Körpers vor dem Stoße und aus der Summe der Massen beider Körper.

Der ruhende Körper von der Masse m' widersteht vermöge seiner Trägheit dem Impulse, welchen er von dem stoßenden Körper erhält

und die Geschwindigkeit beider Körper nach dem Stoße ist kleiner als die des stoßenden Körpers vor dem Stoße, wie aus der bloßen Betrachtung der Formel erhellet.

Wenn die beiden Körper gleiche Massen hätten, so wäre $u = {}^1/_2 v$, d. h. die Geschwindigkeit nach dem Stoße wäre halb so groß, als die des stoßenden Körpers vor dem Stoße.

Wenn die Masse m gegen m' sehr groß ist, so wird diese letztere durch den Stoß der erstern mit einer Geschwindigkeit fortbewegt, welche der Geschwindigkeit der ersten Masse vor dem Stoße fast gleich ist.

Untersuchen wir nun, wie die Geschwindigkeit nach dem Stoße beschaffen ist, wenn die Masse m' des ruhenden Körpers gegen die Masse m des stoßenden Körpers sehr groß ist. Der Coefficient dieser Geschwindigkeit oder der Bruch $\frac{m}{m+m'}$ kann, wenn man Zähler und Nenner durch m dividirt, auf die Form $\frac{1}{1+\frac{m'}{m}}$ gebracht werden, woraus erhellet, daß dieser Bruch desto kleiner wird, je größer m' wird, d. h. die Masse m' kann so groß werden, daß die Geschwindigkeit nach dem Stoße beliebig klein wird, wie man auch bei vielen häufig vorkommenden Erscheinungen beobachten kann. Wenn z. B. Körper nach der verticalen Richtung auf die Erde fallen, so ertheilen sie ihr keine merkliche Geschwindigkeit, weil bie Masse der Erde gegen die Masse der auf sie fallenden Körper als unendlich groß betrachtet werden kann.

§. 231. Bei den eben über den Stoß der Körper bewiesenen Sätzen haben wir vorausgesetzt, daß diese Körper homogene und unelastische, d. h. vollkommen harte oder weiche Kugeln sind, welche sich nach der durch ihre Mittelpuncte gehenden geraden Linie bewegen und daß keine Verzögerung der Bewegung wegen der Wirkung der Schwere des Widerstandes der Luft und der Reibung stattfindet. Diese Bedingungen können nicht in aller Strenge realisirt werden; aber es ist auch hinreichend, sich denselben soweit zu nähern, daß die aus der Theorie abgeleiteten Gesetze der Mittheilung der Bewegung durch die Erfahrung bestätigt werden, und hierzu ist Mariotte auf folgende Weise gelangt.

Mariotte hat eine Maschine erfunden, deren Grundprincip von den Physikern allgemein angenommen ist. Sie besteht aus einem gleichschenkligen Dreiecke, welches man an einer Wand oder auf einer aus Brettern verfertigten dreiseitigen Tafel zeichnen kann, damit man es an den Beobachtungsort transportiren kann. Die Höhe dieses Dreieckes beträgt 5 bis 6 Fuß, in der Nähe der Spitze zieht man in der Ebene dieses Dreieckes eine gerade Linie parallel zu seiner Grundlinie, nimmt auf dieser geraden Linie zwei Puncte, wovon jeder von der Halbirungslinie des Winkels an der Spitze des Dreieckes um 1 Zoll entfernt ist und steckt in jedem dieser Puncte einen Stift von ungefähr 3 Zoll Länge senkrecht auf die Ebene des Dreieckes ein, um daran die Fäden zu befestigen, woran die beiden zu dem Versuche eingerichteten

Kugeln aufgehangen werden sollen, welche einander berühren müssen, aber ohne einen Druck auf einander auszuüben.

Die Fäden, woran die Kugeln aufgehangen sind, sind einander gleich und jeder hat von dem Aufhängungspuncte bis zu dem Haken der Kugel eine Länge von 4 oder 5 Fuß, und mit jedem dieser Fäden als Halbmesser werden in der Ebene des Dreieckes Kreisbogen beschrieben, welche in Grade eingetheilt sind.

Die Kugeln werden aus angefeuchtetem Thone verfertigt, in deren Mittelpunct ein kleines Stück Korkholz gebracht wird, in welches man einen Messingdraht steckt, dessen beide Enden nach zwei auf einander senkrechten Halbmessern gerichtet sind. Das eine Ende dieses Drahtes ist hakenförmig umgebogen, um daran die Kugel vermittelst des Fadens aufhängen zu können und der andere äußere Theil bildet einen kleinen Stiel, welcher dazu dient, die Kugel an den Grad des Bogens zu bringen, von welchem man sie ausgehen lassen will. Die Kugeln bewegen sich also nicht nach der durch ihre Mittelpuncte gehenden geraden Linie, sondern man läßt sie kleine Kreisbogen durchlaufen, welches ein einfaches und leichtes Mittel an die Hand gibt, sie in Bewegung zu setzen und die Gesetze der Mittheilung der Bewegung beobachten zu können. Wenn die durchlaufenen Bogen klein sind und z. B. nur 12 bis 15 Grad betragen, so sind die während ihres Beschreibens erlangten Geschwindigkeiten nahezu diesen Bogen selbst proportional, so daß man bloß die Grade der Bogen zu zählen braucht, um die Geschwindigkeiten der Kugeln unmittelbar vor und nach dem Stoße kennen zu lernen, was wir später noch näher erläutern werden, wenn wir uns mit der schwingenden Bewegung beschäftigen.

Die mit der Mariotteschen Maschine angestellten Versuche bestätigen die aus den vorhergehenden Formeln abgeleiteten Regeln, und man findet bei diesen Versuchen, daß die stoßende Kugel etwas kleinere Bogen beschreibt, als die von der Rechnung angegebenen; aber der Unterschied ist sehr gering. Diese genäherten Resultate für alle Fälle des Stoßes weicher Körper, welche für harte Körper dieselben sein würden, lassen keinen Zweifel über die Richtigkeit der obigen Gesetze der Mittheilung der Bewegung bei dem Stoße dieser Körper übrig.

§. 232. Unter der Percussionskraft (Stoßkraft) versteht man den Eindruck, welchen ein Körper vermöge seines Stoßes auf einen andern macht, und es gibt keine Kraft, welche so häufig angewandt wird, als diese; denn durch sie wird ein Körper in mehrere Theile getheilt, durch sie wird das Eisen und die andern Metalle bearbeitet, indem sie geschlagen werden, wodurch sie eine größere Dichtigkeit bekommen und Formen, welche sie zur Verfertigung einer Menge von Instrumenten, Maschinen und Werkzeugen, welche die Industrie liefert, mehr geeignet machen.

Es gibt noch eine andere Kraft, welche mit der Percussionskraft viele Aehnlichkeit hat und in mehreren Fällen statt derselben mit Vortheil angewandt wird, nämlich die Druckkraft, welche in den Eisenhütten für das Zerschlagen substituirt ist, wodurch man sowohl Kosten erspart, als mehr Producte erhält. Ungeachtet der Aehnlichkeit, welche zwischen den durch den Druck und durch die Percussion hervorgebrachten Wirkungen stattfindet, haben diese beiden Kräfte doch nicht einerlei

Maaß, weil sie nicht auf dieselbe Weise wirken; denn die Wirkung der letzten wird in einer so kurzen Zeit hervorgebracht, daß man sie als momentan betrachten kann, und die Wirkung der ersten findet allmählig während einer meßbaren Zeit statt.

Stoß elastischer Körper.

§. 233. Wir wollen uns nun mit der Mittheilung der Bewegung bei dem directen Stoße vollkommen elastischer Körper beschäftigen, welche immer ihre ursprüngliche Form wieder annehmen, was für eine Bewegung denselben auch mitgetheilt sei, obgleich es in der Natur keine vollkommen elastischen Körper gibt. Die Regeln, welche sich aus der auf diese Voraussetzung gegründeten Theorie ergeben, geben Grenzwerthe, welchen sich die durch Beobachtung erhaltenen Resultate hinreichend nähern, um als Bestätigung der Richtigkeit dieser Regeln dienen zu können.

Wir wollen nun die Bewegung zu bestimmen suchen, welche zwei homogene und vollkommen elastische Kugeln nach ihrem Zusammenstoßen annehmen müssen, wenn sie sich nach einer durch ihre Mittelpuncte gehenden geraden Linie mit bekannten Massen und bekannten Geschwindigkeiten bewegen, und zwar wollen wir die Formeln abzuleiten suchen, vermittelst welcher man die ihnen durch den Stoß ertheilten Geschwindigkeiten berechnen kann.

Es seien m und m' die Massen der beiden Kugeln, deren Mittelpuncte c, c' auf der geraden Linie RS (Fig. 127) liegen und deren sämmtliche Puncte nach derselben Richtung zu dieser geraden Linie Parallelen beschreiben. Die Geschwindigkeiten, mit welchen sich diese Kugeln bewegen, wollen wir mit v und v' bezeichnen, wo die Geschwindigkeit v der ersten Kugel größer ist, als die Geschwindigkeit v' der zweiten, weil sie zusammenstoßen, indem sie sich nach derselben Richtung bewegen und x, x' seien die unbekannten Geschwindigkeiten, welche sie nach dem Stoße haben.

Wenn die erste Kugel die zweite erreicht, so findet zuerst eine ähnliche Zusammendrückung statt, wie bei dem Zusammenstoßen zweier weicher Körper und gleich nach deren Vollendung die beiden Kugeln dieselbe Geschwindigkeit $u = \frac{mv + m'v'}{m + m'}$ haben. Der Geschwindigkeitsverlust der ersten oder stoßenden Kugel wird ausgedrückt durch $v - u$ und der Geschwindigkeitszuwachs der zweiten oder gestoßenen Kugel wird ausgedrückt durch $u - v'$. Hierauf tritt die Wirkung der Elasticität ein, in Folge welcher die erste Kugel einen Geschwindigkeitsverlust erfährt, welcher dem bei der Zusammendrückung gleich ist und die zweite Kugel erhält einen Geschwindigkeitszuwachs, welcher dem schon erhaltenen gleich ist, so daß der Geschwindigkeitsverlust der stoßenden Kugel durch $2(v - u)$ und der Geschwindigkeitszuwachs der gestoßenen Kugel durch $2(u - v')$ ausgedrückt wird. Die Geschwindigkeiten der Kugeln nach dem Stoße werden also durch die folgenden beiden Gleichungen ausgedrückt:

$$x = v - 2(v - u) = 2u - v$$
$$x' = v' + 2(u - v') = 2u - v',$$

worin folgende Regel enthalten ist: Um die Geschwindigkeit zweier elastischer Kugeln nach dem Stoße zu erhalten, ziehe man von der doppelten Geschwindigkeit u, welche die beiden Kugeln nach dem Stoße haben würden, wenn sie weiche Körper wären, die Geschwindigkeit jeder Kugel vor dem Stoße ab; so sind die Reste die gesuchten Geschwindigkeiten.

§. 234 Wenn man die zweite der vorhergehenden Gleichungen von der ersten abzieht, so erhält man:

$$x - x' = -v + v'.$$

Unter der relativen Geschwindigkeit zweier Körper versteht man den Unterschied ihrer Geschwindigkeiten, und aus der letzten Gleichung sieht man, daß die beiden elastischen Körper in gleichen Zeiten vor und nach dem Stoße gleiche relative Geschwindigkeiten mit entgegengesetztem Zeichen haben. Bei dem Stoße weicher oder harter Körper bleiben die Körper nach dem Stoße mit einander in Berührung, wie wenn sie nur einen einzigen Körper bildeten, und folglich ist ihre relative Geschwindigkeit nach dem Stoße gleich Null.

Wird der Werth von u in die Werthe der Geschwindigkeiten x und x' nach dem Stoße substituirt, so verwandelt sie sich in:

$$x = \frac{2(mv + m'v')}{m + m'} - v = \frac{mv + 2m'v' - m'v}{m + m'}$$

$$= v + \frac{2m'v' - 2m'v}{m + m'} = v - \frac{2m'(v - v')}{m + m'},$$

$$x' = \frac{2(mv + m'v')}{m + m'} - v' = \frac{2mv + m'v' - mv'}{m + m'}$$

$$= v' + \frac{2mv - 2mv'}{m + m'} = v' + \frac{2m(v - v')}{m + m'}.$$

Um diese Formeln auf ein Zahlenbeispiel anzuwenden, wollen wir bemerken, daß man statt der Massen der Kugeln ihre Gewichte nehmen kann, denn es ist $p = mg$ (§. 201). Wenn man also die Gewichte p, p' für die Massen m, m' setzt, so kommt im Zähler und Nenner der Brüche in den vorhergehenden Formeln die Größe $g = 9^m,809$ als gemeinschaftlicher Factor vor, wodurch die Werthe dieser Brüche nicht geändert werden.

Wir wollen annehmen, daß das Gewicht der ersten oder stoßenden Kugel $= 125$ Gramm, ihre Geschwindigkeit $v = 2$ Meter in der Secunde, das Gewicht der zweiten Kugel $= 219$ Gramm und ihre Geschwindigkeit $v' = 0^m,65$ sei; so erhalten wir, wenn wir diese Zahlenwerthe statt der Buchstaben in die obigen Formeln substituiren:

$$x = 2^m - \frac{2 \times 219\,(2 - 0,65)}{125 + 219} = 2 - \frac{438 \times 1,35}{344} = 0^m,28,$$

$$x' = 0^m,65 + \frac{2 \times 125 \times 1,35}{344} = 1^m,63.$$

Die beiden Kugeln bewegen sich also nach dem Stoße noch in demselben Sinne, aber die Geschwindigkeit der stoßenden Kugel ist ungefähr auf $^1/_7$ ihres Werthes vor dem Stoße reducirt, während die der gestoßenen Kugel mehr als doppelt so groß geworden ist.

Dieselben Resultate erhielte man, wenn man die Rechnungen nach der aus den beiden ersten Formeln abgeleiteten Regel verrichtete.

§. 235. Es ist leicht, in die Formeln:

$$x = v - \frac{2m'(v - v')}{m + m'}, \quad x' = v' + \frac{2m(v - v')}{m + m'}$$

die Modificationen einzuführen, welche den verschiedenen Fällen entsprechen, die der Stoß zweier sich nach demselben Sinne bewegender elastischer Körper darbietet.

Wenn die beiden Körper gleiche Massen haben, also $m = m'$ ist, so verwandeln sich die vorhergehenden Formeln in die beiden folgenden:

$$x = v - (v - v') = v', \quad x' = v' + v - v' = v,$$

woraus erhellet, daß die beiden Körper ihre Geschwindigkeiten vertauscht haben.

Wenn man in dem vorhinberechneten Beispiele $m = m' = 125$ setzt und die übrigen Größen dieselben bleiben, so findet man $x = 0{,}65$, $x' = 2$, und nachdem die beiden Körper ihre Geschwindigkeiten durch den Stoß vertauscht haben, fahren sie fort, sich nach derselben Richtung weiter zu bewegen.

Wenn die Massen m und m' der beiden Kugeln einander gleich sind und die Masse m' sich vor dem Stoße in Ruhe befindet, so daß $v' = 0$ ist; so geben die Formeln, welche die Geschwindigkeiten nach dem Stoße ausdrücken $x = 0$ und $x' = v$, d. h. es wird durch den Stoß wieder ein Austausch der Geschwindigkeit bewirkt, der gestoßene Körper bewegt sich mit der ihm von dem stoßenden Körper ertheilten Geschwindigkeit fort und dieser bleibt in Ruhe, weil er von dem gestoßenen Körper keine Geschwindigkeit erhalten hat.

Dieser Austausch der Geschwindigkeiten oder diese Transmission der Bewegung findet statt, wie groß die Anzahl der Kugeln auch sein mag; denn wenn eine dritte jeder der beiden andern Kugeln gleiche Kugel hinzukommt und die zweite wird von der ersten gestoßen, so bleibt diese nach dem Stoße in Ruhe, und wenn alsdann die dritte Kugel von der zweiten gestoßen wird, so bleibt diese nach dem zweiten Stoße ebenfalls in Ruhe, u. s. f.

Wir haben vorausgesetzt, daß jede Kugel durch den Stoß der folgenden in Bewegung gesetzt wird, was stattfindet, wenn die Kugeln von einander getrennt sind, und wenn sie sich berühren, so bringt der Stoß der ersten Kugel dieselbe Wirkung hervor, alle zwischenliegenden Kugeln bleiben in Ruhe und bloß die letzte Kugel bewegt sich mit einer Geschwindigkeit fort, welche der der ersten gleich ist. Wenn man mehrere der ersten Kugeln zugleich gegen die folgende stoßen läßt, so bewegen sich eine gleiche Anzahl der letzten Kugeln fort, ohne daß die mittlern in Bewegung gesetzt werden.

§. 236. Wenn sich die beiden Kugeln, deren Massen m und m' sind, vor dem Stoße nach entgegengesetzten Richtungen bewegen

(Fig. 128), so drückt $2(u - v)$ wieder den Geschwindigkeitsverlust der ersten Kugel in Folge des Stoßes aus und ihre Geschwindigkeit nach dem Stoße wird ausgedrückt durch $x = 2u - v$. Die Geschwindigkeit der zweiten Kugel ist vor dem Stoße $= -v'$ und der Geschwindigkeitsverlust dieser Kugel am Ende der Zusammendrückung, wenn beide Kugeln dieselbe Geschwindigkeit haben, ist $= u - (-v') = u + v'$, welcher durch die Wirkung der Elasticität verdoppelt wird, so daß die Geschwindigkeit der zweiten Kugel nach dem Stoße ausgedrückt wird durch:

$$x' = -v' + 2(u + v') = 2u + v'.$$

Bewegen sich die beiden Kugeln vor dem Stoße nach entgegengesetzten Richtungen, so hat man:

$$u = \frac{mv - m'v'}{m + m'},$$

und wenn man diesen Werth von u in die Ausdrücke der Geschwindigkeiten nach dem Stoße substituirt, so kommt:

$$x = \frac{2(mv - m'v')}{m + m'} - v = \frac{mv - 2m'v' - m'v}{m + m'}$$

$$= v - \frac{2m'(v + v')}{m + m'},$$

$$x' = \frac{2(mv - m'v')}{m + m'} + v' = \frac{2mv - m'v' + mv'}{m + m'}$$

$$= -v' + \frac{2m(v + v')}{m + m'}.$$

Diese beiden Formeln unterscheiden sich von denen, welche wir für den Stoß zweier sich nach demselben Sinne bewegender elastischer Körper gefunden haben, nur durch das Zeichen der Geschwindigkeit v' des zweiten Körpers.

Wenn die Massen m und m' der beiden Körper einander gleich sind, so verwandeln sich die vorhergehenden Formeln in:

$$x = v - v - v' = -v', \quad x' = -v' + v + v' = v,$$

d. h. jeder Körper bewegt sich nach dem Stoße mit der Geschwindigkeit und nach der Richtung des andern Körpers vor dem Stoße.

Wenn die Quantitäten der Bewegung mv und $m'v'$ einander gleich sind, so hat man:

$$x = -v, \quad x' = +v',$$

d. h. jeder Körper bewegt sich mit seiner Geschwindigkeit vor dem Stoße rückwärts.

Die Mariottesche Maschine, deren Einrichtung und Gebrauch wir im Vorhergehenden dem Wesentlichen nach angegeben haben, kann auch zu den Versuchen mit elastischen Körpern angewandt werden, zu welchem Zwecke man insbesondere Elfenbeinkugeln an Fäden aufhängt, so daß sie sich berühren und ihre Mittelpuncte auf einer horizontalen geraden Linie liegen. Wenn man alsdann eine oder mehrere dieser

Kugeln in der durch ihre Mittelpuncte gehenden Verticalebene aus ihrer Lage entfernt und sie dann sich selbst überläßt, so stoßen sie mit Geschwindigkeiten gegen einander, welche durch die Scale der Maschine angegeben werden.

Alle theoretischen Gesetze der Mittheilung der Bewegung können durch diese Versuche versinnlicht werden und die Unterschiede zwischen den Resultaten der Beobachtung und der Rechnung, rühren daher, daß die Kugeln nicht ganz homogen und nicht vollkommen elastisch sind, wie man vorausgesetzt hat, und daß ihre Bewegungen durch den Widerstand der Luft verzögert werden. Wenn man die von diesen Ursachen herrührenden Veränderungen in Rechnung bringt, so ergibt sich, daß die theoretischen Gesetze mit einer hinreichenden Genauigkeit bestätigt werden.

§. 237. Wir haben bisher nur die beiden Grenzfälle über die Mittheilung der Bewegung bei dem Stoße der Körper betrachtet, nämlich den Stoß ganz unelastischer Körper, wie die vollkommen harten und weichen Körper und den der vollkommen elastischen Körper, und es ist leicht, in die sich auf diesen letzten Fall beziehenden Formeln die Bedingung der unvollkommenen Elasticität einzuführen. Denn es bezeichne $1 : n$ das Verhältniß der vollkommenen Elasticität zu einem beliebigen Grade derselben, wo die Zahl n für alle unvollkommen elastischen Körper kleiner ist, als die Einheit. Die beiden Körper, deren Massen durch m und m' ausgedrückt werden, sollen sich nach der durch ihre Mittelpuncte gehenden geraden Linie RS (Fig. 126) in demselben Sinne bewegen, indem die Geschwindigkeit v des ersten Körpers vor dem Stoße größer ist, als die Geschwindigkeit v' des zweiten. Wenn der Stoß stattfindet, so verliert der erste oder stoßende Körper zuvörderst die Geschwindigkeit $v - u$ und dann wegen der unvollkommenen Elasticität noch eine Geschwindigkeit $n\,(v - u)$, so daß sein ganzer Geschwindigkeitsverlust ausgedrückt wird durch $v - u + n\,(v - u) = (1 + n)\,(v - u)$. Die Geschwindigkeit des gestoßenen Körpers wird durch den Stoß um $u - v' + n\,(u - v') = (1 + n)\,(u - v')$ vergrößert und folglich werden die Geschwindigkeiten der bewegten Körper nach dem Stoße ausgedrückt durch:

$$x = v - (1 + n)\,(v - u) = (1 + n)\,u - nv$$
$$x' = v' + (1 + n)\,(u - v') = (1 + n)\,u - nv',$$

und wenn man den Werth von $u = \frac{mv + m'v'}{m + m'}$ substituirt und die Reductionen verrichtet, so kommt:

$$x = \frac{(m - nm')\,v + (m' + nm')\,v'}{m + m'}$$

$$x' = \frac{(m + nm)\,v + (m' - nm)\,v'}{m + m'}.$$

Aus diesen Formeln ergeben sich die für den Stoß weicher oder vollkommen harter Körper, wenn man $n = 0$ setzt, und wenn man $n = 1$ setzt, so erhält man die Formeln für den Stoß vollkommen elastischer Körper wieder.

Durch ähnliche Verfahrungsarten ergeben sich die Formeln für die Geschwindigkeiten nach dem Stoße, wenn sich die Körper vor dem Stoße nach entgegengesetzten Richtungen bewegen. Uebrigens unterscheiden sich die Formeln für den Fall, wenn sich die Körper vor dem Stoße nach derselben Richtung bewegen, von denen für den Fall, wo sie sich nach entgegengesetzten Richtungen bewegen, nur durch das Zeichen der Geschwindigkeit v' des zweiten Körpers, so daß beide Fälle in den folgenden Formeln enthalten sind:

$$x = \frac{(m - nm')\,v \mp (m' + nm')\,v'}{m + m'},$$

$$x' = \frac{(m + nm)\,v \mp (m' - nm)\,v'}{m + m'},$$

wo sich die obern Zeichen auf den ersten und die untern auf den zweiten Fall beziehen.

§. 238. Wenn ein elastischer Körper in normaler Richtung gegen eine unbewegliche vollkommen feste Ebene trifft, so wird derselbe vermöge der Wirkung seiner Elasticität in derselben normalen Richtung nach dem Ausgangspuncte zu zurück geworfen, was man beobachten kann, wenn man Elfenbeinkugeln auf eine gut polirte horizontale Marmorplatte fallen läßt. Die Geschwindigkeit der Kugel wird durch den Stoß aufgehoben, aber die Kugel erhält alsdann die ihrem Elasticitätsgrade entsprechende Geschwindigkeit wieder und steigt nach der Verticale, welche sie bei dem Falle durchlaufen hat, wieder auf.

Aufgabe. — Wenn die Kugel in schiefer Richtung gegen eine feste Ebene trifft, und ihre Elasticität verhält sich zu der vollkommenen Elasticität wie $n : 1$, das Verhältniß der Winkel zu finden, welche die Richtungen der Bewegung der Kugel vor und nach dem Stoße mit der festen Ebene bilden.

Auflösung. — Es sei MN (Fig. 129) die feste Ebene, gegen welche eine elastische Kugel, deren Mittelpunct die gerade Linie bc beschreibt, in schiefer Richtung trifft, so wird die Geschwindigkeit der Kugel durch den Stoß aufgehoben; aber sie erhält wieder durch die Wirkung ihrer Elasticität eine Geschwindigkeit, vermöge welcher ihr Mittelpunct nach dem Stoße die gerade Linie cb' beschreibt. Wir wollen durch den Mittelpunct c der Kugel die gerade Linie dd' zu der Ebene MN parallel ziehen und die Winkel bcd, $b'cd'$, welche sie mit den Richtungen cb, cb' bildet, mit a, a' bezeichnen; so wird der Winkel a der Einfallswinkel und der Winkel a' der Zurückwerfungswinkel genannt. Diese beiden Winkel liegen in derselben durch die Richtung bc der Bewegung des Körpers vor dem Stoße gelegten Normalebene auf der Ebene MN; denn die Bewegung des Körpers wird nur durch den Stoß verändert, dessen Wirkung nur in dem Sinne der Normale auf dieser Ebene MN erfolgt.

Wir wollen die Geschwindigkeit v des Körpers vor dem Stoße in zwei andere zerlegen, wovon die eine $v \cos. a$ zu der Ebene MN parallel und die andere $v \times \sin. a$ auf dieser Ebene senkrecht ist; so wird die Componente $v \cos. a$ durch den Stoß nicht geändert; aber

die auf der Ebene *MN* senkrechte Componente $v \sin. a$ wird nach dem Stoße $= nv \sin. a$. Ferner hat man:

$$tang.\, a = \frac{sin.\, a}{cos.\, a},\quad tang.\, a' = \frac{sin.\, a'}{cos.\, a} = \frac{n\, sin.\, a}{cos.\, a},$$

woraus sich die Proportion:

$$tang.\, a : tang.\, a' = 1 : n$$

ergibt, d. h. die Tangente des Einfallswinkels verhält sich zu der des Zurückwerfungswinkels wie die Einheit zu der Elasticität der Kugel. Der Einfalls- und Zurückwerfungswinkel wären einander gleich, wenn der Körper vollkommen elastisch wäre; aber da es keine vollkommen elastischen Körper gibt, so ist der Zurückwerfungswinkel immer kleiner, als der Einfallswinkel.

§. 239. Auf den Gesetzen des Stoßes elastischer Kugeln beruhet das Billardspiel; allein man muß bemerken, daß sich die durch die Rechnung ausgedrückten Resultate nicht genau realisiren lassen, weil weder die Elfenbeinkugeln, welche man anwendet, noch die Banden des Billards, gegen welche sie treffen, vollkommen elastisch sind und die Dichtigkeit der Billardkugeln nicht vollkommen gleichförmig ist, wie wir vorausgesetzt haben. Ueberdies nehmen die Kugeln in Folge der auf dem Tuche, womit das Billard überzogen ist, stattfindenden Reibung eine Rotationsbewegung an, in Folge dessen die stoßende Kugel, nachdem sie ihre fortschreitende Bewegung der gestoßenen Kugel mitgetheilt hat, nicht augenblicklich in Ruhe bleibt, sondern sie wird durch die Rotationsbewegung, welche sie behält, fortbewegt. Jedoch verhindern diese Unregelmäßigkeitsursachen die geschickten Spieler nicht, auf dem Billard die Bewegungen der Kugeln hervorzubringen, welche die Regeln dieses Spieles vorschreiben und auf eine kleine Anzahl von Aufgaben hinauslaufen, deren Auflösung weniger Theorie, als practische Geschicklichkeit erfordert.

Das Billard dient nicht bloß zur Erholung und zum Vergnügen, sondern man bedient sich desselben auch bei den Vorträgen der Physik zur Versinnlichung der Percussionsgesetze bei dem Stoße elastischer Körper und bei verschiedenen interessanten Versuchen über die Gesetze der Bewegung. Statt das Billard mit Tuch zu überziehen, wenden die Physiker Marmor an, um die Reibung zu vermindern, so daß sowohl die ebene Tafel, als die Banden aus Marmor bestehen.

Wir haben nun noch zu zeigen, wie sich das Princip der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunctes und das der Erhaltung der lebendigen Kräfte aus der Theorie des Stoßes der Körper ableiten lassen, und wir schließen dieses Kapitel mit der Erörterung einiger Begriffe über einen besondern Fall des Principes der kleinsten Wirkung.

§. 240. Die Formeln, welche die Gesetze der Mittheilung der Bewegung bei dem directen Stoße der Körper ausdrücken, können auch zur Nachweisung mehrerer anderer Bewegungsgesetze dienen, und wir wollen uns zunächst mit dem Gesetze beschäftigen, welches sich auf die Bewegung des Schwerpunctes der Körper bezieht.

Es seien m', m'' die Massen zweier Kugeln, welche sich auf der durch ihre Mittelpuncte c', c'' gehenden geraden Linie AB (Fig. 130) mit den Geschwindigkeiten v', v'' nach demselben Sinne bewegen, und wir wollen auf dieser geraden Linie einen Punct A zum Anfangspuncte der durchlaufenen Räume nehmen, die Entfernung AG des Punctes A von dem gemeinschaftlichen Schwerpuncte G der beiden Kugeln am Ende der Zeit t mit x und die Entfernungen des Anfangspunctes A von den Mittelpuncten c', c'' der Kugeln in demselben Augenblicke mit x', x'' bezeichnen; so geht die Resultante aus den Gewichtskräften der Massen m', m'' durch den Schwerpunct G, und wenn man ihre Momente in Beziehung auf den Punct A nimmt, so hat man:

$$x = \frac{m'x' + m''x''}{m' + m''},$$

woraus sich ergibt, wenn man differentiirt und durch dt dividirt:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{m'\frac{dx'}{dt} + m''\frac{dx''}{dt}}{m' + m''}.$$

Diese Differentialgleichung gibt die Geschwindigkeit $\frac{dx}{dt}$ des Schwerpunctes G, wenn die Differentialverhältnisse $\frac{dx'}{dt}$, $\frac{dx''}{dt}$, welche resp. die Geschwindigkeiten der beiden Kugeln ausdrücken, bestimmt sind; aber es ist:

$$\frac{dx'}{dt} = v', \frac{dx''}{dt} = v'',$$

und wenn man diese Werthe in die vorhergehende Gleichung substituirt, so verwandelt sie sich in folgende:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{m'v' + m''v''}{m' + m''},$$

woraus erhellet, daß die Geschwindigkeit des Schwerpunctes G vor dem Stoße dem Quotienten aus der Summe der Quantitäten der Bewegung der beiden Kugeln und aus der Summe ihrer Massen gleich ist. Dieser Ausdruck ist derselbe, als der, welchen wir in §. 227 für die gemeinschaftliche Geschwindigkeit zweier vollkommen harter oder zweier weicher Körper nach dem Stoße gefunden haben, und folglich wird durch den Stoß zweier vollkommen unelastischer Körper die Bewegung ihres gemeinschaftlichen Schwerpunctes nicht geändert.

§. 241. Bei dem Stoße elastischer Körper ist die Differentialgleichung für die Bewegung des gemeinschaftlichen Schwerpunctes dieselbe, als für vollkommen harte oder weiche Körper und es ergibt sich daraus derselbe Ausdruck für die Geschwindigkeit ihres geweinschaftlichen Schwerpunctes vor dem Stoße.

Werden die Geschwindigkeiten des Schwerpunctes nach dem Stoße und die correspondirenden Geschwindigkeiten der Kugeln resp. mit V, V' und V'' bezeichnet, so hat man:

$$\frac{dx}{dt} = V, \frac{dx'}{dt} = V', \frac{dx''}{dt} = V'',$$

und wenn man diese Werthe substituirt, so erhält man:

$$V = \frac{m'V' + m''V''}{m' + m''}.$$

Nach dem Stoße bewegen sich die Körper mit den Geschwindigkeiten:

$$V' = 2u - v', V'' = 2u - v'',$$

und wenn man die erste dieser Gleichungen mit m', die zweite mit m'' multiplicirt und die Producte zusammenaddirt; so kommt:

$$m'V' + m''V'' = 2(m' + m'')u - (m'v' + m''v''),$$

und wenn man endlich den Werth $u = \frac{m'v' + m''v''}{m' + m''}$ substituirt und reducirt, so erhält man:

$$m'V' + m''V'' = m'v' + m''v''.$$

Wenn man den zweiten Theil dieser Gleichung für den ersten setzt, so ergibt sich, daß die Geschwindigkeit V des gemeinschaftlichen Schwerpunctes der beiden Körper nach dem Stoße dieselbe ist, als vor demselben. Die Bewegung des Schwerpunctes zweier vollkommen elastischer Körper wird also wie die des gemeinschaftlichen Schwerpunctes zweier vollkommen harter Körper durch das Zusammenstoßen derselben nicht geändert.

In allen gewöhnlich vorkommenden Fällen haben die Körper einen gewissen Grad von Elasticität und ihre Geschwindigkeiten nach dem Stoße werden nach §. 237 ausgedrückt durch:

$$V' = (1 + n)u - nv', V'' = (1 + n)u - nv''.$$

Multiplicirt man die erste dieser Gleichungen mit m', die zweite mit m'' und addirt die Producte zusammen, so erhält man:

$$m'V' + m''V'' = (1 + n)(m' + m'')u - n(m'v' + m''v''),$$

und wenn der Werth von u in diese Gleichung substituirt wird; so verwandelt sie sich in:

$$m'V' + m''V'' = m'v' + m''v''.$$

Die sich auf die Elasticität beziehenden Glieder sind aus dieser Gleichung verschwunden, und man erhält dasselbe Resultat wieder, als im vorhergehenden Falle, woraus folgt, daß auch in diesem Falle die Bewegung des gemeinschaftlichen Schwerpunctes der beiden Körper durch den Stoß nicht geändert wird. Was wir eben für zwei Körper bewiesen haben, findet auch für jedes in Bewegung befindliches System von Körpern statt, d. h. der Stoß dieser Körper gegen einander, oder im allgemeinen, ihre gegenseitigen Einwirkungen haben auf die Bewegung ihres gemeinschaftlichen Schwerpunctes keinen Einfluß.

In diesem Lehrsatze, welchen Newton im Anfange seiner Principien als Grundsatz aufgestellt hat, besteht das sogenannte Gesetz der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunctes und ist für ein

System von Körpern dasselbe, als das Gesetz der Trägheit für einen einzelnen Körper, welcher seinen Zustand der Ruhe oder Bewegung so lange behält, als keine fremde Kraft darauf wirkt.

§. 242. Das zweite Princip ist das Princip der Erhaltung der lebendigen Kräfte. In §. 206 haben wir gesehen, daß man unter der lebendigen Kraft eines Körpers das Product aus seiner Masse und aus dem Quadrate seiner Geschwindigkeit versteht, so daß, wenn m die Masse eines Körpers und v seine Geschwindigkeit bezeichnet, das Product mv^2 seine lebendige Kraft ausdrückt.

Wir wollen zunächst zeigen, daß die Erhaltung der lebendigen Kräfte bei dem Stoße vollkommen elastischer Körper stattfindet, d. h. daß die Summe der lebendigen Kräfte dieser Körper vor dem Stoße der Summe dieser lebendigen Kräfte nach dem Stoße gleich ist.

Wir wollen die beiden Formeln:

$$w = \frac{mv + 2m'v' - m'v}{m + m'} = \frac{mv + m'(2v' - v)}{m + m'},$$

$$w' = \frac{m'v' + 2mv - mv'}{m + m'} = \frac{m'v' + m(2v - v')}{m + m'}$$

wieder betrachten. Wenn man sie zum Quadrate erhebt, dann die erste mit m, die zweite mit m' multiplicirt und die Producte zusammenaddirt; so kommt:

$$mw^2 + m'w'^2 = \frac{m^3v^2 + m^2m'(2v^2 + v'^2) + m'^3v'^2 + mm'^2(2v'^2 + v^2)}{m^2 + 2mm' + m'^2},$$

und wenn man den Zähler des zweiten Theiles durch den Nenner dividirt, so erhält man:

$$mw^2 + m'w'^2 = mv^2 + m'v'^2.$$

Hierdurch ist das Princip der Erhaltung der lebendigen Kräfte bei dem Stoße zweier vollkommen elastischer Körper dargethan, und man kann daraus durch Induction schließen, daß dieses Princip auch bei dem Stoße einer beliebigen Anzahl elastischer Körper stattfindet, d. h. daß der Stoß dieser Körper keine Veränderung ihrer lebendigen Kräfte bewirkt.

§. 243. Wir wollen nun den Fall zweier unvollkommen elastischer Körper betrachten. Die Geschwindigkeiten dieser Körper nach dem Stoße werden durch die Formeln:

$$w = \frac{(m - m'n)v + (m' + m'n)v'}{m + m'},$$

$$w' = \frac{(m + mn)v + (m' - mn)v'}{m + m'}$$

ausgedrückt. Erhebt man diese Formeln zum Quadrate, multiplicirt die erste mit m, die zweite mit m', addirt die Producte zusammen und dividirt den Zähler und Nenner des zweiten Theiles durch ihren gemeinschaftlichen Divisor $m + m'$; so kommt:

$$= \frac{mw^2 + m'w'^2 - (m^2 + mm'n^2)\, v^2 + 2\,(mm' - mm'n^2)\, w' + (m'^2 + mm'n^2)\, v'^2}{m + m'}.$$

Dividirt man jeden der zwischen den Parenthesen stehenden Coefficienten durch den Nenner $m + m'$ und sondert die ganzen Glieder von den gebrochenen ab, so erhält man:

$$mw^2 + m'w'^2 = mv^2 + m'v'^2 - (1 - n^2)\frac{mm'}{m + m'}(v - v')^2,$$

oder was auf dasselbe hinausläuft:

$$mv^2 + m'v'^2 - mw^2 - m'w'^2 = (1 - n^2).\frac{mm'}{m + m'}(v - v')^2,$$

In dem Falle vollkommen elastischer Körper hat man $n = 1$ und der Unterschied der lebendigen Kräfte vor und nach dem Stoße ist $= 0$, was wir bereits wissen.

Wenn die zusammenstoßenden Körper ganz unelastisch sind, so ist $n = 0$, die Geschwindigkeiten nach dem Stoße sind einander gleich, also $w = w' = u$ und die vorhergehende Gleichung verwandelt sich in:

$$mv^2 + m'v'^2 - mu^2 - m'u^2 = \frac{mm'}{m + m'}(v - v')^2$$
$$= m(v - u)^2 + m'(u - v')^2.$$

Um die Gleichheit der beiden Ausdrücke des zweiten Theiles dieser Gleichung darzuthun, braucht man in der letztern nur den Werth von $u = \frac{mv + m'v'}{m + m'}$ zu substituiren, so erhält man, wenn die Rechnungen verrichtet werden, den ersten Ausdruck des von dem Stoße harter Körper herrührenden Verlustes an lebendiger Kraft wieder.

§. 244. Bei dem Stoße der verschiedenen Theile eines Systemes vollkommen harter Körper ist, wie groß die Anzahl dieser Theile auch sein mag, und der Stoß mag unmittelbar oder vermittelst irgend einer Maschine ohne Elasticität stattfinden, die Summe der lebendigen Kräfte vor dem Stoße immer gleich der Summe der lebendigen Kräfte nach dem Stoße und der Summe der lebendigen Kräfte, welche stattfinden würden, wenn sich jeder der Körper frei mit der Geschwindigkeit bewegte, welche er durch den Stoß verloren hat.

Betrachten wir bloß einen der Körper des Systemes und es sei AB (Fig. 131) die Größe und Richtung seiner Geschwindigkeit vor dem Stoße und AC die Größe und Richtung seiner Geschwindigkeit nach dem Stoße. Construirt man das Parallelogramm $ACBD$, so sieht man, daß die Diagonale AB die Resultante aus der Geschwindigkeit AC, welche dieser Körper nach dem Stoße noch hat und aus der Geschwindigkeit AD, welche er durch den Stoß verloren hat, ist. Wir wollen das Perpendikel BH auf die verlängerte Seite AC fällen, so gibt das rechtwinklige Dreieck AHB:

$$(AB)^2 = (AH)^2 + (BH)^2.$$

Wird die Seite AH in zwei Theile AC, CH getheilt, wovon der zweite Theil eine der Katheten des rechtwinkligen Dreieckes CHB ist, so hat man:

$$(AH)^2 = (AC + CH)^2 = (AC)^2 + (CH)^2 + 2AC \times CH,$$
$$(BH)^2 = (BC)^2 - (CH)^2,$$

und das rechtwinklige Dreieck CHB gibt:

$$CH = BC \cos. BCH = AD \cos. DAC.$$

Werden diese Werthe in den zweiten Theil der ersten Gleichung substituirt, so kommt:

$$(AB)^2 = (AC)^2 + (AD)^2 + 2AC. AD \cos. DAC.$$

Wir wollen die Masse eines der Körper des Systemes mit m bezeichnen und $AB = v$, $AC = u$, $AD = w$ setzen. Multiplicirt man alsdann alle Glieder mit m und bemerkt, daß man für jeden der übrigen Körper ein dem ebengefundenen ähnliches Resultat erhält; so sieht man leicht ein, daß die Summe oder das Gesammtresultat durch folgende Formel ausgedrückt wird:

$$Smv^2 = Smu^2 + Smw^2 + 2Smw. u \cos. DAC,$$

worin S das Integral- oder Summenzeichen aller ähnlichen Glieder des Systemes bezeichnet.

Das letzte Glied ist die doppelte Summe der Producte aus den von allen Körpern des Systemes verlornen Quantitäten der Bewegung und aus ihren nach den Richtungen dieser Quantitäten der Bewegung geschätzten Geschwindigkeiten nach dem Stoße. Dieses Glied muß nach dem D'Alembert'schen Principe und nach dem der virtuellen Geschwindigkeiten verschwinden. Denn nach dem ersten dieser Principe sind die verlornen Quantitäten der Bewegung mw so beschaffen, daß das System im Gleichgewichte sein würde, wenn sie allein vorhanden wären, und nach dem Principe der virtuellen Geschwindigkeiten muß die Summe der Producte aus diesen Quantitäten der Bewegung und den beschriebenen kleinen Räumen $AE = u \cos. DAC$ oder aus den nach den Richtungen dieser Quantitäten der Bewegung geschätzten virtuellen Geschwindigkeiten der Körper des Systemes $= 0$ sein, so daß man hat:

$$Smw. u \cos. DAC = o,$$

und wenn man dieses Glied aus der obigen Gleichung hinwegläßt, so geht sie über in:

$$Smv^2 = Smu^2 + Smw^2,$$

welches der algebraische Ausdruck des in Rede stehenden Lehrsatzes ist.

Durch eine bloße Versetzung der Glieder erhält man die Gleichung:

$$Smu^2 = Smv^2 - Smw^2,$$

woraus erhellet, daß die Summe der lebendigen Kräfte der Körper des Systemes nach dem Stoße gleich ist der Summe der lebendigen Kräfte vor dem Stoße, weniger der Summe der lebendigen Kräfte, welche sie haben würden, wenn sie sich mit den Geschwindigkeiten bewegten, welche sie durch den Stoß verloren haben.

§. 245. Die Gleichung, welche der algebraische Ausdruck des Lehrsatzes über den Verlust der lebendigen Kräfte bei dem Stoße harter Körper ist, ist aus Voraussetzungen abgeleitet, welche wir sogleich verificiren wollen, indem wir diese Gleichung auf die Auflösung des Problemes des Stoßes zweier harter Körper oder zur Bestimmung des Ausdruckes ihrer Geschwindigkeit nach dem Stoße vermittelst ihrer Geschwindigkeiten vor dem Stoße anwenden.

Es seien m und m' die Massen der beiden Körper, v, v' die Geschwindigkeiten derselben vor dem Stoße, und wir wollen annehmen, daß die beiden Körper Kugeln sind, welche sich auf der durch ihre Mittelpuncte gehenden geraden Linie nach demselben Sinne bewegen und endlich daß die Geschwindigkeit v' der zweiten oder vordern Kugel kleiner ist, als die Geschwindigkeit v der ersten oder hintern Kugel.

Durch u wollen wir die gemeinschaftliche Geschwindigkeit der beiden Körper nach dem Stoße bezeichnen, so ist der Geschwindigkeitsverlust der ersten Kugel in Folge des Stoßes $= v - u$, und der Geschwindigkeitszuwachs der zweiten $= u - v'$, oder vielmehr der Geschwindigkeitsverlust $= -(u - v')$ und die Gleichung der lebendigen Kräfte nach dem Stoße verwandelt sich in:

$$mu^2 + m'u^2 = mv^2 + m'v'^2 - m(v - u)^2 - m'(u - v')^2.$$

Verrichtet man die Rechnungen und läßt die sich gegenseitig aufhebenden Glieder hinweg, so erhält man die Formel:

$$u = \frac{mv + m'v'}{m + m'},$$

welche wir bereits in §. 227 bei der Auflösung derselben Aufgabe durch andere Betrachtungen erhalten haben.

Der Verlust der lebendigen Kräfte, welche in einem in Bewegung befindlichen Systeme fester Körper bei plötzlichen Stößen stattfindet, richtet sich nach der Intensität dieser Stöße. Wenn sie sehr schwach sind, die Bewegung sich verzögert, und die Stöße in einer Reihe kleiner successiver Impulsionen bestehen, welche wenig von einem bloßen Drucke verschieden sind, so ist die verlorne Geschwindigkeit w sehr klein und ihr Quadrat w^2 eine unendlich kleine Größe der zweiten Ordnung. Diese verlorne Geschwindigkeit ist nach Verlauf einer endlichen Zeit nur eine unendlich kleine Größe der ersten Ordnung und das sich darauf beziehende Glied Smw^2 verschwindet gegen das Glied Smv^2. Alsdann reducirt sich die Gleichung auf:

$$Smu^2 = Smv^2,$$

und folglich findet die Erhaltung der lebendigen Kräfte ebenso statt, wie wenn alle Körper des Systemes vollkommen elastisch wären.

§. 246. Die Geometer mußten zur Auflösung der verschiedenen Aufgaben der Dynamik zunächst die Principien oder Lehrsätze suchen, welche auf jede Aufgabe anwendbar sind. Von Newton rührt das Princip der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunctes her und der berühmte Huyghens hat das Princip der Erhaltung der lebendigen Kräfte gefunden und dasselbe unter einer etwas andern, als der jetzt üblichen Form auf die Auflösung einer Aufgabe über das zusammen-

gesetzte Pendel, welche der Gegenstand vieler Untersuchungen gewesen ist und womit wir uns weiter unten beschäftigen werden, angewandt.

Das Princip der Erhaltung der lebendigen Kräfte war aber noch dahin zu erweitern, um dasselbe auf die Berechnung der in Bewegung befindlichen Maschinen anwenden zu können und diese Lücke ist durch den vorhergehenden Lehrsatz, welchen man das Carnot'sche Theorem nennt, ausgefüllt, weil Carnot diesen Lehrsatz zuerst gefunden hat, welcher das Mittel zur Berechnung der durch plötzliche Stöße bei der Bewegung der Maschinen verursachten Verluste an lebendiger Kraft an die Hand gibt. Man vergleiche Carnot's Werk unter dem Titel: **Principes généraux de l'équilibre et du mouvement 1803** (Deutsch von Weiß unter dem Titel: Grundsätze der Mechanik 1805).

Bei der Construction der Maschinen ist die Regelmäßigkeit der Bewegung eine der Hauptbedingungen; denn jeder plötzliche Stoß verursacht einen Verlust an lebendiger Kraft, und diese für den Nutzeffect der Maschine verlorne Kraft ist nicht verschwunden, sondern sie übt vielmehr einen nachtheiligen Einfluß auf die Maschine selbst aus, so daß sie nach Verlauf einer längern oder kürzern Zeit durch die fortwährenden Erschütterungen ganz unbrauchbar werden kann. Die Erfahrung, welche diese Nachtheile kennen lehrt und die Theorie, welche die Mittel an die Hand gibt, sie zum Voraus zu berechnen, müssen jedem Civilingenieur und Maschinenbauer bei allen seinen Constructionen als Führer dienen.

§. 247. Das dritte allgemeine Princip ist das Princip der kleinsten Wirkung, welches von Maupertuis gefunden ist und worüber er zwei Abhandlungen, die eine in den Memoiren der Akademie der Wissenschaften zu Paris vom Jahre 1744 und die andere in denen der Berliner Akademie der Wissenschaften vom Jahre 1746 bekannt gemacht hat. Maupertuis hat dieses Princip zur Bestimmung der Gesetze der Brechung des Lichtes und der des Stoßes vollkommen harter und vollkommen elastischer Körper angewandt. Nach Maupertuis ist die Quantität der Wirkung das Product aus der Masse eines Körpers, seiner Geschwindigkeit und dem durchlaufenen Raume, und das Gesetz, welches er das Princip der kleinsten Wirkung genannt hat, besteht darin: daß, wenn ein System von Körpern plötzlich in Bewegung gesetzt oder ein Stoß darauf ausgeübt wird, die Quantität der Wirkung, welche in den Körpern dieses Systemes stattfindet, nach dem Stoße ein Minimum, d. h. die möglichst kleinste ist.

Dieses Gesetz ist durch metaphysische Betrachtungen gefunden; aber Carnot hat in dem vorhin angeführten Werke einen geometrischen Beweis desselben geliefert. Carnot wendet statt des Productes aus der Masse der Geschwindigkeit und dem durchlaufenen Raume das Product aus der Masse und dem Quadrate der verlornen Geschwindigkeit an, wofür man auch das Product aus der Masse und aus dem Quadrate des Unterschiedes der Geschwindigkeit vor und nach dem Stoße nehmen kann, und alsdann ist der besondere Fall des Principes der kleinsten Wirkung in Beziehung auf den Stoß der Körper in folgendem Lehrsatze enthalten:

Bei dem Stoße der Körper ist die Summe der Producte aus der Masse jedes Körpers und dem Quadrate des Unterschiedes seiner Geschwindigkeit vor und nach dem Stoße ein Minimum.

Wir wollen nun vermittelst dieses Lehrsatzes die Geschwindigkeiten zweier unvollkommen elastischer Körper nach ihrem Zusammenstoßen zu bestimmen suchen. Die beiden Körper seien zwei Kugeln von den Massen m und m', welche sich mit den Geschwindigkeiten v und v' auf der durch ihre Mittelpuncte gehenden geraden Linie nach demselben Sinne bewegen und deren Elasticität sich zu der vollkommenen Elasticität wie $n : 1$ verhält. Es bezeichne u die gemeinschaftliche Geschwindigkeit der beiden Kugeln in dem Augenblicke, wo die größte Zusammendrückung stattfindet und w, w' seien ihre Geschwindigkeiten nach dem Stoße; so verliert der erste oder stoßende Körper durch den Stoß die Geschwindigkeit $v - u + n(v - u) = (1 + n)(v - u)$, während die Geschwindigkeit des zweiten oder gestoßenen Körpers um $u - v' + n(u - v') = (1 + n)(u - v')$, zunimmt, und folglich sind die Geschwindigkeiten der beiden Kugeln nach dem Stoße:

$$w = v - (1 + n)(v - u) = (1 + n)u - nv,$$
$$w' = v' + (1 + n)(u - v') = (1 + n)u - nv'.$$

Zieht man die zweite Gleichung von der ersten ab, so erhält man für die relative Geschwindigkeit der Körper:

$$w - w' = -n(v - v').$$

Um das Princip der kleinsten Wirkung auf die Bestimmung der Geschwindigkeiten der beiden Kugeln nach dem Stoße anzuwenden, muß die Größe:

$$m(v - w)^2 + m'(v' - w')^2$$

zu einem Minimum gemacht werden, zu welchem Zwecke man dieselbe in Beziehung auf die Veränderlichen w und w' differentiiren muß und wenn man das Differential $= 0$ setzt, so erhält man:

$$-m(v - w)\,dw + m'(w' - v')\,dw' = 0.$$

Differentiirt man ferner die Gleichung der relativen Geschwindigkeiten, so findet man $dw = dw'$, so daß also die Differentiale aus der vorhergehenden Gleichung verschwinden und sie sich auf die endliche Gleichung:

$$-m(v - w) + m'(w' - v') = 0$$

reducirt.

Werden die Veränderlichen oder die Unbekannten w, w' vermittelst dieser letzten Gleichung und der der relativen Geschwindigkeiten bestimmt, so erhält man die Formeln:

$$w = \frac{mv - nm'v + nm'v' + m'v'}{m + m'}$$
$$= \frac{(m - nm')v + (m' + nm')v'}{m + m'},$$

$$w' = \frac{mv + nmv + m'v' - nmv'}{m + m'}$$
$$= \frac{(m + nm)\,v + (m' - nm)\,v'}{m + m'},$$

welche mit denen durch die directe Auflösung derselben Aufgabe in §. 237 erhaltenen übereinstimmen.

Es gibt noch ein viertes allgemeines Princip der Dynamik, welches man das Princip der Erhaltung der Flächen nennt, und womit wir uns später beschäftigen werden, indem wir die Infinitesimalanalysis darauf anwenden, welche uns auch die Mittel zur weitern Entwickelung der Theorie des Principes der Erhaltung der lebendigen Kräfte, die wir später bei der Berechnung der Maschinen anzuwenden Gelegenheit haben werden, an die Hand gibt.

Sechstes Kapitel.

Von dem Widerstande der Mittel.

§. 248. Mittel nennt man die Körper, wie das Wasser und die übrigen tropfbaren Flüssigkeiten, oder die Luft und die übrigen Gase, worin sich andere Körper bewegen können. Der Einfluß, welchen diese Mittel auf die Bewegung ausüben, kann auf zwei verschiedene Arten betrachtet werden, nämlich 1) wenn sich ein Körper in einer Flüssigkeit bewegt, so muß er den von der Trägheit herrührenden Widerstand dieses Mittels überwinden und die vor seiner vordern Fläche befindlichen Flüssigkeitstheilchen fortschieben, und 2) wenn die Flüssigkeit in Bewegung und der Körper in Ruhe ist, so erhält dieser successive die Stöße der Flüssigkeitstheilchen; allein man pflegt diese beiden Fälle nicht von einander zu unterscheiden und wir wollen uns daher vorzugsweise mit dem ersten Falle beschäftigen.

Zur Bestimmung der Gesetze des Widerstandes der Mittel hat man bis jetzt kein genügenderes Verfahren, als das Princip der Mittheilung der Bewegung bei dem Stoße der Körper auffinden können; aber um dieses Princip anwenden zu können, hat man wegen der wenigen Kenntnisse, welche wir von der Constitution der Flüssigkeiten und ihrer Wirkungsart besitzen, zu Hypothesen, welche wir sogleich anführen werden, seine Zuflucht nehmen müssen.

Es sei $ABCD$ (Fig. 136) der Längendurchschnitt eines geraden Cylinders, welcher sich in einer tropfbaren oder gasförmigen Flüssigkeit nach der Richtung seiner Axe bewegt, m bezeichne die Masse dieses Cylinders und S den Inhalt seiner Grund- oder Vorderfläche, welcher ein Kreis von dem Durchmesser BC ist

Während des Zeitelementes dt durchläuft der Cylinder das Raumelement $Bb = dx$. Bezeichnet man seine Geschwindigkeit mit v, so

hat man $v = \frac{dx}{dt}$ und seine vordere Fläche S stößt gegen alle Flüssigkeitstheilchen, welche in dem cylindrischen Volumen liegen, wovon $BbcC$ ein Durchschnitt ist. Dieses Volumen wollen wir uns parallel zu der Grundfläche S in Schichten getheilt denken, so daß die Dicke jeder Schicht der eines Flüssigkeitstheilchens gleich ist. Sobald die vordere Fläche S des Cylinders gegen eine Flüssigkeitsschicht gestoßen ist, nimmt man die Flüssigkeitstheilchen dieser Schicht als nicht mehr vorhanden an; die Fläche S rückt weiter vor und stößt auf die Flüssigkeitstheilchen der folgenden Schicht, welche ebenfalls als verschwunden angenommen werden und dasselbe gilt von jeder der übrigen Schichten, d. h. man nimmt an, daß durch den Stoß des Körpers oder Cylinders gegen die Flüssigkeitstheilchen diesen keine Bewegung mitgetheilt wird, welche auf die übrigen Flüssigkeitstheilchen übertragen werden könnte, oder man nimmt vielmehr an, daß die Flüssigkeitstheilchen verschwinden, sobald sie von dem Körper gestoßen werden.

Es bezeichne δ die Dichtigkeit der Flüssigkeit, so wird die in dem cylindrischen Volumen, dessen Grundfläche S und dessen Höhe $Bb = dx$ ist, enthaltene Flüssigkeitsmasse durch $\delta S dx$ ausgedrückt. Vor dem Stoße ist die Geschwindigkeit des Cylinders $= v$ und seine Quantität der Bewegung $= mv$. Nach dem Stoße haben der Cylinder und die Flüssigkeitsmasse, auf welche er gestoßen ist, die gemeinschaftliche Geschwindigkeit $v + dv$ und die Summe der Quantitäten der Bewegung ist gleich:

$$(m + \delta S dx)(v + dv).$$

Die Summe muß der Quantität der Bewegung des Körpers vor dem Stoße gleich sein, und folglich hat man die Gleichung:

$$mv = (m + \delta S dx)(v + dv).$$

Verrichtet man die Rechnungen, läßt die sich gegenseitig aufhebenden Glieder und das Glied, welches eine unendlich kleine Größe der zweiten Ordnung ist, hinweg, so erhält man:

$$m dv = -\delta S v dx,$$

und wenn man $dx = v dt$ setzt und durch dt dividirt, so verwandelt sich diese Gleichung in:

$$m \frac{dv}{dt} = -\delta S v^2.$$

Der erste Theil dieser Gleichung ist das Product aus der Masse des Körpers und der beschleunigenden Kraft, d. h. er drückt die bewegende Kraft aus, mit welcher der Widerstand des Mittels der Bewegung des Körpers entgegenwirkt, und der zweite Theil der Gleichung zeigt, daß diese Kraft der Dichtigkeit des Mittels, der Vorderfläche des Körpers und dem Quadrate seiner Geschwindigkeit proportional ist.

Dieses Resultat beruhet auf einem ähnlichen Principe, wie das der Mittheilung der Bewegung bei dem Stoße unelastischer Körper, und wenn man annähme, daß der Körper und die Flüssigkeit oder das Mittel vollkommen elastisch wären, so fände man eine doppelt so große bewegende Kraft, als die eben erhaltene; allein wir wollen uns

bei der Betrachtung dieser letzten Kraft nicht aufhalten, welche viel größer ist, als die, welche man durch die Beobachtung erhält.

Um die Bestimmung der bewegenden Kraft bei dem Stoße der Flüssigkeiten auf bekannte Maaße zurückzuführen, wollen wir im zweiten Theile der letzten Gleichung für v^2 den Werth $2gh$ setzen, so erhalten wir die Gleichung:

$$m \frac{dv}{dt} = -2g\delta Sh,$$

woraus erhellet, daß dieser zweite Theil, welcher die Größe der bewegenden Kraft bei dem Stoße einer Flüssigkeit oder den die Bewegung des Körpers verzögernden Druck ausdrückt, das Gewicht einer Flüssigkeitssäule ausdrückt, deren Grundfläche der Vorderfläche S des bewegten Körpers gleich ist und deren Höhe $= 2h$ oder der doppelten Höhe gleich ist, von welcher ein Körper im leeren Raume herabfallen müßte, um eine Geschwindigkeit zu erlangen, welche der des bewegten Körpers gleich ist.

§. 249. Die eben gefundene Formel läßt sich leicht so modificiren, daß sie auf den schiefen Stoß anwendbar ist, d. h. auf den Fall, wo die Vorderfläche des bewegten Körpers mit der Richtung der Bewegung einen schiefen Winkel bildet.

Wir wollen auf der Verlängerung der Axe des Cylinders $IL = v$ (Fig. 137) nehmen und diese Geschwindigkeit so zerlegen, daß eine der Componenten IH in der Ebene der Vorderfläche S des beweglichen Körpers liegt und die andere Componente IK darauf senkrecht ist. Die erste Componente kann keinen Einfluß auf die Geschwindigkeit des bewegten Körpers haben und die zweite $IK = LH$ ist $= v \sin. CIL$.

Die Winkel KIL und CIL ergänzen einander zu einem rechten, und wenn man den ersten dieser Winkel mit i bezeichnet, so hat man $\cos. i = \sin. CIL$, und wenn man folglich $v \cos. i$ für v in die Gleichung für den senkrechten Stoß substituirt, so erhält man:

$$m \frac{dv}{dt} = -\delta S v^2 \cos.^2 i = -2g\delta Sh \cos.^2 i$$

als die Gleichung für den schiefen Stoß. Die bewegende Kraft oder der nach KI wirkende Widerstand ist dem Gewichte einer Flüssigkeitssäule gleich, deren Grundfläche $= S$ und deren Höhe $= 2h \cos.^2 i$ ist.

§. 250. Suchen wir nun die Formel, welche den Widerstand einer Flüssigkeit gegen einen sich darin bewegenden Körper, den wir zunächst als einen beliebigen Rotationskörper betrachten wollen, ausdrückt. Diese Formel ergibt sich aus der, welche wir eben für den Widerstand einer ebenen Fläche, die einen schiefen Winkel mit der Richtung der Bewegung bildet, erhalten haben, auf folgende Weise.

Es sei ADB (Fig. 138) die Curve, welche die Oberfläche des bewegten Körpers erzeugt, indem sie sich um die Axe AB drehet, welche wir zur Axe der Abscissen nehmen wollen. Der Punct C, welcher der größten Ordinate CD entspricht, sei der Anfangspunct und wir wollen annehmen, daß sich der Körper nach der Richtung der Axe bewegt, so daß bloß der von dem Bogen DMB beschriebene Theil seiner Oberfläche gegen die Flüssigkeit stößt.

Von den beiden auf diesem Bogen einander unendlich naheliegenden Puncten M und M' wollen wir die Ordinaten MP, $M'P'$ fällen, die Normale MK und die Parallelen MH, $M'L$ zu der Axe AB ziehen und endlich das Parallelogramm $MM'HK$ vollenden. Wird das Curvenelement $MM' = ds$ als eine gerade Linie betrachtet, so ist der Winkel HMM', das Complement von HMK, gleich dem Winkel $AM'L$, und folglich haben wir, wenn wir den Winkel $HMK = i$ setzen:

$$cos.\, i = sin.\, MM'L = \frac{ML}{MM'} = \frac{dy}{ds}.$$

Das Curvenelement $MM' = ds$ beschreibt eine Zone oder eine abgestumpfte Kegelfläche $S = 2\pi y ds$. Der Widerstand der Flüssigkeit wirkt nach der Normale auf jeden Punct dieser Oberfläche, und wenn man denselben so zerlegt, daß eine der Componenten senkrecht und die andere parallel zu der Axe AB ist, so wird jede senkrechte Componente durch die ihr in entgegengesetztem Sinne entsprechende aufgehoben und die zu der Axe parallele Componente ist das Product aus dem Normalwiderstande und aus $cos.\, i$ oder $\frac{dy}{ds}$. Setzt man also in den Ausdruck des Normalwiderstandes, auf einer gegen die Richtung der Bewegung ebenen schiefen Fläche die eben bestimmten Werthe von S und $cos.\, i$ und multiplicirt mit $\frac{dy}{ds}$, so verwandelt sich dieser Ausdruck in:

$$\delta . 2\pi y ds v^2 \frac{dy^2}{ds^2} . \frac{dy}{ds} = 2\pi \delta v^2 y \frac{dy^3}{ds^2},$$

und wenn man den Widerstand mit R bezeichnet, so hat man:

$$R = 2\pi \delta v^2 \int y \frac{dy^3}{ds^2}.$$

Um diese Formel auf ein Beispiel anzuwenden, wollen wir annehmen, daß der bewegte Körper eine Kugel, folglich die erzeugende Curve $ADMB$ ein Halbkreis ist. Bezeichnet man den Halbmesser mit r und liegt der Anfangspunct im Mittelpuncte C, so hat man:

$$y^2 = r^2 - x^2,\ y dy = - x dx.$$

Erhebt man beide Theile der letzten Differentialgleichung zum Quadrate und substituirt für x^2 seinen aus der ersten Gleichung genommenen Werth, so kommt:

$$y^2 dy^2 = (r^2 - y^2)\, dx^2.$$

Das unendlich kleine rechtwinklige Dreieck MLM' gibt:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = \frac{y^2 dy^2}{r^2 - y^2} + dy^2 = \frac{r^2 dy^2}{r^2 - y^2},$$

und wenn dieser Werth in den allgemeinen Ausdruck des Gesammtwiderstandes R für ds^2 substituirt wird, so verwandelt sich das darin vorkommende Integral in:

$$\int \frac{y dy^3}{ds^2} = \int \frac{y dy^3 (r^2 - y^2)}{r^2 dy^2} = \int \frac{r^2 y dy - y^3 dy}{r^2}.$$

Integrirt man und setzt dann $y = r$, um das Integral über die ganze vordere Halbkugel zu erstrecken, gegen deren Oberfläche die Flüssigkeit allein einen Widerstand ausübt, so erhält man:

$$\int \frac{r^2 y dy - y^3 dy}{r^2} = \frac{\frac{1}{2} r^2 y^2 - \frac{1}{4} y^4}{r^2} = {}^1/_4 r^2.$$

Wenn sich also eine Kugel in eine Flüssigkeit bewegt, so wird der auf sie ausgeübte Widerstand ausgedrückt durch:

$$R = 2\pi\delta v^2 \, {}^1/_4 r^2 = {}^1/_2 \pi r^2 \delta v^2,$$

d. h. dieser Widerstand ist halb so groß, als der, welcher auf einen auf der Richtung der Bewegung senkrechten größten Kreis der Kugel ausgeübt würde, oder als der auf einen um die Kugel beschriebenen Cylinder ausgeübte Widerstand; denn dieser Werth ist offenbar die Hälfte von dem weiter oben für den Cylinder erhaltenen.

Wird die Masse des bewegten Körpers durch m und seine Dichtigkeit durch D bezeichnet, so hat man:

$$m = {}^4/_3 \pi r^3 D,$$

und wenn man die beiden letzten Gleichungen in einander dividirt, so erhält man die folgende Gleichung:

$$\frac{R}{m} = \frac{\frac{1}{2}\pi r^2 \delta v^2}{\frac{4}{3}\pi r^3 D} = {}^3/_8 \frac{\delta}{D} \cdot \frac{v^2}{r},$$

deren zweiter Theil die verzögernde Kraft ausdrückt, womit die Flüssigkeit oder das Mittel der Bewegung des Körpers entgegenwirkt.

Newton hat dieses theoretische Resultat zuerst angegeben und in §. 213 haben wir gesehen, daß nach seinen Versuchen über den Fall schwerer Körper in der Luft der Widerstand dieser Flüssigkeit nur halb so groß ist, als der, welchen wir eben gefunden haben.

Siebentes Kapitel.

Von der krummlinigen Bewegung.

§. 251. In den vorhergehenden Kapiteln sind die Gesetze der geradlinigen Bewegung aufgestellt und durch Anwendungen auf die Auflösung der wichtigsten der davon abhängigen Aufgaben der Dynamik erläutert, und nun wollen wir die Bedingungen suchen, welche zur Hervorbringung einer krummlinigen Bewegung erforderlich sind. Die krumme Linie, welche der Körper beschreibt, wird die Trajectorie desselben genannt.

Eine einzige auf einen Körper wirkende Kraft kann demselben nur eine geradlinige Bewegung ertheilen, und dasselbe ist der Fall, wenn mehrere Kräfte nach derselben geraden Linie in demselben, oder in entgegengesetztem Sinne auf den Körper wirken. Zur Hervorbrin-

gung einer krummlinigen Bewegung ist also eine Verbindung mehrerer Kräfte erforderlich, welche nach verschiedenen Richtungen wirken.

Um den Uebergang von der geradlinigen zu der krummlinigen Bewegung zu erklären, wollen wir bloß einen Körper oder materiellen Punct betrachten, welcher durch die augenblickliche Wirkung einer Kraft oder durch einen Stoß in Bewegung gesetzt wird und dann successive mehrere andere Stöße von veränderlichen Richtungen erhält, indem wir zunächst annehmen, daß die Richtungen aller dieser Stöße in derselben Ebene liegen.

Man kann sich vorstellen, daß die Masse *m* eines materiellen Punctes in seinem Schwerpuncte *A* (Fig. 132) vereinigt ist, und wir wollen annehmen, daß derselbe durch eine Kraft ***P*** in Bewegung gesetzt wird, welche ihm einen Stoß nach der geraden Linie *AP* ertheilt, und daß der Körper oder materielle Punct im Puncte *B* dieser geraden Linie von einer Kraft ***Q*** einen Stoß erhält, in Folge dessen er sich nach der Richtung *B**Q*** bewegen würde, und zwar durch den Raum *Bb* in der Zeit, welche er gebraucht, um nach seiner ursprünglichen Richtung die Länge *Bd* zu durchlaufen. Construiren wir das Parallelogramm *Bb**C**d*, dessen zusammenstoßenden Seiten *Bd*, *Bb* die Längen oder Räume ausdrücken, welche der Körper oder materielle Punct vermöge der Wirkung der Kräfte *P* und *Q* während derselben Zeit durchläuft; so gibt die Diagonale *B**C*** dieses Parallelogrammes die neue Richtung an, nach welcher sich der Körper oder materielle Punct bewegt, und zwar durchläuft derselbe die Länge dieser Diagonale in derselben Zeit, in welcher er unter der Wirkung der Kräfte ***P*** und *Q* resp. die Seiten *Bd* und *Bb* durchlaufen würde; denn die Kräfte sind den Geschwindigkeiten proportional und die Regel des Parallelogrammes der Geschwindigkeiten ist, wie wir in §. 207 bewiesen haben, dieselbe, als die des Parallelogrammes der Kräfte. Die Diagonale *BC* drückt also die Resultante *R* der Geschwindigkeiten, welche die Kräfte ***P*** und ***Q*** dem Körper ertheilen, der Größe und Richtung nach aus, und zwar ist diese resultirende Geschwindigkeit gleichförmig, wie die der Componenten.

Nachdem der Körper oder materielle Punct die Diagonale *BC* durchlaufen hat, erhält derselbe von einer Kraft *S* nach der Richtung *CS* wieder einen neuen Stoß, und wenn sich derselbe in Ruhe befände, so würde er vermöge dieses letzten Stoßes in der Zeit, während welcher er auf der Verlängerung der Diagonale *BC* die Länge *Ce* mit der ihm durch die Resultante *R* der Kräfte ***P*** und *Q* ertheilten Geschwindigkeit durchläuft, den Raum ***C**c*** beschreiben.

Construirt man das Parallelogramm *CcDe* und zieht die Diagonale *BD*, so drückt dieselbe die Resultante *U* der dem Körper oder materiellen Puncte durch die Kräfte ***R*** und *S* oder durch die Kräfte ***P***, *Q* und *S* ertheilten Geschwindigkeiten der Größe und Richtung nach aus.

Wenn sich der Körper oder materielle Punct im Endpuncte *D* der Diagonale *CD* befindet und eine nach der Richtung *DV* auf ihn wirkende Kraft *V* demselben eine Geschwindigkeit ertheilt, mit welcher er das Stück *Dk* dieser geraden Linie in derselben Zeit durchlaufen würde, während welcher er auf der Verlängerung der Diagonale *CD*

die Länge Dh durchläuft und man bildet das Parallelogramm $DkEh$; so drückt die Diagonale DE die Resultante W der Kräfte U und V aus, und folglich auch die Größe und Richtung der Geschwindigkeit, welche der Körper oder materielle Punct unter der gleichzeitigen Wirkung der Kräfte U und V annimmt. U. s. f.

Aus diesen Constructionen erhellet, daß ein Körper oder materieller Punct m, auf welchen eine beliebige Anzahl von Kräften P, Q, S, V, *etc.* successive nach verschiedenen Richtungen wirken, ein Stück eines Vieleckes $BCDE\ldots$. beschreibt, und daß derselbe, nachdem er die letzte Seite oder Diagonale durchlaufen hat, fortfährt, sich nach der Verlängerung derselben mit der Geschwindigkeit zu bewegen, welche ihm durch die Resultante aller successiven Kräfte P, Q, S, V, *etc.* ertheilt wird. Der Körper oder materielle Punct m bewegt sich auf jeder Seite des Vieleckes, welches er beschreibt, gleichförmig; aber jeder Stoß, welchen er erhält, verändert zugleich die Richtung und Geschwindigkeit seiner Bewegung, so daß die Seiten des Vieleckes mit verschiedenen Geschwindigkeiten beschrieben werden.

§. 252. Das eben erklärte graphische Verfahren kann nur dazu dienen, einen vorläufigen Begriff von der Entstehung der krummlinigen Bewegung zu geben. Die Umstände dieser Bewegung werden auf eine einfachere Weise vermittelst der Projectionen bestimmt, indem man darauf die Methode der Coordinaten anwendet, wovon wir bereits in §. 35 bei der Zusammensetzung der Kräfte Gebrauch gemacht haben.

Wir wollen den Punct A (Fig. 132) für den Ausgangspunct des Körpers oder materiellen Punctes m oder für den Anfangspunct seiner Bewegung nehmen und durch diesen Punct die beiden rechtwinkligen Axen AX, AY ziehen. Durch P, P', P'', *etc.* wollen wir die Intensitäten der Kräfte bezeichnen, unter deren Wirkung der Körper oder materielle Punct m successive die Seiten AB, BC, CD, *etc.* des Vieleckes beschreibt, so kann jede dieser Kräfte in zwei andere zerlegt werden, welche parallel zu den Axen wirken, so daß die eine der Componenten nach der Axe der x und die andere nach der Axe der y wirkt. Wir wollen die Coordinaten Bp, Bq; Cp', Cq'; Dp'', Dq''; *etc.* ziehen und durch α, β; α', β'; α'', β''; *etc.* die Winkel bezeichnen, welche die Seiten des Vieleckes oder die Richtungen der Bewegung des Körpers mit den Axen oder mit den dazu parallelen Coordinaten bilden; so sind die nach den Axen der x, y gerichteten Componenten resp.:

$$P\cos.\alpha,\ P'\cos.\alpha',\ P''\cos.\alpha'',\ etc.,$$
$$P\cos.\beta,\ P'\cos.\beta',\ P''\cos.\beta'',\ etc.,$$

und wenn man ihre Summen mit X, Y bezeichnet, so hat man:

$$X = P\cos.\alpha + P'\cos.\alpha' + P''\cos.\alpha'' + etc.,$$
$$Y = P\cos.\beta + P'\cos.\beta' + P''\cos.\beta'' + etc.$$

Während der materielle Punct m die Seiten AB, BC, CD, *etc.* beschreibt, beschreiben seine Projectionen auf der Axe der x die Längen Ap, pp', $p'p''$, *etc.* und auf der Axe der y die Längen Aq, qq', $q'q''$, *etc.* Jede Seite des Vieleckes und ihre Projectionen auf die Axen werden in derselben Zeit beschrieben; aber die Bewegung durch die Projection auf der einen Axe findet gerade so statt, wie wenn die ent-

sprechende Projection auf der andern Axe nicht vorhanden wäre, was daher kommt, daß die Bewegung (Geschwindigkeit) eines Körpers, welche Richtung sie auch haben mag, nicht durch die Wirkung einer zweiten Kraft, welche nach einer auf der Richtung seiner Bewegung senkrechten Richtung wirkt, geändert werden kann, und diese Richtung könnte parallel zu sich selbst im Raume verrückt werden, ohne daß eine Veränderung in der Bewegung des Körpers dadurch bewirkt würde. Uebrigens geht die Unabhängigkeit der Bewegungen der Projectionen des materiellen Punctes auf den beiden Axen auch aus den vorhergehenden Gleichungen hervor, weil jede dieser Gleichungen nur aus Gliedern besteht, die sich auf die Projection auf einer Axe beziehen und von den Projectionen auf der andern Axe ganz unabhängig sind.

Die Längen der Seiten des von dem materiellen Puncte *m* beschriebenen Vieleckes sind von den Zeitintervallen abhängig, welche zwischen den Augenblicken der successiven Einwirkungen der Kräfte auf den materiellen Punct liegen. Die Seiten dieses Vieleckes sind sehr klein, wenn diese Wirkungen schnell auf einander folgen und alsdann erhält man statt eines Vieleckes eine krumme Linie für die Trajectorie des beweglichen Punctes oder Körpers.

§. **253.** Wenn ein Körper *M*, welchen wir als eine Masse $= 1$ habend, oder als einen ganz freien materiellen Punct betrachten wollen, durch die successiven Einwirkungen mehrerer Kräfte P, P', P'', *etc.* im Raume in Bewegung gesetzt wird, so beschreibt derselbe im Allgemeinen ein windschiefes Vieleck, dessen Umfang von den Richtungen abhängig ist, nach welchen die Kräfte wirken. Wenn die Seiten dieses Vieleckes unendlich klein sind, so wird sein Umfang eine krumme Linie, welche die Trajectorie des beweglichen Punctes und im Allgemeinen eine Curve von doppelter Krümmung ist. Man bestimmt diese Trajectorie, wenn man die successiven Lagen des beweglichen Punctes auf drei feste Ebenen bezieht, die sich nach drei rechtwinkligen Axen *AX*, *AY*, *AZ* (Fig. **133**) durchschneiden, welche die Axen der Coordinaten *X*, *Y*, *Z* des beweglichen Punctes bilden.

Wir wollen annehmen, daß die durch den Anfangspunct *A* der Coordinaten gehende gerade Linie *AB* die Richtung ist, nach welcher sich der materielle Punct bewegt, indem er der Einwirkung der Kraft P folgt. Durch den Punct *m* dieser geraden Linie wollen wir die drei Ebenen *mm'qm''*, *mpp''m''*, *mpp'm'* resp. parallel zu den Coordinatenebenen der *xy*, *xz*, *yz* legen, die Linien *mp'*, *mp''*, *mq* ziehen und durch α, β, γ die Winkel *mAp'*, *mAp''* und *mAq* bezeichnen, welche die gerade Linie mit den Axen der *x*, *y* und *z* bildet. Wenn *Am* die Kraft P darstellt und man bemerkt, daß diese gerade Linie die Diagonale des Parallelepipedums *pp''Ap'm'mm''q* ist, so kann man die drei Kräfte, welche der Größe und Richtung nach durch die Kanten *Ap'*, *Ap''*, *Aq* oder durch:

$$P\cos.\alpha,\ P\cos.\beta,\ P\cos.\gamma$$

ausgedrückt werden, als die drei Componenten dieser Kraft P betrachten.

Soll der bewegliche Punct *M* die geradlinige Richtung seiner Bewegung und seine Geschwindigkeit verändern, so müssen andere Kräfte

P', P'', *etc.*, deren Richtungen von der der Kraft P verschieden sind, auf ihn wirken, und wenn man die Winkel, welche die Richtungen der Kräfte P', P'', *etc.* mit den Coordinatenaxen bilden resp. mit α', β', γ'; α'', β'', γ''; *etc.* bezeichnet, so werden die zu den Axen parallelen Componenten dieser Kräfte resp. ausgedrückt durch:

$$P' \cos.\alpha',\ P' \cos.\beta',\ P' \cos.\gamma',$$
$$P'' \cos.\alpha'',\ P'' \cos.\beta'',\ P'' \cos.\gamma'',$$
$$\text{etc.}$$

Bezeichnet man die Summen der zu den Coordinatenaxen parallelen Componenten der Kräfte P, P', P'', *etc.* resp. mit X, Y, Z, so hat man die drei folgenden Gleichungen:

$$X = P \cos.\alpha + P' \cos.\alpha' + P'' \cos.\alpha'' + \text{etc.},$$
$$Y = P \cos.\beta + P' \cos.\beta' + P'' \cos.\beta'' + \text{etc.},$$
$$Z = P \cos.\gamma + P' \cos.\gamma' + P'' \cos.\gamma'' + \text{etc.}$$

und jede dieser Gleichungen bezieht sich auf die Projection des beweglichen Punctes auf der entsprechenden Axe.

Die Schlüsse, durch welche wir die Unabhängigkeit zwischen den Bewegungen der Projectionen des materiellen Punctes auf den beiden in einer Ebene liegenden Axen dargethan haben, sind auch auf die Bewegungen der Projectionen auf drei auf einander senkrechten Axen anwendbar, woraus folgt, daß sich jede Projection des materiellen Punctes auf einer der Axen gerade so bewegt, wie wenn die Projectionen auf die beiden andern Axen gar nicht vorhanden wären.

Diese Unabhängigkeit zwischen den Bewegungen nach den Axen findet immer statt, was für eine Bewegung der materielle Punct auch haben mag, er mag unter der Wirkung der durch successive augenblickliche Impulse auf ihn wirkenden Kräfte ein Vieleck beschreiben, oder seine Trajectorie mag eine krumme Linie sein, welche durch die vereinigte Wirkung einer augenblicklichen und einer oder mehrerer beschleunigender Kräfte erzeugt wird.

Die krummlinige Bewegung eines materiellen Punctes ist also auf die geradlinigen Bewegungen seiner Projectionen nach drei festen auf einander senkrechten Axen zurückgeführt, selbst für den allgemeinsten Fall, wo die Trajectorie eine Curve von doppelter Krümmung ist, und wenn sie eine ebene Curve ist, so wird die Bewegung des materiellen Punctes durch die Bewegungen seiner Projectionen auf zwei in der Ebene dieser Curve liegenden rechtwinkligen Axen bestimmt.

§. 254. Durch einfache Betrachtungen, welche auf den Principien der analytischen Geometrie beruhen, sind wir zu den eben angeführten merkwürdigen Folgerungen über die Zerlegung der krummlinigen Bewegung in geradlinige Bewegungen und über die zwischen den letztern stattfindende Unabhängigkeit gelangt, und wir wollen nun die Differentialgleichungen abzuleiten suchen, deren man zur Auflösung einiger von diesen Verbindungen der Bewegungen abhängigen Hauptaufgaben bedarf.

Wir wollen annehmen, daß sich der materielle Punct M am Ende einer beliebigen Zeit t im Puncte m befindet, dessen Coordinaten x, y, z sind und daß er vermöge der auf ihn wirkenden Kräfte während des

Zeitelementes dt den kleinen Weg mc oder das Element ds seiner Trajectorie beschreibt; so wird seine Geschwindigkeit durch $\frac{ds}{dt}$ und die Geschwindigkeiten seiner Projectionen auf den Coordinatenaxen werden resp. durch $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ ausgedrückt, und die Bewegung jeder Projection ist von denen der beiden andern unabhängig.

Am Ende der Zeit $t + dt$ ist die Geschwindigkeit $\frac{dx}{dt}$ der Projection des materiellen Punctes M auf der Axe der x gleich $\frac{dx}{dt} + d.\frac{dx}{dt}$, d. h. diese Geschwindigkeit nimmt während des Zeitelementes dt um die Größe $d\frac{dx}{dt}$ oder $\frac{d^2x}{dt}$ zu, weil das Zeitelement dt als constant vorausgesetzt wird.

Die allgemeine Gleichung für die Geschwindigkeit $v = \frac{dx}{dt}$ gibt $dv = \frac{d^2x}{dt}$, und wenn man in der Gleichung $dv = \varphi dt$ in §. 209, X für φ setzt, so sieht man, daß der Zuwachs $\frac{d^2x}{dt}$ der Geschwindigkeit $\mathbf{X}dt$ gleich ist, welche durch die Gesammtresultante X während des Zeitelementes dt erzeugt wird, so daß man folgende Gleichung hat:

$$\frac{d^2x}{dt} = Xdt.$$

Ebenso ergibt sich, daß man für die Geschwindigkeiten der Projectionen des materiellen Punctes auf den beiden andern Axen die beiden folgenden Gleichungen hat:

$$\frac{d^2y}{dt} = Ydt, \frac{d^2z}{dt} = Zdt.$$

Dividirt man durch dt, so erhält man die allgemeinen Gleichungen für die krummlinige Bewegung:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X, \frac{d^2y}{dt^2} = Y, \frac{d^2z}{dt^2} = Z,$$

welche die geradlinigen Bewegungen der Projectionen des materiellen Punctes auf den Coordinatenaxen ausdrücken, und wenn sich der materielle Punct in einer Ebene bewegt, oder wenn seine Trajectorie eine ebene Curve ist, so hat man nur zwei solcher Gleichungen.

Multiplicirt man jede dieser drei Gleichungen durch eine der darin nicht vorkommenden Coordinaten, nämlich die erste durch y und die zweite durch x, die dritte durch x und die erste durch z, die dritte durch y und die zweite durch z und bildet dann zwischen jedem Paare der Producte die Differenz; so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} \frac{yd^2x - xd^2y}{dt} &= (Xy - Yx)\,dt, \\ \frac{xd^2z - zd^2x}{dt} &= (Zx - Xz)\,dt, \\ \frac{zd^2y - yd^2z}{dt} &= (Yz - Zy)\,dt. \end{aligned}\right\} (a)$$

Es sei *Am* die gerade Linie, welche die Kraft oder die Resultante aus allen auf den beweglichen Punct *M* wirkenden Kräften der Größe und Richtung nach darstellt, so werden die Componenten *X*, *Y*, *Z* dieser Kraft durch die Kanten *Ap'*, *Ap''*, *Aq* des Parallelepipedums *Ap''pp'm'mm''q*, dessen Diagonale *Am* ist, oder durch die Coordinaten *x*, *y*, *z* des Punctes *m* ausgedrückt und man hat:

$$X : Y : Z = x : y : z,$$

folglich: $$Xy = Yx,\ Xz = Zx,\ Yz = Zy.$$

Hieraus folgt, daß die zweiten Theile der vorhergehenden Gleichungen Null sind, und ihre ersten Theile sind die Differentiale von:

$$\frac{ydx - xdy}{dt},\ \frac{xdz - zdx}{dt},\ \frac{zdy - ydz}{dt}.$$

Bezeichnet man die Constanten mit *c*, *c'*, *c''*, so verwandeln sich diese drei Gleichungen in:

$$\left.\begin{aligned} ydx - xdy &= cdt,\ xdz - zdx = c'dt, \\ zdy - ydz &= c''dt. \end{aligned}\right\} (b)$$

§. 255. Um die geometrische Bedeutung dieser Formeln zu erklären, wollen wir bloß die Projection der von dem beweglichen Puncte beschriebenen Trajectorie auf die Ebenen *xy* betrachten, so ist $Z = o$, $z = o$ und man behält bloß die erste Gleichung $ydx - xdy = cdt$, welche der analytische Ausdruck folgendes Lehrsatzes ist.

Wenn auf den beweglichen materiellen Punct eine einzige Kraft wirkt, welche beständig gegen einen festen Mittelpunct gerichtet ist, so beschreibt die von diesem Mittelpuncte nach dem beweglichen Puncte gezogene gerade Linie oder der **Radiusvector** bei seiner Drehung um diesen Mittelpunct Sectoren, deren Flächen den zu ihrem Beschreiben erforderlichen Zeiten proportional sind.

Zunächst wollen wir bemerken, daß, wenn ein materieller Punct oder ein ganz freier Körper, dessen Masse man sich in seinem Schwerpuncte concentrirt denkt, durch einen Stoß oder durch einen augenblicklichen Impuls in Bewegung gesetzt wird und zugleich eine von einem festen Mittelpuncte ausgehende stetige beschleunigende Kraft auf ihn wirkt; so ist die Trajectorie, welche dieser materielle Punct beschreibt, eine ebene Curve, die in der durch den festen Mittelpunct *A* (Fig. 134) und durch zwei successive Lagen *M*, *M'* des materiellen Punctes geht. Denn da auf beiden Seiten dieser Ebene alles gleich ist, so ist kein Grund vorhanden, weswegen sich dieser materielle Punct eher nach der einen, als nach der andern Seite von dieser Ebene entfernen sollte.

Wenn der feste Mittelpunct A der Anfangspunct der Coordinaten ist, so sei DEM die Trajectorie, welche der bewegliche Punct am Ende der Zeit t in der Ebene der Coordinatenaxen beschrieben hat, und wir wollen nach dem Puncte M, wo sich der bewegliche Punct befindet, den Radiusvector AM und die Ordinate MP ziehen. Nach Verlauf der Zeit $t + dt$ befindet sich der bewegliche Punct im Puncte M', so daß er während des Zeitelementes dt den kleinen Bogen MM' oder das Element ds seiner Trajectorie beschrieben hat. Wir wollen den Radiusvector AM', die Ordinate $M'P'$, die Parallele MH zu der Axe AX und endlich die Linie AH ziehen; so ist offenbar:

$$\text{Ausschnitt } AEM = \text{Abschnitt } AEMP - \text{Dreieck } AMP.$$

Wenn man das Dreieck MHM', welches eine unendlich kleine Größe der zweiten Ordnung ist, unberücksichtigt läßt, so ist das Rechteck $MP \times PP' = ydx$, das Differential des Abschnittes $AEMP$, das Dreieck $AMP = {}^1/_2 xy$, und wenn man differentiirt:

$$d.\text{Dreieck } AMP = {}^1/_2 d.xy = {}^1/_2 ydx + {}^1/_2 xdy.$$

Wird das Differential des Abschnittes $AEMP$ und des Dreieckes AMP in die obige Gleichung substituirt, so erhält man:

$$\text{Ausschnitt } AEM = {}^1/_2 \int (ydx - xdy).$$

Außerdem hat man die Gleichung:

$$ydx - xdy = cdt,$$

woraus folgt:

$$\int (ydx - xdy) = ct,$$

und wenn man dieses Integral substituirt, so kommt:

$$\text{Ausschnitt } AEM = {}^1/_2 ct.$$

Eine Constante braucht nicht hinzugefügt zu werden, weil zu gleicher Zeit Ausschnitt $AEM = o$ und $t = o$ ist. Folglich ist die Fläche des von dem Radiusvector des beweglichen Punctes um dem festen Mittelpunct beschriebenen Sectors der dazu gebrauchten Zeit proportional, und in diesem Satze besteht das sogenannte Princip der Erhaltung der Flächen.

§. 256. Um die Rechnungen bei der Anwendung dieses Lehrsatzes zu erleichtern, wendet man, wie wir später sehen werden, Polarcoordinaten an, und man muß daher den durch solche Coordinaten ausgedrückten Werth des Elementarsectors AMM' kennen.

Es sei x die Abscisse und y die Ordinate des beweglichen Punctes, wenn er sich im Puncte M befindet. Ferner bezeichne r den Radiusvector AM und u den Winkel MAX, welchen er mit der Axe der x bildet; so ist der Winkel, welchen der Radiusvector AM' mit derselben Axe bildet:

$$MAX - MAM' = u - du,$$

und die nach den Axen gerichteten Componenten werden ausgedrückt durch:

$$x = r\,cos.\,u,\quad y = r\,sin.\,u.$$

Nimmt man hiervon die Differentiale, indem man bemerkt, daß das Differential du hier negativ ist, so findet man:

$$dx = cos.\,udr + r\,sin.\,udu,\quad dy = sin.\,udr - r\,cos.\,udu.$$

Werden diese Gleichungen mit den beiden vorhergehenden verbunden und die Reductionen verrichtet, so kommt:

$$ydx - xdy = r^2 du,$$

und wenn man diese Gleichung mit der ersten der Gleichungen (b) vergleicht, so ergibt sich:

$$r^2 du = c dt.$$

Dieser Ausdruck des Sectors AMM' in Polarcoordinaten ergibt sich leicht aus folgender geometrischen Construction.

Aus dem Puncte A beschreibe man mit dem Halbmesser $AM = r$ den Kreisbogen MN, welcher den Radiusvector AM' im Puncte N schneidet; so ist das Dreieck MNM' eine unendlich kleine Größe der zweiten Ordnung, welche vernachlässigt werden kann und der Ausschnitt AMM' fällt mit dem Ausschnitte $AMN = {}^1/_2 r \times$ Bog. MN zusammen und außerdem ist der Winkel MAN oder der mit dem Halbmesser $= 1$ zwischen seinen Schenkeln beschriebene Bogen, welcher sein Maaß ist, $= du$. Folglich ist die Länge des Bogens $MN = rdu$ und die Fläche des Ausschnittes $AMN = {}^1/_2 r \times rdu = {}^1/_2 r^2 du$.

Die Geschwindigkeit eines Körpers in einem beliebigen Puncte M seiner Bahn wird ausgedrückt durch $v = \frac{ds}{dt}$, d. h. die Geschwindigkeit bei der krummlinigen Bewegung wird ausgedrückt durch den Quotienten aus dem Elemente der beschriebenen Curve und aus dem entsprechenden Zeitelemente, was dem Ausdrucke der Geschwindigkeit eines sich nach einer geraden Linie bewegenden Körpers analog ist (§. 208). Diese Analogie ist leicht zu begreifen, wenn man die Trajectorie oder die von dem Körper beschriebene Curve als ein Vieleck von unendlich vielen, unendlich kleinen Seiten betrachtet, und wenn man annimmt, daß die auf den Körper wirkende beschleunigende Kraft sich während des Zeitelementes dt, welches zum Durchlaufen jeder dieser Seiten erfordert wird, nicht ändert, so daß hiernach der Körper jede Seite des Vieleckes mit einer gleichförmigen Bewegung beschreibt.

Wenn die beschleunigende Kraft, welche dem Körper oder materiellen Puncte eine krummlinige Bewegung ertheilt, plötzlich aufhörte zu wirken, wenn er sich im Puncte M befindet, so würde er vermöge seiner Trägheit die erlangte Geschwindigkeit unverändert beibehalten und sich mit dieser Geschwindigkeit nach der Richtung der Tangente MT fortbewegen.

Die Componenten der Geschwindigkeit eines materiellen Punctes sind die Projectionen dieser Geschwindigkeit auf die Axen, worauf seine Trajectorie bezogen ist.

Es sei $mc = ds$ (Fig. 133) das von dem materiellen Puncte während des Zeitelementes dt beschriebene Element der Trajectorie, welche er im Raume beschreibt, so sind $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ die Componenten oder die Projectionen seiner Geschwindigkeiten auf die Axen der x, y, z, und wenn man bemerkt, daß die rechtwinkligen Dreiecke mdc, pkn geben:

$$(mc)^2 = (md)^2 + (dc)^2 = (pk)^2 + (nk)^2 + (dc)^2,$$

so hat man: $$v^2 = \frac{ds^2}{dt^2} = \frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2}.$$

§. 257. Die drei Gleichungen:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X, \frac{d^2y}{dt^2} = Y, \frac{d^2z}{dt^2} = Z$$

lassen sich auf folgende Weise in eine einzige zusammenziehen. Multiplicirt man nämlich die erste mit $2dx$, die zweite mit $2dy$, die dritte mit $2dz$ und addirt die Producte zusammen, so kommt:

$$\frac{2dxd^2x + 2dyd^2y + 2dzd^2z}{dt^2} = 2(Xdx + Ydy + Zdz).$$

Der erste Theil dieser letzten Gleichung ist das Differential von $\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}$ oder nach dem vorhergehenden §. von v^2. Wenn man diesen letzten Werth subsituirt, so erhält man:

$$d.v^2 = 2(Xdx + Ydy + Zdz),$$

und wenn man integrirt:

$$v^2 = const. + 2\int(Xdx + Ydy + Zdz).$$

Die Constante ist die Geschwindigkeit, welche der materielle Punct in dem Augenblicke hatte, worin die beschleunigenden Kräfte X, Y, Z anfingen zu wirken, und wenn man sie mit U^2 bezeichnet und in den ersten Theil der Gleichung setzt, so verwandelt sich diese in:

$$v^2 - U^2 = 2\int(Xdx + Ydy + Zdz). \quad (c).$$

Es gibt einen sich sehr weit erstreckenden Fall, in welchem der zweite Theil dieser Gleichung ein genaues Differential ist, nämlich wenn die beschleunigende Kraft beständig gegen einen festen Mittelpunct gerichtet ist. Wir haben bereits früher gesehen, daß man das Integral direct erhält, wenn sich der materielle Punct um diesen Mittelpunct bewegen muß, und um eine andere sehr einfache Anwendung mitzutheilen, wollen wir folgende Aufgabe zu lösen suchen.

Wenn ein Körper, welchen wir als einen materiellen Punct betrachten wollen, mit der anfänglichen Geschwindigkeit u vertical in die Höhe geworfen wird, zu bestimmen, bis zu welcher Höhe er aufsteigt, wenn man annimmt, daß die Schwere, welche die anfängliche Geschwindigkeit allmählig aufhebt, eine constante verzögernde Kraft ist, und wenn man von dem Widerstande der Luft abstrahirt.

Der feste Punct, gegen welchen die Schwere gerichtet ist, ist der Mittelpunct der Erde, und wenn man sich eine durch diesen Mittelpunct und durch den Schwerpunct des Körpers gehende gerade Linie denkt, welche wir zur Axe der x nehmen wollen; so ist dieselbe die Verticale, nach welcher sich der Körper bewegt. Die zu den beiden andern Axen parallelen Componenten sind Null, d. h. es ist $Y = 0$, $Z = 0$ und die letzte Gleichung verwandelt sich in:

$$v^2 - U^2 = 2\int Xdx.$$

Setzt man für X die Größe $-g$, welche die negativ genommene constante beschleunigende Kraft der Schwere ausdrückt, weil durch ihre

Wirkung allmählig die anfängliche Geschwindigkeit des Körpers aufgehoben wird, und integrirt man, so erhält man:

$$v^2 - U^2 = -2gx, \; x = -\frac{v^2 - U^2}{2g} = \frac{U^2 - v^2}{2g}.$$

Diese Formel stimmt mit der in §. 194 für die Auflösung derselben Aufgabe gefundenen überein, und wenn man sie mit der Gleichung $v = \frac{dx}{dt}$, welche für jede Art von Bewegung stattfindet, verbindet, so ergeben sich die beiden andern Hauptgleichungen für die gleichförmig veränderliche Bewegung.

Wir haben bisher nur einen einzigen Körper betrachtet, welchen wir uns als auf einen materiellen Punct von der Masseneinheit reducirt dachten, worauf die beschleunigende Kraft wirkt. Aber in dem allgemeinen Falle, wo mehrere Körper und die auf sie wirkenden Kräfte ein System oder eine Maschine bilden, verwandelt sich die Gleichung (*c*), wenn *m* die Masse jedes beweglichen Körpers und *S* die Summe der ähnlichen Glieder der Gleichung bezeichnet, in folgende:

$$Smv^2 - SmU^2 = 2\int S(m\mathbf{X}dx + mYdy + mZdz).$$

Durch diese Gleichung wird das bereits bei dem Stoße vollkommen elastischer Körper (§. 242) erwähnte Princip der Erhaltung der lebendigen Kräfte auf eine weit allgemeinere Weise ausgedrückt; aber um diese Gleichung zu vereinfachen und sie leichter auf die Berechnung der Maschinen anwenden zu können, gibt man dem zweiten Theile eine andere Form, welche man auf folgende Weise erhält.

Es sei *P* eine der auf das System wirkenden Kräfte, *AB* (Fig. 135) die gerade Linie, welche diese Kraft ausdrückt und $BC = ds$ der von ihrem Angriffspuncte während des Zeitelementes *dt* durchlaufene Raum. Ferner wollen wir die drei rechtwinkligen Axen *AX*, *AY*, *AZ* und die Linie *AC* ziehen; so werden die Kanten des Parallelepipedums, dessen Diagonale *AC* ist, durch $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ ausgedrückt und folglich haben wir:

$$(AC)^2 = (x + dx)^2 + (y + dy)^2 + (z + dz)^2$$
$$= x^2 + y^2 + z^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 + 2(xdx + ydy + zdz).$$

Wenn man aus dem Puncte *C'* auf die gerade Linie *AB* oder auf ihre Verlängerung das Perpendikel *C'D* fällt, so gibt das rechtwinklige Dreieck *ADC*:

$$(AC)^2 = (AD)^2 + (CD)^2 = (AB + BD)^2 + (BC)^2 - (BD)^2$$
$$= (AB)^2 + (BC)^2 + 2AB \times BD.$$

Die geraden Linien *AB* und *BC* können als die Diagonalen der beiden Parallelepipeda betrachtet werden, deren correspondirende Kanten *x*, *y*, *z* und *dx*, *dy*, *dz* sind, und wenn man für die Quadrate der Diagonalen dieser Parallelepipeda die Quadrate ihrer Kanten, für die gerade Linie *AB* die ihr proportionale Kraft *P* und *dp* für die Projection *BD* von *BC* auf die Richtung der Kraft *P* substituirt; so erhält man:

$$(AC)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 + 2Pdp.$$

Dieser Werth von $(AC)^2$ und der vorhergehende Werth derselben Größe unterscheiden sich nur durch die letzten Glieder von einander, welche einander gleich sein müssen, so daß man die Gleichung hat:

$$xdx + ydy + zdz = Pdp.$$

Statt der Coordinaten x, y, z kann man die Componenten mX, mY, mZ der Kraft P setzen, wodurch sich die letzte Gleichung in folgende verwandelt:

$$mXdx + mYdy + mZdz = Pdp.$$

Wenn man eine andere Kraft des Systemes mit Q bezeichnet, indem man annimmt, daß sie nach einer der Richtung der Kraft P entgegengesetzten Richtung wirkt, so ergibt sich auf dieselbe Weise, wie vorhin:

$$mXdx + mYdy + mZdz = -Qdq.$$

Werden also alle Kräfte des Systemes in zwei Gruppen getheilt, wovon die der einen Gruppe nach einem gewissen Sinne und die der andern Gruppe nach entgegengesetztem Sinne wirken, so nimmt die allgemeine Gleichung zwischen den Kräften folgende Form an:

$$Smv^2 - SmU^2 = 2\int SPdp - 2\int SQdq.$$

Die beiden Glieder des ersten Theiles dieser Gleichung sind die Summen der lebendigen Kräfte aller Körper des Systemes in einem beliebigen Augenblicke und im Anfange der Bewegung. Der Unterschied dieser beiden Summen ist unabhängig von den Curven, welche die Körper während der Zeit t beschreiben, indem sie von ihren anfänglichen Lagen zu denen übergehen, worin sie sich am Ende dieser Zeit befinden.

Aus diesem allgemeinen Gesetze der Bewegung oder aus dem Principe der Erhaltung der lebendigen Kräfte, welches durch die vorhergehende Gleichung ausgedrückt wird, folgt, daß, wenn das System sich zu zwei verschiedenen Zeiten in derselben Lage befindet, die lebendigen Kräfte der Körper, welche das System bilden, zu diesen beiden Zeiten dieselben sind, was für Wege sie auch durchlaufen haben mögen. Später werden wir diese Gleichung anwenden und an Beispielen zeigen, wie man sich derselben zur Berechnung der Effecte bedienen kann, welche gegebene Kräfte hervorbringen können, wenn sie zur Bewegung der Maschinen angewandt werden.

Achtes Kapitel.

Von der Wurfbewegung.

§. 258. Ein geworfener Körper (Projectil) ist ein solcher, welcher durch eine augenblicklich wirkende Kraft in Bewegung gesetzt und dann der stetigen Wirkung der Schwere überlassen wird.

Das Problem der Wurfbewegung umfaßt auch die Theorie der Feuergewehre oder Geschütze, bei welchen die Explosion des Pulvers die bewegende Kraft ist. Dieses Problem, welches in der Bestimmung der Bahn eines geworfenen Körpers besteht, ist für den rein hypothetischen Fall erst nach der Entdeckung der Gesetze der Bewegung des Falles schwerer Körper gelöst; denn zu der Auflösung desselben war die Verbindung der dem geworfenen Körper durch den momentanen Stoß oder Impuls ertheilten gleichförmigen Bewegung mit der ihm durch die Schwere ertheilten gleichförmig veränderlichen Bewegung erforderlich, welches Galiläi zuerst gethan und diese Entdeckung im Jahre 1638 in einem seiner Dialoge bekannt gemacht hat.

Bei der Auflösung dieser Aufgabe wollen wir mit Galiläi zuvörderst annehmen, daß die Bewegung im leeren Raume stattfinde, d. h. wir wollen von dem Widerstande der Luft abstrahiren und dann die allgemeine Auflösung der Aufgabe suchen, indem wir diesen Widerstand in Rechnung bringen.

Die Geschützkugeln sind gewöhnlich von Gußeisen und wir wollen annehmen, daß sie eine gleichförmige Dichtigkeit und eine genau kugelförmige Gestalt haben; so fällt ihr Schwerpunct mit dem Mittelpuncte der Figur zusammen und die Bewegung dieses Punctes ist dieselbe, als die der Kugel.

Es sei A der Ausgangspunct des mit der anfänglichen Geschwindigkeit u nach der Richtung AL (Fig. 139) geworfenen Körpers, auf welchen zugleich die Schwere wirkt, vermöge welcher er während der Zeiteinheit oder während der Secunde in verticaler Richtung den Raum $g = 9^m, 8089$ durchfällt. Vermöge der Verbindung dieser anfänglichen Geschwindigkeit des Körpers mit der ihm durch die Schwere ertheilten Geschwindigkeit beschreibt derselbe in der durch die gerade Linie AL gelegten Verticalebene die Curve AMB, und zur Bestimmung dieser Curve, welche die Trajectorie dieses Körpers genannt wird, wollen wir in ihrer Ebene zwei rechtwinklige Axen AX, AY ziehen, welche sich im Puncte A so schneiden, daß die erste horizontal und die zweite vertical ist.

Es sei N der Punct, wo sich der Körper nach Verlauf der Zeit t befinden würde, wenn nur die Kraft auf ihn gewirkt hätte, welche ihm die anfängliche Geschwindigkeit u ertheilt hat, und M sei der Punct, wo sich der Körper nach Verlauf derselben Zeit unter der gleichzeitigen Wirkung dieser Kraft und der Schwere befindet. Durch den Punct M wollen wir zu der geraden Linie AL eine Parallele ziehen, welche die hinreichend verlängerte verticale Axe AY in dem Puncte Q trifft, und wir wollen die Trajectorie auf die schiefen Axen AY', AL beziehen; so wird der Punct M dieser Curve durch die Abscisse $AQ = MN = x'$ und durch die Ordinate $QM = AN = y'$ bestimmen.

Die Abscisse x' drückt die verticale Länge aus, durch welche der Körper vermöge der Wirkung der Schwere in der Zeit t fällt. Es ist also $x' = {}^1/_2 gt^2$, und am Ende derselben Zeit ist die Ordinate $y' = ut$, welche den Raum ausdrückt, den der Körper durchlaufen haben würde, wenn er bloß der Wirkung der augenblicklichen Kraft hätte folgen können, welche ihn in Bewegung gesetzt hat.

Erhebt man diese letzte Gleichung zum Quadrate und dividirt sie dann durch die vorhergehende Gleichung, so kommt:

$$\frac{y'^2}{x'} = \frac{u^2}{{}^1/_2 g},\ y'^2 = \frac{2u^2}{g} x',$$

und wenn man die der anfänglichen Geschwindigkeit u entsprechende Fallhöhe mit h bezeichnet, so hat man:

$$u^2 = 2gh,\ y'^2 = 4hx'.$$

Aus diesem Resultate sieht man, daß das Quadrat der Ordinate dem Producte aus der zugehörigen Abscisse und aus einer constanten Linie gleich ist, woraus folgt, daß die Trajectorie AMB eine Parabel ist.

Wir wollen diese letzte Gleichung nun so transformiren, daß die Trajectorie auf die rechtwinkligen Axen AX, AY bezogen wird, wovon die erste horizontal ist. Es sei $XAL = \alpha$ der Winkel, welchen die Richtung des Wurfes AL mit der horizontalen Axe AX bildet, und aus dem Puncte M der Trajectorie wollen wir auf diese Axe das Perpendikel MP fällen; so sind $AP = x$, $PM = y$ die rechtwinkligen Coordinaten des Punctes M. Wenn die Ordinate y hinreichend verlängert wird, so schneidet sie die gerade Linie AL in dem Puncte N und das rechtwinklige Dreieck APN gibt:

$$NP = x\ tang.\ \alpha,\ x' = NP - MP = x\ tang.\ \alpha - y,$$

$$y'^2 = x^2 + x^2\ tang.^2\ \alpha = x^2\ \frac{cos.^2\ \alpha + sin.^2\ \alpha}{cos.^2\ \alpha} = \frac{x^2}{cos.^2\ \alpha}.$$

Substituirt man diese Werthe für die schiefwinkligen Coordinaten x' und y', so erhält man:

$$\frac{x^2}{cos.^2\ \alpha} = 4h\ (x\ tang.\ \alpha - y),$$

oder vielmehr: $$y = x\ tang.\ \alpha - \frac{x^2}{4h\ cos.^2\ \alpha}.$$

Dieses ist die Gleichung der Parabel oder der Trajectorie des geworfenen Körpers im leeren Raume, auf rechtwinklige Axen bezogen, welche sich im Ausgangspuncte des geworfenen Körpers durchschneiden.

Setzt man $x = o$, so hat man $y = o$, und wenn man $y = o$ setzt, so hat man:

$$x = o,\ x = 4h\ tang.\ \alpha\ cos.^2\ \alpha = 4h\ sin.\ \alpha\ cos.\ \alpha,$$

und wegen $sin.\ \alpha\ cos.\ \alpha = {}^1/_2\ sin.\ 2\alpha$ folglich:

$$x = 2h\ sin.\ 2\alpha = AB.$$

Diese Entfernung AB zwischen den beiden Puncten, worin die Trajectorie die horizontale Axe AX durchschneidet, wird die Wurfweite genannt. Die größte verticale Höhe, auf welche der Körper steigt, wird die Wurfhöhe genannt, und die ihr entsprechende Abscisse, welche die Hälfte der Wurfweite ist, wird ausgedrückt durch:

$$x = h\ stn.\ 2\alpha = 2h\ sin.\ \alpha\ cos.\ \alpha = AD,$$

und wenn man diesen Werth in die Gleichung der Trajectorie substituirt, so findet man für die Ordinate, welche diese Höhe ausdrückt:

$$y = h \sin.^2 \alpha = CD.$$

Wenn man in den beiden vorhergehenden Gleichungen die Coordinaten x, y miteinander vertauscht und dann das Quadrat der ersten Gleichung durch die zweite dividirt, so erhält man:

$$y^2 = 4hx \cos.^2 \alpha.$$

Dieses ist die Gleichung der auf ihren Scheitel C bezogenen Parabel, indem die Abscissen auf der Axe CD genommen werden und der Coefficient $4h \cos.^2 x$ ist ihr Parameter.

Um diese Formel auf ein Zahlenbeispiel anzuwenden, wollen wir annehmen, daß der Wurfwinkel $\alpha = 60°$ und die anfängliche Wurfgeschwindigkeit $u = 500$ Fuß $= 162^m, 42$ in der Secunde ist.

Die dieser Geschwindigkeit entsprechende Fallhöhe ist:

$$h = \frac{u^2}{2g} = \frac{(162,42)^2}{2 \times 9,8089},$$

und wenn man mit Logarithmen rechnet, so hat man:

$$\begin{aligned} 2 \log. 162,42 &= 4,4212790 \\ \text{dec. Erg. } \log. 2 &= 9,6989700 \\ \text{dec. Erg. } \log. 9,8089 &= 9,0083797 \\ \log. h &= 23,1286287, \end{aligned}$$

also: $h = 1344,71.$

Vermittelst dieses Werthes von h findet man die Wurfhöhe:

$$y = h \sin.^2 \alpha$$

$$\begin{aligned} \log. h &= 3,1286287 \\ 2 \log. \sin. 60° &= 19,8750612 \\ \log. y &= 23,0036899, \end{aligned}$$

also: $y = 1008,53.$

Der Werth des Parameters reducirt sich auf den von h, so daß die Gleichung der auf ihren Scheitel bezogenen Trajectorie folgende ist:

$$y^2 = 1344,71\, x,$$

und wenn man $x = 1008,53$ setzt, so kommt:

$$y = \pm 1164^m, 552 = \pm DA,$$

und jeder dieser Werthe von y ist die Hälfte der Wurfweite.

§. 259. Wir wollen nun untersuchen, unter was für einem Winkel ein Körper bei einer bekannten anfänglichen Geschwindigkeit geworfen werden muß, um einen durch seine Coordinaten gegebenen Punct zu erreichen.

Die Auflösung dieser Aufgabe besteht darin, den Wurfwinkel α oder eine seiner trigonometrischen Linien aus der Gleichung der Trajectorie abzuleiten. Wenn man zu dem Zwecke in diese Gleichung den Werth $\frac{1}{\cos.^2 \alpha} = 1 + \tang.^2 \alpha$ setzt, so verwandelt sie sich in:

$$\frac{x^2}{4h}(1 + tang.^2\alpha) - x\,tang.\,\alpha = -y,$$

und wenn man durch den Factor $\frac{x^2}{4h}$ dividirt und das erste Glied in den zweiten Theil setzt, so erhält man die Gleichung des zweiten Grades:

$$tang.^2\alpha - \frac{4h}{x}tang.\,\alpha = -\frac{4hy}{x^2} - 1,$$

welche gibt: $$tang\,\alpha = \frac{2h}{x} \pm \frac{1}{x}\sqrt{4h^2 - 4hy - x^2}.$$

Hieraus sieht man, daß man der Kanone zwei verschiedene Richtungen geben kann, so daß das Ziel, welches erreicht werden soll, im Durchschnittspuncte der beiden beschriebenen Trajectorien liegt.

Wenn das Ziel, welches man erreichen will, durch seine Coordinaten gegeben ist, und man substituirt ihre Werthe für x, y in die vorhergehende Gleichung, so gibt dieselbe die Tangenten der beiden Wurfwinkel.

Gesetzt der Punct B der horizontalen Axe AX wäre das zu erreichende Ziel, so ist $y = o$ und die Gleichung verwandelt sich in:

$$tang.\,\alpha = \frac{2h}{x} \pm \frac{1}{x}\sqrt{(2h + x)(2h - x)}.$$

Außerdem ist, wie im vorhergehenden Beispiele, die der anfänglichen Geschwindigkeit entsprechende Fallhöhe $h = 1344^m,7$, die Wurfweite oder die Abscisse $x = 2329^m,1$ und vermittelst der Logarithmentafeln findet man:

$$\begin{aligned} log.\,2h &= 3,4296554 \\ log.\,x &= \underline{3,3671881} \\ log.\frac{2h}{x} &= 0,0622673, \end{aligned}$$

also: $$\frac{2h}{x} = 1,154695.$$

$$\begin{aligned} {}^1/_2\,log.\,(2h + x) &= 1,8502869 \\ {}^1/_2\,log.\,(2h - x) &= 1,2783321 \\ \text{dec. Erg. } log.\,x &= \underline{6,6328119,} \\ log.\frac{1}{x}\sqrt{(2h+x)(2h-x)} &= 9,7614309, \end{aligned}$$

also: $$\frac{1}{x}\sqrt{(2h + x)(2h - x)} = 0,577339$$

und: $$tang.\,\alpha = 1,154695 \pm 0,577339.$$

Der größte Werth von $tang.\,\alpha$ entspricht dem Winkel $\alpha = 60°$ und der kleinste Werth dem Winkel $\alpha = 30°$. Wenn man also die Axe der Kanone nach der geraden Linie richtet, welche mit der Horizontalaxe einen dieser beiden Winkel bildet, so erhält man die Wurfweite $= 2329^m,1$.

Wenn die Wurzelgröße $= o$ ist, so gestattet die Aufgabe nur eine Auflösung, man hat $x = 2h$, $tang.\,\alpha = \frac{2h}{x} = 1$, also Winkel $\alpha = 45^\circ$ und $x = AB' = 2689^m,4$, und diese Wurfweite ist die größte, welche man mit der anfänglichen Geschwindigkeit von $162^m,42$ erhalten kann.

Wenn $4h^2 < 4hy + x^2$ ist, so wird die Wurzelgröße imaginär, also die Aufgabe unmöglich, d. h. das vorgesteckte Ziel kann bei keinem Wurfwinkel erreicht werden.

§. 260. Die Zeit t, welche der geworfene Körper gebraucht, um die Trajectorie zu durchlaufen, ist der gleich, welche erforderlich ist, um die Wurfweite AB mit der gleichförmigen Geschwindigkeit $u\,cos.\,\alpha$ zu durchlaufen; denn in §. 252 haben wir gesehen, daß die Regeln der Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte auch auf die Zusammensetzung und Zerlegung der Geschwindigkeiten anwendbar sind, und folglich hat man:

$$t = \frac{AB}{u\,cos.\,\alpha} = \frac{2329,1}{162,42\,cos.\,60} = 28'',68.$$

Wenn man die Geschwindigkeit des geworfenen Körpers in einem beliebigen Puncte M seiner Bahn mit v bezeichnet, so hat man:

$$v^2 = \frac{ds^2}{dt^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{dt^2}.$$

Zerlegt man die anfängliche Geschwindigkeit u parallel zu den Axen, so erhält man:

$$\frac{dx}{dt} = u\,cos.\,\alpha,\ \frac{dy}{dt} = u\,sin.\,\alpha - gt,$$

und wenn man die Werthe der Quadrate dieser Differentialverhältnisse substituirt, so gibt die erste Gleichung, wenn man bemerkt, daß $sin.^2\,\alpha + cos.^2\,\alpha = 1$ ist:

$$v^2 = u^2 - (2u\,sin.\,\alpha - gt)\,gt.$$

Integrirt man die zweite Differentialgleichung, so erhält man:

$$y = ut\,sin.\,\alpha - {}^1/_2 gt^2,$$

woraus folgt: $$t = \frac{u\,sin.\,\alpha \pm \sqrt{u^2\,sin.^2\,\alpha - 2gy}}{g},$$

und wenn dieser Werth von t in den von v^2 substituirt wird, so kommt:

$$v^2 = u^2 - 2gy,$$

woraus erhellet, daß das Gesetz der Wirkung der Schwere auf einen geworfenen Körper, welcher eine parabolische Trajectorie beschreibt, dasselbe ist, als wenn er nach verticaler Richtung in die Höhe geworfen würde.

§. 261. Wegen der Schnelligkeit, mit welcher die Kugeln durch die Explosion des Pulvers fortgeschleudert werden und wegen der großen Ausdehnung der Trajectorien würde es sehr schwer sein, sie direct zu beobachten. Um aber dennoch diese Bewegung näher zu untersuchen, muß man eine ähnliche, aber weniger schnelle Bewegung hervorzubrin-

gen suchen, auf ähnliche Weise wie bei der Atwood'schen Maschine; allein die Verzögerung der Bewegung ist nicht die einzige Bedingung, welcher zu genügen ist, sondern man muß dieser Bewegung auch eine solche Richtung geben, daß die von dem Körper beschriebene Trajectorie durch einen gegebenen Punct geht, welcher das zu erreichende Ziel ist. Daniel Bernoulli hat diese Aufgabe durch eine von ihm erfundene Maschine, das sogenannte ballistische Instrument, gelöst. Dieses in Fig. 140 perspectivisch dargestellte Instrument besteht aus zwei Stücken Holz *ABD*, *ABE* von 2 Zoll Breite und 1 Zoll Dicke, welche wie die beiden Schenkel eines Zirkels durch ein Gewinde *AB* mit einander verbunden sind. An dem Stücke *ABE* ist in *F* ein eingetheilter Viertelkreis befestigt, welcher frei in den Traghaken *G* auf der dem Stücke *ABD* entsprechenden Seite tritt und in diesem Traghaken befindet sich ein Loch mit einer Schraubenmutter zur Aufnahme einer Druckschraube. Das Stück *ABE* muß in verticaler Lage mit Splinten oder Schrauben *l*, *m*, *n* an einem festen Gegenstande gehörig befestigt sein, wogegen das Stück *ABD* beweglich ist und einen Bogen bis zu 90° beschreiben kann. Dieses Stück wird mit der Druckschraube des Tragbandes *G* an dem Viertelkreise befestigt, welcher das Maaß des Winkels oder die Neigung dieses Stückes gegen die Horizontalebene angibt.

Zum Werfen der Körper bediente sich Daniel Bernoulli einer Glasröhre, deren innerer Durchmesser ungefähr drei Linien betrug. Diese kleine Kanone *MN* ist mit zwei Bändern *I*, *K* in einer Nute in der Mitte der äußern Fläche des beweglichen Stückes *ABD* befestigt. Die bewegende Kraft ist eine in der Kanone angebrachte stählerne Spiralfeder und ein im Mittelpuncte einer Scheibe, auf welche man die Kugel legt, befestigter Messingdraht geht durch die Axe der Feder und tritt frei durch ein kleines Loch im Boden der Kanone. An diesem Drahte ist ein Faden befestigt, welchen man über eine feste Rolle gehen läßt und woran man ein Gewicht *P* aufhängt, welches die Feder spannt, so daß die Kugel durch die Elasticität der Feder fortgeschleudert wird, wenn man den Faden, woran das Gewicht hängt, abschneidet. Eine unter dem Puncte *M* befindliche Scale mit gleichen Theilen gibt die Verkürzung der Feder an, wenn man sie successive mit verschiedenen Gewichten belastet. Mit dem Gewichte von 1 Pfund und bei der Neigung von 45° schleuderte das Bernoulli'sche ballistische Instrument eine Bleikugel bis auf eine Entfernung von 10 Fuß fort. Die Figur 140*a* stellt eine Mire dar, welche man an dem ballistischen Instrumente anbringen kann, woran sich in der Nähe der Mündung der Kanone auch ein Visir befinden muß.

§. 262. Während länger als einem Jahrhundert ist die Parabel als die Trajectorie betrachtet, welche die geworfenen Körper sowohl in der Luft, als im leeren Raume beschreiben, indem man die Dichtigkeit der Luft für zu gering hielt, als daß diese Flüssigkeit auf die sich darin bewegenden Körper einen Widerstand ausüben könnte, welcher die von ihnen beschriebene Curve merklich zu verändern im Stande sei, und diese Meinung findet man in den über diesen Gegenstand von Belidor, Blondel, Halley und mehreren andern Schriftstellern herausgegebenen Werken ausgesprochen. Allein Newton führte im zweiten

Buche seiner Principien Versuche an, woraus sich der Satz ergab: daß der Widerstand der Luft dem Quadrate der Geschwindigkeit der sich darin bewegenden Körper proportional ist, und obgleich Newton die Curve, welche die geworfenen Körper in der Luft beschreiben, nicht hat bestimmen können, so hat er doch wenigstens gezeigt, daß diese Curve keine Parabel ist.

Die analytische Auflösung dieser Aufgabe ist im Jahre 1718 von Johann Bernoulli und dann auch von einigen andern Geometern gefunden; allein ihre Formeln entsprechen den Bedürfnissen der Praxis nicht, und es mußten daher Versuche angestellt werden. Die von Robins im Jahre 1742 in seinen **Principles of Gunnery** bekannt gemachten Versuche haben die Irrthümer der alten Theorie gezeigt und der berühmte Euler hat Robins Werk mit einem sehr ausführlichen Commentar ins Deutsche übersetzt. Hieraus sieht man, daß die wahre Theorie, welche sich auf genau constatirte Thatsachen gründet, nur sehr langsam an die Stelle der als wahr angenommenen, aber nur falsche Resultate gebenden Theorie tritt. Mehrere andere Geometer haben über die Bewegung der Projectile in der Luft gelehrte Abhandlungen geschrieben und man findet die allgemeine Auflösung dieser Aufgabe in allen Lehrbüchern der analytischen Mechanik; allein diese Auflösung führt zuletzt auf Differentialgleichungen, welche sich nicht integriren lassen und man kann die Werthe der Coordinaten der Trajectorie nur durch Näherungsmethoden daraus ableiten.

Wir wollen hier eine Gleichung abzuleiten suchen, vermittelst welcher man die Curve oder Trajectorie, welche ein Projectil in der Luft beschreibt, mit einer hinreichenden Genauigkeit zeichnen kann. Wir wollen die vorhergehenden Bezeichnungen beibehalten und uns auch der Figur 139 wieder bedienen, obgleich die gesuchte Trajectorie keine Parabel ist.

Es bezeichne s den Bogen AM, welchen der geworfene Körper am Ende der Zeit t beschrieben hat und wir wollen die MP unendlich naheliegende Ordinate mp, dann die Parallele MD zu der Axe AX und die Tangente MT im Puncte M der Curve ziehen, so fällt diese Tangente mit dem unendlich kleinen Bogen $Mm = ds$ zusammen und die Cosinus der Winkel, welche sie mit den Axen der x und der y oder mit den Parallelen zu diesen Axen bildet, werden durch $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$ ausgedrückt.

Es bezeichne R die Intensität des Widerstandes der Luft, welcher eine bewegende Kraft ist, deren Wirkung der Bewegung des Projectils immer direct entgegengesetzt ist. Sie wirkt also im Puncte M nach der Richtung der Tangente MT, und wenn man sie parallel zu den Axen zerlegt, so sind $-R\frac{dx}{ds}$, $-R\frac{dy}{ds}$ ihre Componenten, welche das negative Zeichen haben müssen, weil sie nach einem der Bewegung des Körpers entgegengesetzten Sinne wirken.

Es lassen sich nun leicht die Differentialgleichungen der Aufgabe bilden; denn wenn man die Componenten der bewegenden Kraft des Luftwiderstandes durch die Masse m des Projectiles dividirt, so sind

die Quotienten $-\frac{R}{m}\frac{dx}{ds}$, $-\frac{R}{m}\frac{dy}{ds}$ die beschleunigenden Kräfte, und wenn man sie für X und Y in die Gleichungen in §. 254 substituirt und zu der zweiten die Größe $-g$ hinzufügt; so erhält man:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{R}{m}\frac{dx}{ds}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -g - \frac{R}{m}\frac{dy}{ds}.$$

In §. 250 haben wir nach der Newton'schen Theorie gefunden, daß der Widerstand, welchen eine sich in der Luft bewegende Kugel erfährt, dem Gewichte einer Luftsäule gleich ist, deren Grundfläche der größte Kreis der Kugel und deren Höhe die Hälfte der ihrer Geschwindigkeit entsprechenden Fallhöhe ist.

Es sei r der Halbmesser der Kugel und π das Verhältniß des Kreisumfanges zum Durchmesser, so ist πr^2 der Flächeninhalt des größten Kreises. Bezeichnet ferner h die der Geschwindigkeit v der Kugel entsprechende Fallhöhe, so ist $h = \frac{v^2}{2g}$, also $\pi r^2 \times \frac{v^2}{2g}$ das Volumen der Luftsäule, und wenn man die Dichtigkeit der Luft mit δ bezeichnet und das Volumen der Luftsäule mit δg multiplicirt, so erhält man $R = {}^1/_2 \pi r^2 \delta v^2$ für die Intensität des Widerstandes der Luft. Diese theoretische Kraft muß aber vermindert werden, um sie mit der Beobachtung in Uebereinstimmung zu bringen, und wir haben in §. 250 gesehen, daß Newton sie auf die Hälfte reducirt. Borda hat durch Versuche, welche er in den Memoiren der Pariser Akademie der Wissenschaften vom Jahre 1763 bekannt gemacht hat, gefunden, daß sie auf ${}^3/_5$ reducirt werden muß und wir wollen sie auf ${}^2/_3$ reduciren, d. h. wir wollen

$$R = {}^1/_3 \pi r^2 \delta v^2 = {}^1/_3 \pi r^2 \delta \frac{ds^2}{dt^2}$$

setzen. Wenn die Dichtigkeit der Kugel durch D bezeichnet wird, so ist ihre Masse $m = {}^4/_3 \pi r^3 D$ und die beschleunigende Kraft $\frac{R}{m}$ $= \frac{0{,}25\delta}{Dr} \cdot \frac{ds^2}{dt^2}$, und wenn man diesen Werth von $\frac{R}{m}$ in die Gleichungen der Aufgabe substituirt und der Kürze wegen $k = \frac{0{,}25\delta}{Dr}$ setzt; so gehen diese Gleichungen über in:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k\frac{ds^2}{dt^2}\frac{dx}{ds}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -g - k\frac{ds^2}{dt^2}\frac{dy}{ds}.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen mit dt^2 und reducirt, so erhält man:

$$d^2x = -kdsdx, \quad d^2y = -gdt^2 - kdsdy,$$

und wenn man aus der ersten Gleichung den Werth von kds ableitet und denselben in die zweite substituirt, so kommt:

$$d^2y = -gdt^2 + \frac{dyd^2x}{dx},$$

woraus folgt: $$gdt^2 = -\frac{dyd^2x - dxd^2y}{dx}.$$

Multiplicirt man den zweiten Theil dieser letzten Gleichung mit $\frac{dx}{dx}$ und bemerkt, daß $\frac{dyd^2x - dxd^2y}{dx^2}$ das Differential von $-\frac{dy}{dx}$ ist, so verwandelt sich diese Gleichung in:

$$gdt^2 = -dxd\frac{dy}{dx} = -dxdp,$$

wenn man der Kürze wegen $\frac{dy}{dx} = p$ setzt.

Wenn man dt in der ersten Gleichung als constant betrachtet, so hat man:

$$\frac{d^2x}{dt} = -kds\frac{dx}{dt},$$

und wenn man $\frac{dx}{dt}$ in den ersten Theil setzt, so sieht man, daß dieser erste Theil $\frac{\frac{d^2x}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$ ein logarithmisches Differential ist, und daß das Integral dieser Gleichung

$$log.\frac{dx}{dt} = -ks + C$$

ist. Die Constante C ist der neperſche Logarithmus einer Zahl, welche wir mit B bezeichnen wollen, und wenn man bemerkt, daß $log.\, e = 1$ ist, wenn e die Basis des neperschen Logarithmensystemes bezeichnet, so hat man:

$$log.\frac{dx}{dt} = -ks\, log.\, e + log.\, B = log.\, Be^{-ks},$$

und wenn man von den Logarithmen zu den Zahlen übergeht, so hat man:

$$\frac{dx}{dt} = Be^{-ks}.$$

Im Anfangspuncte A ist der Bogen $s = 0$ und $\frac{dx}{dt} = Be^0 = B$.

Ferner ist die nach der Axe AX geschätzte anfängliche Geschwindigkeit oder $\frac{dx}{dt} = u\, cos.\, \alpha$, welches der Werth der Constante B ist, und der des Integrales ist:

$$\frac{dx}{dt} = u\, cos.\, ae^{-ks} \text{ folglich } dt = \frac{e^{ks}\, dx}{u\, cos.\, \alpha}.$$

Wird dieser Werth von dt in die zweite Gleichung substituirt, so erhält man:

$$-e^{2ks} = \frac{u^2}{g} cos.^2 \alpha \frac{dp}{dx} = 2h cos.^2 \alpha \frac{dp}{dx}.$$

Das unendlich kleine rechtwinklige Dreieck Mdm gibt:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = dx^2 + dx^2 p^2,$$

$$dx = \frac{ds}{\sqrt{1+p^2}},$$

und wenn man diesen Werth für dx in die vorhergehende Gleichung subſtituirt, ſo verwandelt ſie ſich in:

$$-e^{2ks}\, ds = 2h\, cos.^2 \alpha\, dp \sqrt{1+p^2},$$

und ihr Integral in:

$$-\frac{1}{2k} e^{2ks} = 2h\, cos.^2 \alpha \int dp \sqrt{1+p^2}.$$

Entwickelt man die Wurzelgröße in eine Reihe und nimmt von jedem Gliede derſelben das Integral, ſo erhält man:

$$-e^{2ks} = 4kh\, cos.^2 \alpha\, (p + {}^1/_6 p^3 - {}^1/_{40} p^5 + etc.) + C.$$

Die Conſtante C wird beſtimmt, wenn man bemerkt, daß man zu gleicher Zeit $s = o$ und $p = tang.\, \alpha$ hat, welches gibt:

$$-1 = 4kh\, cos.^2 \alpha\, (tang.\, \alpha + {}^1/_6 tang.^3 \alpha - {}^1/_{40} tang.^5 \alpha + etc.) + C,$$

$$C = -1 - 4kh\, cos.^2 \alpha\, (tang.\, \alpha + {}^1/_6 tang.^3 \alpha - {}^1/_{40} tang.^5 \alpha + etc.),$$

und wenn man dieſen Werth für C ſubſtituirt und die Zeichen verändert, ſo verwandelt ſich die Gleichung in:

$$e^{2ks} =$$

$$1 + 4kh\, cos.^2 \alpha\, [tang.\, \alpha - p + {}^1/_6 (tang.^3 \alpha - p^3) - {}^1/_{40} (tang.^5 \alpha - p^5) + etc.].$$

Wenn der Wurfwinkel α nicht größer iſt, als $45°$; ſo iſt $tang.\, \alpha - p$ ein echter Bruch und die Glieder der Reihe nach dem zweiten können vernachläſſigt werden, ſo daß man bloß hat:

$$e^{2ks} = 1 + 4kh\, cos.^2 \alpha\, (tang.\, \alpha - p),$$

und wenn dieſer Werth der Exponentialgröße dem bereits früher gefundenen gleich geſetzt wird, ſo erhält man:

$$-2h\, cos.^2 \alpha \frac{dp}{dx} = 1 + 4kh\, cos.^2 \alpha\, (tang.\, \alpha - p).$$

Multiplicirt man mit dx und bringt dieſes Differential in den erſten Theil der Gleichung allein, ſo kommt:

$$dx = \frac{-2h\, cos.^2 \alpha\, dp}{1 + 4kh\, cos.^2 \alpha\, (tang.\, \alpha - p)},$$

und wenn man dieſe Gleichung durch $2k$ multiplicirt und dann integrirt, ſo erhält man:

$$2kx = log.\, [1 + 4kh\, cos.^2 \alpha\, (tang.\, \alpha - p)].$$

Die Conſtante iſt Null, weil zu gleicher Zeit $x = o$ und $tang.\, \alpha = p$ iſt. Um von den Logarithmen zu den Zahlen überzugehen, wollen

wir bemerken, daß $2kx = log.\, e^{2kx}$ ist, und vermittelst dieser Substitution verwandelt sich die Gleichung in:

$$e^{2kx} = 1 + 4kh\, cos.^2\, \alpha\, (tang.\, \alpha - p),$$

oder: $$4kh\, cos.^2\, \alpha p = 1 + 4kh\, cos.^2\, \alpha\, tang.\, \alpha - e^{2kx}.$$

Substituirt man den Werth von $p = \frac{dy}{dx}$ und integrirt, so erhält man:

$$4kh\, cos.^2\, \alpha y = (1 + 4kh\, cos.^2\, \alpha\, tang.\, \alpha)\, x - \frac{e^{2kx}}{2k} + C.$$

Im Anfangspuncte A ist $x = 0$ und $y = 0$, also ist Constante $C = \frac{1}{2k}$; folglich:

$$8k^2 h\, cos.^2\, \alpha y = (2k + 8k^2 h\, cos.^2\, \alpha\, tang.\, \alpha)\, x - e^{2kx} + 1.$$

Dieses ist die Gleichung der Trajectorie, welche man auf folgende Form bringen kann:

$$y = x\, tang.\, \alpha - \frac{e^{2kx} - (2kx + 1)}{8k^2 h\, cos.^2\, \alpha}.$$

Der Ausdruck der Zeit t ergibt sich leicht aus den beiden Gleichungen:

$$gdt^2 = -\, dxdp,\ e^{2ks} = -\, 2h\, cos.^2\, \alpha\, \frac{dp}{dx};$$

denn wenn man $s = x$ setzt, dann dp eliminirt und hieraus aus jedem Theile der Gleichung die Quadratwurzel zieht, so findet man:

$$dt = \frac{e^{kx}\, dx}{\sqrt{2gh.\, cos.\, \alpha}},$$

und wenn man integrirt, so erhält man:

$$t = \frac{\frac{1}{k}\, e^{kx}}{\sqrt{2gh.\, cos.\, \alpha}} + C.$$

Zur Bestimmung der Constante C braucht man nur zu bemerken, daß im Anfange der Bewegung $t = 0$ und $x = 0$, folglich $C = -\frac{1}{k\sqrt{2gh.\, cos.\, \alpha}}$ ist, und wenn man diesen Werth von C substituirt, so hat man:

$$t = \frac{e^{kx} - 1}{k\sqrt{2gh.\, cos.\, \alpha}}.$$

§. 263. Wir wollen nun diese allgemeinen Formeln auf einige Zahlenbeispiele anwenden.

Beispiel 1. Man soll die Trajectorie und Wurfweite einer aus einer Vierundzwanzigpfünder-Kanone unter einem Winkel von 30 Grad und mit einer Ladung Pulver, durch deren Explosion eine anfängliche

Geschwindigkeit von 500 Fuß oder $162^m,42$ in der Secunde hervorgebracht wird, geschossenen Kugel bestimmen.

Zunächst müssen die Werthe der Constanten bestimmt werden. In §. 258 haben wir die der anfänglichen Geschwindigkeit entsprechende Fallhöhe $h = 1344^m,7$ gefunden und in der Größe $k = \frac{0,25\,\delta}{Dr}$ setzt man die Dichtigkeit der Luft $\delta = 1$ und die Dichtigkeit des Gußeisens D ist $= 6047$ und endlich der Halbmesser r der Kugel $= 0^m,07369$. Subsstituirt man diese Werthe, so erhält man $k = \frac{0,25}{6047 \times 0,07369} = 0,00056$, wenigstens bis auf $0,00001$ genau. Da ferner der Winkel $\alpha = 30^\circ$ ist, so hat man $tang.\,\alpha = 0,57735$, und wenn diese Werthe in die Gleichung der Trajectorie subsstituirt werden, so erhält man:

$$y = 0,57735\,x - \frac{e^{\,0,00112\,x} - (0,00112\,x + 1)}{8\,(0,00056)^2 \times 1344,7\,cos.^2\,30^\circ}.$$

Da ferner der Buchstabe e die Basis des neperschen Logarithmensystemes oder die Zahl $2,7182818\ldots$ bezeichnet, so kann man die Werthe von y vermittelst dieser Gleichung berechnen, wenn man auf der Axe AX für die Abscissen x beliebige Werthe annimmt. Wir wollen die Abscisse $x = Aq = 400$ Meter annehmen und der Kürze wegen den Buchstaben e beibehalten, so haben wir:

$$y = 230,94 - \frac{e^{\,0,448} - 1,448}{8\,(0,00056)^2 \times 1344,7\,cos.^2\,30^\circ}.$$

Berechnet man das gebrochene Glied mit Hilfe der Logarithmentafeln, so kommt:

$$log.\,e^{\,0,448} = 0,448\,log.\,2,7182818 = 0,443 \times 0,4342945 = 0,1945639,$$

$$e^{\,0,448} = 1,565178$$
$$1,448$$
$$0,117178,$$

welches den Zähler ausdrückt, und wenn man zu seinem Logarithmus die decadischen Ergänzungen der Logarithmen der Factoren des Nenners addirt, so erhält man:

	$log.\,0,117178 = \overline{1},0688460$	
dec. Erg. $log.\,8$	$= 9,0969100$	
dec. Erg. $2\,log.\,0,00056$	$= 16,5036240$	
dec. Erg. $log.\,1344,7$	$= 6,8713746$	
dec. Erg. $2\,log.\,cos.\,30^\circ$	$= 10,1249388$	$42,5968474$
$log.\,46,31$	$=$	$41,6656934,$

$$y = qn = 230,94 - 46,31 = 184,63.$$

Wenn man auf der Axe AX nach einer arithmetischen Progression fortlaufende Abscissen nimmt (die in Fig. 139 nehmen immer um 200 Meter zu) und die zugehörigen Ordinaten auf die eben angegebene Weise berechnet, so ist die durch die Endpuncte dieser Ordinaten ge-

hende Curve *AncE* die von der Kugel beschriebene Trajectorie. Durch einige Versuche findet man, daß die Wurfweite oder die Abscisse $x = AE$, welcher die Ordinate $y = o$ entspricht $= 1332$ Meter ist, und diese Wurfweite ist ungefähr halb so groß, als die, welche im leeren Raume stattfinden würde; aber bei großen Geschwindigkeiten wird der Unterschied weit beträchtlicher, wie man an dem folgenden Beispiele sehen wird.

Beispiel 2. Man soll die Trajectorie zeichnen, welche eine Kugel beschreibt, die aus einer Vierundzwanzigpfünder-Kanone unter einem Winkel von 45° und mit einer Ladung von 9 Pfund oder 4,405 Kilogr. Pulver, durch dessen Explosion der Kugel eine anfängliche Geschwindigkeit von 1500 Fuß oder $487^m,26$ in der Secunde ertheilt wird, abgeschossen ist.

Es sei *A* (Fig. 141) der Mittelpunct der Mündung der Kanone, deren Axe nach der geraden Linie *AL* gerichtet ist, welche mit der horizontalen Axe *AX* den Winkel $LAX = \alpha = 45°$ bildet; so hat man $tang.\,\alpha = 1$, $cos.^2\,\alpha = {}^1/_2$ und die Gleichung der Trajectorie wird:

$$y = x - \frac{e^{2kx} - (2kx + 1)}{4k^2 h}.$$

Der Werth der Constante k ist, wie in dem vorhergehenden Beispiele, $= 0,00056$ und den von h oder den der anfänglichen Geschwindigkeit u entsprechenden Fallhöhe findet man vermittelst der Formel:

$$h = \frac{u^2}{2g} = \frac{(487,26)^2}{2 \times 9,8089},$$

und wenn man mit Logarithmen rechnet, so hat man:

	$2\ log.\ u$	$= 5,3755216$
dec. Erg.	$log.\ 2$	$= 9,6989700$
dec. Erg.	$log.\ g$	$= 9,0083797$
	$log.\ h$	$= 24,0828713,$

also: $h = 12102,39.$

Wenn man eine Abscisse $x = 500$ Meter nimmt, so wird die zugehörige Ordinate ausgedrückt durch:

$$y = 500 - \frac{e^{0,56} - 1,56}{4h^2 k},$$

und wenn man das Bruchglied wie im ersten Beispiele berechnet, so findet man:

$$log.\ e^{0,56} = 0,56 \times 0,4342945 = 0,2432049,$$

$$e^{0,56} = 1,750672$$

$$1,56$$

	$log.$	$0,190672$		$\overline{1},2802869$
dec. Erg.	$log.\ 4$	$=$	$9,3979400$	
dec. Erg. 2	$log.\ k$	$=$	$16,5036240$	
dec. Erg.	$log.\ h$	$=$	$5,9171287$	$31,8186927$
	$log.$	$12,5597$		$31,0989796,$

$$y = 500 - 12,56 = 487,44.$$

Es lassen sich nun leicht alle Ordinaten berechnen, deren man zur Zeichnung der von der Kugel beschriebenen Trajectorie *AEHB* bedarf. Nach einigen Versuchen findet man, daß die Abscisse $x = AB$, welcher die Ordinate $y = o$ entspricht, und welche die Wurfweite bildet, = 3671 Meter oder 1883 Toisen ist. Im leeren Raume würde die Wurfweite 24204 Meter, oder 12418 Toisen betragen, woraus erhellet, daß die Wurfweite in der Luft noch nicht den sechsten Theil von der beträgt, welche im leeren Raume stattfinden würde.

Die in der Luft von der Kugel beschriebene Trajectorie hat keine Aehnlichkeit mit der Parabel; der aufsteigende Zweig dieser Trajectorie ist weit länger, als der niedersteigende und jeder Zweig hat eine Asymptote, welche man durch die Analysis bestimmt, und die des niedersteigenden Zweiges ist vertical.

§. 264. Wir haben die Geschwindigkeit der Kugel bei ihrem Austritte aus der Kanone oder ihre anfängliche Geschwindigkeit als eine gegebene Größe betrachtet; allein diese Größe kann nicht durch directe Beobachtungen erhalten werden, sondern wird gewöhnlich durch das von Robins erfundene sogenannte ballistische Pendel bestimmt.

Das Gestell dieses Pendels besteht aus drei Schenkeln und sein kegelförmiger Kopf *M* (Fig. 142) ist durch ein eisernes Band gehörig befestigt. Das Pendel selbst besteht auch aus Eisen; seine Axe oder Welle wird von den Stützen *S*, *T* getragen, welche mit den vordern Zweigen des Gestelles fest verbunden sind, so daß die Axe dieser Welle horizontal ist und sich fast ebenso frei drehen kann, als bei einer scharfkantigen Aufhängungsaxe. Am untern Ende der Pendelstange *AB* ist ein hölzernes Parallelepipedum *CDEF* befestigt, dessen vordere Fläche mit Blei belegt ist, um das Zurückspringen der Kugeln zu verhüten. Gegen diesen Klotz wird geschossen, so daß das Pendel durch den Stoß der Kugel in Bewegung gesetzt wird und die Sehne des Bogens, welchen es beschreibt, wird von einem Bande gemessen, wovon das eine Ende unten an dem Pendel befestigt ist, während das andere Ende durch eine Fassung *N* geht, welche in der Mitte des zu der Aufhängungsaxe parallelen Querstückes *IK* angebracht ist.

Wenn man auf das ballistische Pendel die sich aus der allgemeinen Theorie des Pendels, welche wir später mittheilen werden, ergebenden Regeln anwendet, so läßt sich daraus die anfängliche Geschwindigkeit der Kugeln ableiten.

Neuntes Kapitel.

Von den Centralkräften im Kreise und in den von dem Kreise verschiedenen Curven.

§. 265. Wenn ein Körper, welchen wir zunächst als einen bloßen materiellen Punct betrachten wollen, einen Kreisumfang beschreibt, so hat er ein beständiges Bestreben, sich nach der Richtung der Tan-

gente vom Mittelpuncte zu entfernen, was auch wirklich stattfinden würde, wenn er sich selbst überlassen wäre, und dieses Bestreben, nach der Richtung der Tangente fortzugehen, wird die Centrifugalkraft genannt, wogegen die Kraft, welche ununterbrochen auf den Körper wirkt und denselben auf dem Kreisumfange erhält, die Centripetalkraft oder Centralkraft genannt wird. Die Centralkraft und die Centrifugalkraft sind einander gleich und direct entgegengesetzt.

Es sei *A* (Fig. 143) der materielle Punct, welcher an dem im Mittelpuncte *C* befestigten unausdehnbaren Faden *CA* befestigt ist, und wir wollen annehmen, daß dieser materielle Punct *A* nach einer auf *CA* senkrechten Richtung einen Stoß erhält, in Folge dessen er während des Zeitelementes *t* die Länge *AT* durchlaufen würde, wenn er frei wäre; aber während derselben Zeit treibt ihn die Centralkraft durch die Länge *TB*, weil, wenn sich der Halbmesser *CA* in der Lage *CB* befindet, der materielle Punct immer im Endpuncte *B* dieses Halbmessers liegt.

Die Centralkraft bewegt den materiellen Punct während des Zeitelementes *t* durch die Länge *TB*, und wenn man *TC* bis zum Durchschneiden mit dem Kreisumfange in *E* verlängert, so hat man nach einer bekannten Eigenschaft des Kreises in Beziehung auf die von demselben Puncte außerhalb des Kreises gezogene Secante und Tangente:

$$TB = \frac{(AT)^2}{TE}.$$

Da der Bogen *AB* sehr klein ist, so kann man statt *TB* den Sinusversus *AP*, statt der Tangente *AT* den Bogen *AB* und statt der Secante *TE* den Durchmesser *BE* nehmen, wodurch sich die vorhergehende Formel in folgende verwandelt:

$$AP = \text{sin. ver. } AB = \frac{(\text{Bog. } AB)^2}{BE} = \frac{(\text{Bog. } AB)^2}{2R}.$$

Die Centralkraft ist eine constante beschleunigende Kraft von derselben Art wie die Schwere, und wenn man diese Kraft mit *F* bezeichnet, so wird sie durch die Formel:

$$F = \frac{2e}{t^2}$$

ausgedrückt, wo *e* den Raum bezeichnet, welchen der materielle Punct in dem Zeitelemente *t* unter der Wirkung der Centralkraft durchläuft. Dieser Raum ist dem Sinusversus des von dem materiellen Puncte beschriebenen kleinen Bogens gleich; folglich hat man:

$$e = \frac{(\text{Bog. } AB)^2}{2R}$$

und die vorhergehende Formel geht über in:

$$F = \frac{2 \times \frac{(\text{Bog. } AB)^2}{2R}}{t^2} = \frac{(\text{Bog. } AB)^2}{Rt^2}.$$

Wenn man die Geschwindigkeit des materiellen Punctes mit v bezeichnet, so hat man:

$$v = \frac{\text{Bog. } AB}{t}, \quad v^2 = \frac{\text{Bog. } (AB)^2}{t^2},$$

und wenn dieser Werth für $\frac{(\text{Bog. } AB)^2}{t^2}$ in den Ausdruck der Centralkraft subſtituirt wird, so wird dieſe Kraft ausgedrückt durch:

$$F = \frac{v^2}{R},$$

woraus folgt, daß die Central- und Centrifugalkraft dem Quotienten aus dem Quadrate der Geſchwindigkeit des materiellen Punctes und aus dem Halbmeſſer des von demſelben beſchriebenen Kreiſes gleich iſt.

Die Centralkraft wirkt immer nach der Richtung des Halbmeſſers oder ſenkrecht auf dem Kreisumfange und ſie verändert alſo die Geſchwindigkeit des materiellen Punctes, welche während der ganzen Dauer ſeiner kreisförmigen Bewegung gleichförmig bleibt, durchaus nicht.

§. 266. Es ſei T die Zeit, welche der materielle Punct zum Beſchreiben des ganzen Kreisumfanges von dem Halbmeſſer $AC = R$ gebraucht und π das Verhältniß des Kreisumfanges zum Durchmeſſer, ſo hat man:

$$v = \frac{2\pi R}{T},$$

und wenn das Quadrat dieſes Werthes von v in den Ausdruck der Central- oder Centrifugalkraft ſubſtituirt wird, ſo erhält man:

$$F = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot R.$$

Wenn der materielle Punct unter der Wirkung einer andern Kraft F' während der Zeit T' einen Kreisumfang von dem Halbmeſſer R' beſchreibt, ſo hat man ebenſo:

$$F' = \frac{4\pi^2}{T'^2} \cdot R',$$

und aus dieſen beiden Ausdrücken ergibt ſich folgende Proportion:

$$F : F' = \frac{1}{T^2} \cdot R : \frac{1}{T'^2} \cdot R',$$

d. h. die Centrifugalkräfte ſtehen im directen Verhältniſſe der Halbmeſſer oder Umfänge der von dem materiellen Puncte beſchriebenen Kreiſe und im umgekehrten Verhältniſſe der Quadrate der dazu gebrauchten Zeiten.

Wenn die Zeiten gleich ſind, ſo verhalten ſich die Centrifugalkräfte wie die Halbmeſſer der beſchriebenen Kreiſe, und folglich ſind die Centrifugalkräfte gleicher ſich in Kreiſen bewegender Theile eines Körpers deſto beträchtlicher, je weiter dieſe Theile von der Rotationsaxe entfernt liegen.

Bei der Ableitung der vorhergehenden Formeln haben wir den bewegten Körper als auf einen materiellen Punct reducirt angenommen, dessen Masse als Einheit betrachtet werden kann; aber um die Massen der Körper in Betracht zu ziehen, braucht man die gefundenen Werthe der Centrifugalkräfte F, F' nur durch die Massen M, M', worauf sie wirken, zu multipliciren.

Es sei H die der Geschwindigkeit v entsprechende Fallhöhe und g die beschleunigende Kraft der Schwere, so hat man $v^2 = 2gH$, und wenn man diesen Werth von v^2 in die Gleichung $F = \frac{Mv^2}{R}$ substituirt, so erhält man die Gleichung:

$$F = \frac{2MgH}{R} = \frac{MgH}{{}^1/_2 R},$$

worin folgende Proportion enthalten ist:

$$F : Mg = H : {}^1/_2 R,$$

d. h. die Centrifugalkraft verhält sich zu dem Gewichte des Körpers, wie die seiner Geschwindigkeit entsprechende Fallhöhe zur Hälfte des Halbmessers des von demselben beschriebenen Kreisumfanges.

Wir wollen nun diese allgemeinen Regeln auf einige besondere Fälle anwenden.

Beispiel 1. Wenn ein Körper von einem Gewichte von 125 Gramm einen Kreisumfang von dem Halbmesser $= 1$ Meter mit einer Geschwindigkeit von 10 Meter in einer Secunde beschreibt, wie groß ist die Centrifugalkraft desselben?

Die Höhe H, von welcher der Körper frei herabfallen müßte, um die Geschwindigkeit von 10 Meter zu erlangen, ist gleich $5^m,097$, und wenn dieser Werth von H nebst den Werthen der übrigen Buchstaben in die vorhergehende Proportion substituirt worden, so erhält man:

$$F : 125 = 5,097 : {}^1/_2 = 10,194 : 1.$$

Die Centrifugalkraft oder die Spannung der Schnur ist also 10,194mal größer, als das Gewicht des Körpers.

Wenn der Werth von H oder die der Geschwindigkeit des Körpers entsprechende Fallhöhe der Hälfte des Halbmessers des beschriebenen Kreises gleich wäre, so wäre die Centrifugalkraft dieses Körpers seinem Gewichte gleich.

Beispiel 2. Wie groß ist die Centrifugalkraft eines materiellen Punctes, welcher den Umfang des Erdäquators in der Zeit durchläuft, während welcher sich die Erde einmal um ihre Axe drehet?

Der Halbmesser des Erdäquators ist $= 6376606$ Meter und sein Umfang $2\pi r = 2 \times 3,14159 \times 6376606$. Die Umdrehungszeit der Erde um ihre Axe ist nahezu dem Zeitraume zwischen zwei successiven Durchgängen eines Punctes des Aequators durch den Meridian oder 24 Stunden Sternzeit gleich, welche 23 Stunden 56 Minuten 4 Secunden mittlere Zeit betragen, und wenn man den Umfang des Aequators durch diese letzte in Secunden ausgedrückte Zahl dividirt, so findet man die Geschwindigkeit des Körpers $= 465$ Meter.

Die dieser Geschwindigkeit entsprechende Fallhöhe berechnet man nach der Formel $H = \frac{v^2}{2g}$, aber man muß für g die Geschwindigkeit nehmen, welche ein unter dem Aequator freifallender Körper in 1 Secunde erlangt und nach den Beobachtungen von Bouguer ist diese Geschwindigkeit $= 30{,}1$ Fuß $= 9^m{,}78$, was

$$H = \frac{(465)^2}{19{,}56} = 11054 \text{ Meter}$$

gibt.

Werden die eben gefundenen Zahlen in die allgemeine Proportion substituirt, so erhält man:

$$F : 9{,}78 = 11{,}054 : 3188303 = 1 : 288{,}4.$$

Die Centrifugalkraft ist also unter dem Aequator $\frac{1}{288{,}4}$ der Schwerkraft und beide Kräfte sind einander direct entgegengesetzt. Die Intensität der auf alle Körper wirkenden Schwere ist also unter dem Aequator fast um $\frac{1}{289}$ kleiner, als wenn die Wirkung der durch die Rotation der Erde hervorgebrachten Centrifugalkraft nicht stattfände.

Wenn diese Rotation der Erde 17 mal schneller stattfände, so hätte man:

$$H = \frac{(17)^2 \times (465)^2}{19{,}56},$$

und wenn man diese Größe vermittelst der Logarithmentafeln berechnet, so findet man:

$$\begin{aligned} 2\,log.\,17 &= 2{,}4608978 \\ 2\,log.\,465 &= 5{,}3349060 \\ \text{dec. Erg. } log.\,19{,}56 &= 8{,}7086311 \\ log.\,H &= \overline{16{,}5044349}, \end{aligned}$$

also: $$H = 3194735,$$

woraus erhellet, daß bei einer solchen Rotationsgeschwindigkeit der Erde die Wirkung der Schwere unter dem Aequator durch die der Centrifugalkraft ganz aufgehoben würde.

Da die Intensität der Centrifugalkraft dem Halbmesser des von dem Körper beschriebenen Kreises proportional ist, so muß diese Kraft, wenn man von dem Aequator gegen den Pol zu geht, immer kleiner werden und unter dem Pole selbst völlig Null sein, wogegen bei der Schwere das Entgegengesetzte stattfindet, indem sie von dem Aequator bis zu dem Pole fortwährend zunimmt, und diese Zunahme würde $\frac{1}{289}$ betragen, wenn die Erde eine vollkommene Kugel wäre; allein wegen ihrer Abplattung nimmt die Schwere von dem Aequator gegen den Pol zu in einem größern Verhältnisse zu, und das Gesetz dieser Zunahme ist, wie wir in einem der folgenden Kapitel sehen werden, durch Pendelbeobachtungen dargethan.

§. 267. Die Schwere oder die Kraft, welche die Körper gegen den Mittelpunct der Erde zu zieht, wirkt auf alle Körper nach dem di-

recten Verhältnisse ihrer Massen und nach dem umgekehrten Verhältnisse des Quadrates ihrer Entfernungen vom Mittelpuncte der Erde. Es würde mit Schwierigkeit verbunden sein, dieses Gesetz bei so geringen Entfernungen, bis zu welchen wir uns über die Erdoberfläche erheben können, wahrzunehmen. Newton, welchem wir diese große Entdeckung verdanken, suchte daher dieses Gesetz, da er keine hinreichenden Mittel zur Nachweisung seiner Richtigkeit durch directe Versuche finden konnte, durch die Uebereinstimmung desselben mit dem Gesetze der die Bewegung des Mondes um die Erde bewirkenden Centralkräfte zu beweisen. Diese kühne Idee wurde durch seine ersten Rechnungen nicht bestätigt, weil die astronomischen Wissenschaften damals noch nicht weit genug vorgerückt waren, um ihm die erforderlichen Data hinreichend genau zu liefern. Einige Jahre später, als er von der in Frankreich von Picard unternommenen Gradmessung Kunde erhielt, wiederholte er seine Rechnungen und seine Vermuthungen wurden vollkommen bestätigt. Wir wollen hier die Auflösung der Aufgabe, welche sich Newton gestellt hatte, in der Kürze mittheilen.

Wir wollen annehmen, daß der Mond um die Erde einen Kreis beschreibt, so werden durch diese Annahme die Rechnungen sehr vereinfacht, und das Resultat, welches man erhält, nähert sich der Wahrheit sehr, weil die Bahn des Mondes in der That fast kreisförmig ist.

Die Centralkraft im Kreise wird ausgedrückt durch:

$$F = \frac{V^2}{R}.$$

Aus dem Puncte C (Fig. 144) als dem gemeinschaftlichen Mittelpuncte der Erde und der Bahn des Mondes wollen wir mit den Halbmessern $CM = R$, $CT = r$, $Cm = 1$ drei Kreise beschreiben, wovon der erste die Mondsbahn und der zweite den Erdäquator darstellt. Es sei $MN = V$ der während einer Secunde von dem Monde beschriebene Bogen, so wird seine Winkelgeschwindigkeit durch den mit einem Halbmesser $= 1$ beschriebenen ähnlichen Bogen $mn = u$ gemessen.

Die ähnlichen Bogen V, u geben die Proportion:

$$1 : R = u : V = Ru,$$

und wenn man diesen Werth von V in den Ausdruck der Centrifugalkraft substituirt, so erhält man:

$$F = Ru^2.$$

Der Halbmesser R der Mondsbahn ist $= 384544605$ Meter, und wenn man diesen Halbmesser kennt, so kann man auch leicht den Umfang finden und dann die Werthe von V und u berechnen. Werden die Rechnungen verrichtet, so erhält man die Winkelgeschwindigkeit $u = 0{,}0000026617$, und folglich ist:

$$F = 384544605 \times (0{,}0000026617)^2.$$

Wenn das Verhältniß dieser Kraft zu der Erdschwere dem umgekehrten Verhältnisse der Quadrate der Entfernungen gleich ist, so hat man $\frac{F}{g} = \frac{r^2}{R^2}$, und wenn man für die Buchstaben ihre Zahlenwerthe substituirt und die Rechnungen verrichtet, so findet man:

$$\frac{F}{g} = \frac{F}{9{,}809} = 0{,}00028,$$

$$\frac{r^2}{R^2} = \frac{(6376606)^2}{(384544605)^2} = 0{,}00034.$$

Diese beiden Verhältnisse, welche bloß nach den Hauptdaten berechnet sind, werden also durch Zahlen ausgedrückt, deren Unterschied kleiner ist, als $\frac{1}{1000}$ und diese Uebereinstimmung ist hinreichend, um hinsichtlich der Wahrheit des zu beweisenden Satzes keinen Zweifel übrig zu lassen, d. h. der Mond wird bei seiner Bewegung um die Erde durch die Schwere, deren Intensität sich umgekehrt wie das Quadrat der Entfernungen verhält, in seiner Bahn erhalten.

§. 268. Wenn ein Körper vermöge der Wirkung der von einem festen Puncte ausgehenden Centralkraft den Umfang eines Vieleckes oder die in dasselbe beschriebene Curve, welche kein Kreis ist, beschreibt; so ist die Central- oder Centrifugalkraft nicht constant, wie bei der Bewegung im Kreise; aber die Dreiecke oder die Sectoren, welche der von dem festen Puncte nach dem beweglichen Körper gezogene Radiusvector beschreibt, sind den Zeiten proportional.

Diese Anwendung der Centralkräfte auf die Bewegung durch andere Curven als der Kreis ist bereits in §. 255 analytisch erörtert und der folgende Beweis wird das, was etwa noch unklar geblieben sein sollte, in das gehörige Licht setzen.

Es sei *C* (Fig. 145) der feste Punct, worin die auf den Körper *A* wirkende Centralkraft angebracht ist, und wir wollen annehmen, daß dieser Körper einen Stoß erhält, in Folge dessen er in dem ersten Augenblicke die Länge *AB* durchläuft und der Radiusvector *CA* das Dreieck *CAB* beschreibt In dem zweiten Augenblicke würde der Körper nach derselben Richtung die Länge $BE = AB$ durchlaufen, wenn die Centralkraft nicht auf ihn wirkte. Es sei *BF* der Raum, welchen der Körper in einem Augenblicke durchlaufen würde, wenn die Centralkraft allein auf ihn wirkte; aber wenn zu gleicher Zeit beide Kräfte auf ihn wirken, welche durch die auf ihren Richtungen genommenen Längen *BE*, *BF* ausgedrückt werden, so drückt die Diagonale *BD* des aus diesen geraden Linien construirten Parallelogrammes *BEDF* die Resultante dieser Kräfte aus und das Dreieck *CBD* ist der von dem Radiusvector während des zweiten Augenblickes beschriebene Raum.

Die beiden Dreiecke *CAB*, *CBE*, deren gemeinschaftliche Spitze im Puncte *C* liegt und deren in derselben geraden Linie liegenden Grundlinien *AB*, *BE* einander gleich sind, sind einander gleich und das Dreieck *CBE* ist dem Dreiecke *CBD* gleich; denn sie haben eine gemeinschaftliche Grundlinie *CB* und ihre Spitzen *E*, *D* liegen in einer zu dieser Grundlinie parallelen geraden Linie. Jedes der beiden Dreiecke *CAB*, *CBD* ist also demselben Dreiecke *CBE* gleich, und folglich sind diese beiden Dreiecke unter sich gleich.

Ebenso bewiese man, daß das während des dritten Augenblickes beschriebene Dreieck *CDG* dem während des zweiten Augenblickes beschriebenen Dreiecke *CBD* gleich ist, u. s. f. Folglich ist die von dem Radiusvector während einer beliebigen Zeit beschriebene Fläche dieser Zeit proportional.

Umgekehrt, wenn die von dem Radiusvector um den Mittelpunct *C* beschriebenen Flächen der Zeit proportional zunehmen, so ist die auf den Körper wirkende Kraft gegen diesen festen Mittelpunct gerichtet. Denn die beiden Dreiecke *CAB*, *CBD* sind einander gleich, weil sie in zwei gleichen auf einander folgenden Augenblicken beschrieben sind, und die beiden Dreiecke *CAB*, *CBE* sind auch einander gleich, weil sie gleiche Grundlinien haben und ihre gemeinschaftliche Spitze im Puncte *C* liegt; folglich sind die Dreiecke *CDB*, *CBE* einander gleich, und da sie eine gemeinschaftliche Grundlinie *CB* haben, so ist die ihre Spitzen verbindende gerade Linie *ED* zu ihrer Grundlinie parallel, woraus folgt, daß die beschleunigende oder die Centralkraft, welche den Körper von der geradlinigen Richtung ablenkt, nach dem Radiusvector *CB* wirkt.

§. 269. Die Theorie der Centralkräfte bildete die Grundlage der schönsten Entdeckung Newtons, welche je in den Naturwissenschaften gemacht sind, nämlich der Entdeckung der Kraft, unter deren Wirkung die Körper des Sonnensystemes sich bewegen. Wir haben vorhin gesehen, daß die Bewegung des Mondes um die Erde von der Schwere bewirkt wird, und dieselbe Kraft, welche man Attraction, allgemeine Schwere oder Gravitation nennt, wirkt auf alle Planeten, welche vermöge dieser Wirkung elliptische Bahnen beschreiben, deren gemeinschaftlicher Brennpunct im Mittelpuncte der Sonne liegt, und jeder Planet wird durch die Attraction in seiner Bahn erhalten, welche nach dem vom Mittelpuncte der Sonne nach dem Mittelpuncte des Planeten gezogenen Radiusvector wirkt.

Dieses System ist wegen seiner Einfachheit und der Regelmäßigkeit, womit die dasselbe bildenden Weltkörper ihre Bewegungen machen, seit dem höchsten Alterthume einer der Hauptgegenstände gewesen, welchen geistreiche Männer zu erforschen gesucht haben. Ihre Versuche bestanden in der Aufstellung von Hypothesen, vermittelst welcher sich die beobachteten Erscheinungen erklären ließen. Allein die mathematischen Wissenschaften und die mechanischen Künste mußten erst weitere Fortschritte machen; denn nur durch die Vereinigung beider konnten die Gesetze der Bewegung der Himmelskörper entdeckt und die sie bestätigenden Beobachtungen mit der gehörigen Genauigkeit angestellt werden.

§. 270. Die Gesetze der Bewegung der Himmelskörper sind die folgenden drei von Kepler entdeckten und daher seinen Namen führenden Gesetze:

1) Die Bahnen, welche die Schwerpuncte der Planeten beschreiben, sind Ellipsen, wovon der eine Brennpunct im Mittelpuncte der Sonne liegt.

2) Die Flächen der Sectoren, welche von den Radienvectoren beschrieben werden, die den Mittelpunct der Sonne mit dem des Planeten verbinden, sind den zu diesem Beschreiben erforderlichen Zeiten proportional.

3) Die Quadrate der Umlaufszeiten der Planeten verhalten sich wie die Cubi der großeu Axen ihrer Bahnen oder ihrer mittlern Entfernungen vom Mittelpuncte der Sonne.

Die beiden ersten dieser Gesetze wurden durch die Beobachtungen des Mars gefunden, und nach der Untersuchung der Beobachtungen von Tycho-Brahe fand Kepler bald, daß die Bahn dieses Planeten kein Kreis sei, und dasselbe ist durch Beobachtungen hinsichtlich der Bewegungen aller übrigen Planeten um die Sonne und der der Trabanten um ihre Hauptplaneten vollständig nachgewiesen.

Nach dem Systeme des Copernikus sollten sich die Planeten nicht um einen gemeinschaftlichen Mittelpunct bewegen, ihre Bahnen sollten Kreise sein und es sollten bei dem Durchlaufen derselben in gleichen Zeiten gleiche Bogen beschrieben werden. Da aber die Bahn der Planeten eine Ellipse ist, so ist die Bewegung nicht gleichförmig, und folglich sind die in gleichen Zeiten beschriebenen Bogen ungleich; aber nach dem zweiten vorhinbewiesenen Keplerschen Gesetze sind nicht die in gleichen Zeiten beschriebenen Bogen, sondern die in diesen Zeiten beschriebenen Flächen einander gleich.

Die Vermuthungen Kepler's über die vollkommene Harmonie der himmlischen Bewegungen haben ihn zu der Entdeckung seines dritten Gesetzes geführt. Er sah vorher ein, daß zwischen diesen Bewegungen ein einfaches und constantes Gesetz stattfinden müsse, mit dessen Auffuchung er sich 17 Jahre lang beschäftigt hat, bis ihm endlich nach langen und mühsamen Rechnungen diese Entdeckung gelang, worüber er so erfreut war, daß er sie für eine bloße Täuschung hielt. Gegenwärtig sind diese Rechnungen sehr einfach; denn wenn man mit T, t die Umlaufszeiten zweier Planeten, mit R, r ihre mittlern Entfernungen vom Mittelpuncte der Sonne und mit x den Exponenten des gesuchten Verhältnisses bezeichnet; so hat man die Exponentialgleichung:

$$\left(\frac{R}{r}\right)^x = \frac{T}{t},$$

woraus folgt, wenn man die Logarithmen nimmt und die unbekannte Größe x absondert:

$$x \log.\frac{R}{r} = \log.\frac{T}{t},\ x = \frac{\log. T - \log. t}{\log. R - \log. r}.$$

Für den Mars hat man:

$$T = 686,9796,\ R = 1,52369,$$

und für die Erde:

$$t = 365,2564,\ r = 1.$$

Wenn man die Logarithmen dieser Zahlen in die vorhergehende Gleichung substituirt, so erhält man:

$$x = \frac{2,8369438 - 2,5622978}{0,1828966 - 0} = \frac{2743460}{1828966}.$$

Dieser Werth von x wird durch einen irreductibeln Bruch ausgedrückt, dessen Zähler und Nenner große Zahlen sind; aber wenn man den größten gemeinschaftlichen Divisor derselben sucht und nach der Theorie der Kettenbrüche die Näherungswerthe bildet, so findet man:

2743460	1828966	914494	914472	22	20	2	0
1828966	1	1	1	41566	1	10	

$$1, 1, 1, 41566$$

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{0}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{124700}{83133}.$$

Der Bruch $\frac{3}{2}$ ist kleiner, als der, welcher den wahren Werth von x ausdrückt; aber der Unterschied ist kleiner, als $\frac{1}{100000}$, und wenn man diesen Bruch für x setzt, so hat man:

$$\frac{T}{t} = \left(\frac{R}{r}\right)^{\frac{3}{2}}, \text{ oder } \left(\frac{T}{t}\right)^2 = \left(\frac{R}{r}\right)^3,$$

welches der algebraische Ausdruck des dritten Keplerschen Gesetzes ist.

§. 271. Zu der Zeit, wo Kepler diese Gesetze entdeckte, sah man ihre hohe Wichtigkeit nicht ein, weil man die Anwendungen nicht kannte, welche sich davon machen ließen. Ein halbes Jahrhundert später nahm aber Newton die Materialien über die Theorie des Weltsystemes, welche von seinen Vorgängern geliefert waren, zu einer neuen Untersuchung auf und schrieb, indem er seine eigenen Entdeckungen hinzufügte, im Geiste der Geometrie der Alten sein berühmtes Werk: Mathematische Principien der Naturphilosophie, zu dessen Erläuterung und Vervollständigung länger als ein Jahrhundert hindurch die vereinigten Bemühungen der Geometer, der Astronomen und der Künstler erforderlich waren.

Nachdem Newton die Keplerschen Gesetze bewiesen hatte, wandte er sie zu dem Beweise des Satzes an: daß die Erde und die übrigen Planeten durch die allgemeine Schwere oder Gravitation in den Bahnen erhalten werden, welche sie um die Sonne beschreiben.

Wir wollen nun die Intensität dieser Kraft zu bestimmen suchen, indem wir die Keplerschen Gesetze durch die allgemeinen Formeln der veränderlichen Bewegung mit einander verbinden.

Da die Bahn jedes Planeten eine Ellipse ist, welche als von dem Radiusvector beschrieben angesehen werden kann, welcher den im Brennpuncte liegenden Mittelpunct der Sonne mit dem Mittelpuncte des Planeten verbindet; so wollen wir zunächst die Polargleichung dieser Ellipse suchen.

Die Ellipse ist eine der Curven, welche man Kegelschnitte genannt hat, weil man sie erhält, wenn man einen geraden Kegel mit einer Ebene durchschneidet. Man kann aber auch diese Curven nach den Eigenschaften definiren, wonach sie in der Ebene construirt werden. Um eine Ellipse zu beschreiben, wollen wir zwei gerade Linien ziehen, welche sich im Puncte C (Fig. 146) rechtwinklig durchschneiden, und auf einer dieser geraden Linien nach Belieben zwei gleiche Theile $CB = CA = a$ und auf der andern zwei kleinere gleiche Theile $CD = CE = b$ nehmen; so ist die gerade Linie $AB = 2a$ die große und $DE = 2b$ die kleine Axe der Ellipse. Aus dem Puncte D als Mittelpunct wollen wir mit einem der halben großen Axe gleichen Halbmesser zwei Kreisbogen beschreiben, welche diese große Axe in den Puncten F, F'

schneiden, so sind diese Puncte die sogenannten Brennpuncte der Ellipse und der Abstand $CF = CF'$ ihres Mittelpunctes C von einem dieser Brennpuncte wird die Excentricität der Ellipse genannt.

Wir wollen die große Axe im Puncte K in zwei Theile theilen und das Dreieck FMF' bilden, dessen Grundlinie die doppelte Excentricität FF' ist und dessen Seiten $FM = BK$, $F'M = AK$ zwei Radienvectoren sind; so ist die Spitze M dieses Dreieckes ein Punct der Ellipse und dasselbe gilt von allen über der Grundlinie FF' mit andern Theilen der großen Axe oder mit andern Radienvectoren construirten Dreiecken, woraus sich also ein einfaches und leichtes Mittel ergibt, beliebig viele Puncte der Ellipse zu bestimmen.

Aus dem Puncte M wollen wir auf die große Axe das Perpendikel oder die Ordinate MP fällen, so gibt das Dreieck FMF' nach einem bekannten geometrischen Lehrsatze, welchen wir bereits bei der Zusammensetzung der Kräfte angewandt haben:

$$(F'M)^2 = (F'F)^2 + (FM)^2 + 2FF' \times FM \cos. MFP.$$

Wir wollen die Radienvectoren FM, $F'M$ mit r, r' bezeichnen, das Verhältniß der Excentricität zu der halben großen Axe nämlich $\frac{CF}{a} = e$ und den Winkel $MFP = \Theta$ setzen; so verwandelt sich die vorhergehende Gleichung durch die Substitution dieser Werthe in folgende:

$$r'^2 = r^2 + 4a^2e^2 + 4ae.\ r \cos. \Theta.$$

Außerdem ist, wie wir gesehen haben, die Summe der Radienvectoren immer der großen Axe gleich, folglich:

$$r' = 2a - r,\ r'^2 = 4a^2 - 4ar + r^2,$$

und wenn wir diesen Werth von r'^2 in die vorhergehende Gleichung substituiren, so kommt:

$$r^2 + 4a^2e^2 + 4ae.\ r \cos. \Theta = 4a^2 - 4ar + r^2,$$

woraus folgt, wenn man die gemeinschaftlichen Factoren beider Theile hinwegläßt und transponirt:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos. \Theta},$$

welches die Polargleichung der Ellipse ist.

§. 272. Wir wollen nun aus den beiden ersten Keplerschen Gesetzen die Intensität der Kraft abzuleiten suchen, welche die Erde und die übrigen Planeten in ihrer Bahn um die Sonne erhält. Es sei F (Fig. 146) der gemeinschaftliche Brennpunct der elliptischen Planetenbahnen, worin sich der Mittelpunct der Sonne befindet, und durch diesen Punct wollen wir in der Ebene der Bahn eines Planeten, z. B. der Erde, die rechtwinkligen Axen FX, FY ziehen.

Wenn sich der Mittelpunct des Planeten im Puncte M seiner Bahn $BMDAE$ befindet, so bezeichne t die Zeit, welche er zum Beschreiben des Bogens BM gebraucht hat. Während derselben Zeit hat sein Radiusvector r einen elliptischen Sector von dem Winkel $BFM = \Theta$ beschrieben und während des folgenden Augenblickes dt beschreibt derselbe den Sector MFM', dessen Fläche $= {}^1/_2 r^2 d\Theta$ ist, und wenn

man die Fläche des von dem Radiusvector r während der Zeiteinheit beschriebenen Sectors mit $^1/_2 c$ bezeichnet, so hat man nach dem zweiten Keplerschen Gesetze:

$$\frac{\frac{1}{2} r^2 d\Theta}{dt} = \frac{\frac{1}{2} c}{1}, \text{ oder } r^2 d\Theta = c dt. \quad (1)$$

Es sei R die auf den Planeten wirkende beschleunigende Kraft, so ist dieselbe gegen den Mittelpunct der Sonne gerichtet und wirkt nach dem Radiusvector r, welcher diesen Mittelpunct mit dem des Planeten verbindet, und die nach den rechtwinkligen Axen wirkenden Componenten dieser Kraft sind $R \cos. \Theta$, $R \sin. \Theta$. Substituirt man diese Componenten für X, Y in die allgemeinen Gleichungen der veränderlichen Bewegung (§. 254) und bemerkt man, daß sie mit dem negativen Zeichen genommen werden müssen, weil sie die Coordinaten ihres Angriffspunctes zu verkleinern streben, so hat man die beiden Gleichungen der Bewegung:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -R \cos. \Theta, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -R \sin. \Theta.$$

Multiplicirt man die erste dieser Gleichungen mit $2dx$, die zweite mit $2dy$ und addirt die Producte zusammen, so erhält man die Gleichung:

$$\frac{2dxd^2x + 2dyd^2y}{dt^2} = -2R(dx \cos. \Theta + dy \sin. \Theta),$$

deren Integral folgendes ist:

$$\frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} = C - 2\int R(dx \cos. \Theta + dy \sin. \Theta). \quad (2)$$

Außerdem hat man die beiden Gleichungen:

$$x = r \cos. \Theta, \; y = r \sin. \Theta,$$

durch deren Differentiation man erhält:

$$dx = \cos. \Theta dr - r d\Theta \sin. \Theta,$$
$$dy = \sin. \Theta dr + r d\Theta \cos. \Theta,$$

woraus sich leicht ergibt:

$$dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2 d\Theta^2,$$
$$dx \cos. \Theta + dy \sin. \Theta = dr.$$

Werden diese Werthe in die Gleichung (2) subſtituirt und für den Nenner dt^2 sein aus der Gleichung (1) genommener Werth $\frac{r^4 d\Theta^2}{c^2}$ gesetzt, so erhält man:

$$\frac{c^2 dr^2}{r^2 d\Theta} + \frac{c^2}{r^2} = C - 2\int R dr. \quad (3)$$

Die Polargleichung der Ellipse kann auf folgende Form gebracht werden:

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + e \cos. \Theta}{a(1 - e^2)},$$

und ihr Differential ist:

$$\frac{dr}{r^2} = \frac{ed\Theta \sin.\Theta}{a(1-e^2)}.$$

Setzt man $d\Theta$ in den ersten Theil, erhebt beide Theile zum Quadrate und substituirt für $e^2 \sin.^2 \Theta$ seinen aus der vorhergehenden Gleichung genommenen Werth, so kommt:

$$\frac{dr^2}{r^4 d\Theta^2} = \frac{2ar - r^2 - a^2(1-e^2)}{a^2 r^2 (1-e^2)} = \frac{2}{a(1-e^2)}\frac{1}{r} - \frac{1}{r^2} - \frac{1}{a^2(1-e^2)},$$

und wenn man für diesen Differentialcoefficienten seinen Werth setzt, so verwandelt sich die Gleichung (3) in:

$$\frac{2c^2}{a(1-e^2)} \cdot \frac{1}{r} - \frac{1}{a^2(1-e^2)} = C - 2\int R dr.$$

Differentiirt man diese letzte Gleichung, so erhält man:

$$\frac{2c^2}{a(1-e^2)} \cdot \frac{dr}{r^2} = 2Rdr,$$

woraus folgt:

$$R = \frac{c^2}{a(1-e^2)} \cdot \frac{1}{r^2}.$$

Dieses Resultat zeigt, daß sich die Intensität der Kraft R im umgekehrten Verhältnisse des Quadrates der Entfernung r des Mittelpunctes des Planeten von dem der Sonne ändert.

§. 273. Wenn man die Entfernung des Mittelpunctes der Sonne von dem des Planeten zur Einheit nimmt, oder wenn man den Radiusvector $r = 1$ setzt, so ist die Kraft $R = \frac{c^2}{a(1-e^2)}$. Die constanten Größen a, e und c sind für zwei verschiedene Planeten nicht dieselben; allein wir wollen vermittelst des dritten Keplerschen Gesetzes sogleich beweisen, daß die Kraft R auf alle Planeten des Sonnensystemes nach demselben Gesetze wirkt.

Es bezeichne T die ganze Umlaufszeit des Planeten um die Sonne, so drückt cT, da c die doppelte Fläche des von seinem Radiusvector während der Zeiteinheit beschriebenen elliptischen Sectors ausdrückt, die doppelte Fläche der elliptischen Planetenbahn aus, und da diese Fläche auch durch $\pi a^2 \sqrt{1-e^2}$ ausgedrückt wird, so ergibt sich $c = \frac{2\pi a^2 \sqrt{1-e^2}}{T}$. Wenn man diesen Werth von c in den der Kraft R bei der Einheit der Entfernung substituirt, so hat man:

$$R = \frac{c^2}{a(1-e^2)} = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}.$$

Das Verhältniß $\frac{a^3}{T^2}$ des Quadrates der ganzen Umlaufszeit des Planeten zu dem Cubus der halben großen Axe seiner Bahn ist für zwei verschiedene Planeten nach dem dritten Keplerschen Gesetze dasselbe, und folglich ist die beschleunigende Kraft R für die Einheit der Entfernung, oder überhaupt bei gleichen Entfernungen, dieselbe und

ihre Intensität ändert sich nur bei ungleichen Entfernungen der Planeten von der Sonne, und bei derselben Entfernung der Planeten von der Sonne ist die bewegende Kraft der Masse proportional.

In §. 267 haben wir gesehen, daß die Kraft, welche den Mond in seiner Bahn erhält, die er um die Erde beschreibt, die Erdschwere ist, deren Intensität im umgekehrten Verhältnisse des Quadrates der Entfernung vom Mittelpuncte der Erde steht. Die Bahn des Mondes ist eine Ellipse, in deren einem Brennpuncte sich der Mittelpunct der Erde befindet und dasselbe ist bei allen übrigen Planeten der Fall, welche Trabanten haben.

Aus der vorhergehenden Untersuchung gehet hervor, daß das umgekehrte Verhältniß des Quadrates der Entfernung vom Mittelpuncte der Sonne auch das Gesetz ist, welches die Planeten in ihren Bahnen erhält, und vermöge dessen sie elliptische Bahnen um die Sonne beschreiben. Alle Körper des Sonnensystemes sind diesem Gesetze, dessen Entdeckung wir Newton verdanken, unterworfen, und ihre Bewegungen entspringen aus der Verbindung einer momentan wirkenden Kraft und einer stetig wirkenden Kraft, deren Intensität im umgekehrten Verhältnisse des Quadrates der Entfernungen vom Mittelpuncte der Sonne steht. Ungeachtet der Störungen oder Perturbationen, welche die Planeten des Sonnensystemes auf einander ausüben, indem diese Körper einander gegenseitig mit Kräften anziehen, welche ihren Massen proportional sind, wird dieses große Gesetz, welches Newton das Gesetz der allgemeinen Schwere oder Gravitation genannt hat, durch die Theorie und durch die Beobachtungen bestätigt.

§. 274. Wir wollen nun den Ausdruck der Geschwindigkeit suchen, mit welcher sich die Erde in ihrer Bahn bewegt. Wird diese Geschwindigkeit mit v bezeichnet, so hat man:

$$v^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} = \frac{dr^2 + r^2 d\Theta^2}{dt^2},$$

und wenn man dt^2 zwischen dieser und der Gleichung (1) eliminirt, so erhält man:

$$v^2 = \frac{c^2 dr^2}{r^2 d\Theta^2} + \frac{c^2}{r^2}.$$

Im vorletzten §. haben wir gefunden:

$$\frac{dr^2}{r^4 d\Theta^2} = \frac{2}{ar(1-e^2)} - \frac{1}{r^2} - \frac{1}{a^2(1-e^2)}.$$

Substituirt man diesen Werth in die vorhergehende Gleichung, so verwandelt sie sich in:

$$v^2 = \frac{c^2(2a-r)}{a^2 r(1-e^2)} = \frac{c^2}{a^2(1-e^2)}\left(\frac{2a}{r} - 1\right),$$

und wenn man den Werth des Coefficienten $\frac{c^2}{a^2(1-e^2)} = \frac{4\pi^2 a^2}{T^2}$ substituirt, so erhält man:

$$v = \frac{2\pi a}{T}\sqrt{\frac{2a}{r} - 1}.$$

Die einzige veränderliche Größe, welche in diesem Ausdrucke der Geschwindigkeit vorkommt, ist der Radiusvector r, welche constant wäre, wenn die Bahn kreisförmig wäre und die Erde beschriebe alsdann diese Bahn mit einer gleichförmigen Bewegung.

Die große Axe AB der Erdbahn wird die Apsidenlinie genannt. Der am weitesten von der Sonne entfernte Punct A heißt das Aphelium und der der Sonne am nächsten liegende Punct B das Perihelium.

Da der Radiusvector r nach dem zweiten Keplerschen Gesetze in gleichen Zeiten Sectoren von gleichen Flächen beschreibt, so müssen die Winkel dieser Sectoren desto größer sein, je kürzer die Radienvectoren sind, und folglich muß der Planet seine größte Geschwindigkeit haben, wenn er sich im Perihelium seiner Bahn befindet, und diese Geschwindigkeit muß im Aphelium oder in dem am weitesten von der Sonne entfernten Puncte seiner Bahn am kleinsten sein. Dieses folgt auch aus der vorhergehenden allgemeinen Formel der Geschwindigkeit und wird noch einleuchtender, wenn man die Ausdrücke des Radiusvectors in dieselbe einführt, welche für das Perihelium und Aphelium resp. $r = a\,(1-e)$, $r = a\,(1+e)$ sind. Substituirt man diese Werthe von r, so findet man für die Geschwindigkeit im Perihelium:

$$V = \frac{2\pi a}{T}\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$$

und für die im Aphelium:

$$v = \frac{2\pi a}{T}\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}.$$

In diesen Formeln drücken die Buchstaben bekannte, oder durch die Beobachtungen bestimmte Zahlen aus, nämlich $\pi = 3{,}1416$, $T = 365{,}2564$ Tage $= 31558153$ Secunden Sternzeit, $a = 39229000$ fr. Meilen, jede von 2000 Toisen oder 3898 Meter, $AF = 39887261$, $FB = 38570739$, also die Excentricität $CF = 658261$, und folglich $e = \frac{CF}{a} = 0{,}01678$. Substituirt man diese Zahlen statt der Buchstaben und rechnet mit Logarithmen, so findet man:

	$log.\ 2\pi$	$= 0{,}7981809$
	$log.\ a$	$= 7{,}5936072$
dec. Erg.	$log.\ T$	$= 2{,}5008884$
		$10{,}8926765$
	$\frac{1}{2}\,log.\,(1+e)$	$= 0{,}0036135$
dec. Erg.	$\frac{1}{2}\,log.\,(1-e)$	$= 10{,}0036747$
	$log.\ V$	$= 20{,}8999647$

$V = 7',942636.$

		$10{,}8926765$
	$\frac{1}{2}\,log.\,(1-e)$	$= \overline{1}{,}9963253$
dec. Erg.	$\frac{1}{2}\,log.\,(1+e)$	$= 9{,}9963865$
	$log.\ v$	$= 20{,}8853883$

$v = 7',680477.$

Diese Geschwindigkeiten haben einen gemeinschaftlichen Factor $\frac{2\pi a}{T}$ $= 7{,}80458$ und ihr Unterschied ist von der Excentricität abhängig.

Wir wollen die Gleichung (1) wieder betrachten, nämlich:

$$r^2 d\Theta = c\,dt, \quad \frac{d\Theta}{dt} = \frac{c}{r^2}.$$

Der Differentialcoefficient $\frac{d\Theta}{dt}$ drückt die Winkelgeschwindigkeit der Erde oder die Geschwindigkeit aus, mit welcher ihr Radiusvector $FM = r$ den Sector BFM beschreibt. Betrachtet man denselben als einen Kreisausschnitt und beschreibt den Bogen Θ mit dem Halbmesser $= 1$, so wird die mittlere Winkelgeschwindigkeit der Erde ausgedrückt durch:

$$\frac{d\Theta}{dt} = \frac{\Theta}{t} = \frac{2\pi}{T}.$$

Wir wollen aus dem Brennpuncte F als Mittelpunct mit dem Halbmesser FB einen Kreis beschreiben und uns vorstellen, daß ein fingirter Planet, welcher in demselben Augenblicke mit der Erde vom Perihelium B ausgeht, sich auf dem Umfange dieses Kreises mit einer gleichförmigen Geschwindigkeit bewegt, welche der mittlern Geschwindigkeit der Erde gleich ist. Da die Erde im Perihelium ihre größte Geschwindigkeit hat, so geht sie vor dem fingirten Planeten voraus; aber es tritt ein Augenblick ein, wo die beiden Planeten dieselbe Geschwindigkeit haben, und worauf die Geschwindigkeit der Erde kleiner wird, als die des fingirten Planeten, und folglich die gegenseitige Entfernung beider immermehr abnimmt, bis sie endlich beide gleichzeitig ins Aphelium gelangen. In der zweiten Hälfte der Bahn sind die relativen Bewegungen der beiden Planeten die umgekehrten, d. h. der fingirte Planet geht vor der Erde voran, ihre Geschwindigkeiten werden in einem bestimmten Augenblicke wieder einander gleich, worauf die der Erde größer wird, als die des fingirten Planeten, sich beide Körper also einander nähern und endlich gleichzeitig ins Perihelium gelangen.

Wenn am Ende der Zeit t der Radiusvector der Erde durch FM dargestellt wird und FN der des fingirten Planeten ist, so wird der Winkel MFN zwischen diesen beiden Radienvectoren die Mittelpunctsgleichung genannt und drückt die Größe aus, welche man zu der gleichförmigen Bewegung des fingirten Planeten mit dem positiven oder negativen Zeichen hinzufügen muß, um die wirkliche Bewegung der Erde zu erhalten; denn die Mittelpunctsgleichung wird negativ, wenn beide Planeten durch das Aphelium gegangen sind und sich dann in der zweiten Hälfte der Bahn bewegen.

Das Sternjahr oder die ganze Umlaufszeit der Erde um die Sonne ist $T = 365{,}25638$ Tage, und wenn man $2\pi = 360^\circ$ setzt, so ist die mittlere Winkelgeschwindigkeit der Erde oder der Bogen ihrer Bahn, welchen sie in einem mittlern Tage beschreibt:

$$\frac{2\pi}{T} = \frac{360^\circ}{365{,}25638} = \frac{21600}{365{,}25638} = 59'8''.$$

Das Aequinoctialjahr (tropische Jahr) ist kürzer, als das Sternjahr, weil die Aequinoctialpuncte eine retrograde, d. h. der Bewegung der Erde entgegengesetzte Bewegung haben, welche jährlich 50″,1 beträgt. Die Zeit, welche der Mittelpunct der Erde zum Durchlaufen dieses kleinen Bogens gebraucht, ist = 0,01412 Tage, und wenn man sie von dem Sternjahre abzieht, so findet man die Dauer des Aequinoctialjahres = 365,24226 Tage = 365 Tage 5 Stunden 48 Minuten 51 Secunden.

Zehntes Kapitel.

Von den Trägheitsmomenten.

§. 275. Unter dem Trägheitsmomente eines Körpers in Beziehung auf eine gerade Linie oder Axe versteht man nach Euler die Summe der Producte aus jedem Molecule dieses Körpers und dem Quadrate seiner Entfernung von dieser Axe. Wir wollen über die Rechnungen, durch welche man diese Größen bestimmt, Einiges mittheilen, indem wir die Körper als homogen annehmen und uns auf die einfachsten Sätze beschränken, deren wir in den folgenden Kapiteln bedürfen.

Zunächst wollen wir das Trägheitsmoment eines rechtwinkligen Parallelepipedums in Beziehung auf eine auf seiner Grundfläche senkrechte und durch seinen Schwerpunct gehende Axe bestimmen. Wir wollen annehmen, daß das Parallelepipedum (Fig. 147) mit einer durch seinen Schwerpunct gehenden und zu seiner Grundfläche parallelen Ebene durchschnitten sei, den Punct O des Durchschnittes $ABCD$, worin sich der Schwerpunct befindet, zum Anfangspuncte der Coordinaten nehmen und durch denselben die Axen OX, OY parallel zu den Seiten AB, AD ziehen. Es sei m die Projection eines Massenelementes des Parallelepipedums auf diesen Durchschnitt und x, y seien die Coordinaten dieses Elementes, dessen unendlich kleine Dimensionen die Differentiale dx, dy, dz sind, und dessen Volumen durch das Product $dxdydz$ ausgedrückt wird. Die Summe der Quadrate $x^2 + y^2$ seiner Coordinaten drückt das Quadrat seiner Entfernung von der Axe der z aus, welche durch den Schwerpunct des Parallelepipedums geht, und folglich wird das Trägheitsmoment des letztern ausgedrückt durch:

$$\int r^2 dm = \int (x^2 + y^2)\, dxdydz.$$

Integrirt man zunächst in Beziehung auf z und nimmt das Integral von $z = {}^1/_2 h$ bis $z = -{}^1/_2 h$, wo h die Höhe des Parallelepipedums ausdrückt; so hat man:

$$h \int (x^2 dxdy + y^2 dydx).$$

Die Integration in Beziehung auf y gibt:

$$h \int (yx^2 dx + \frac{y^3}{3} dx),$$

und nimmt man dieses Integral von $y = +\,{}^1/_2 b$ bis $y = -\,{}^1/_2 b$, oder was dasselbe ist, setzt man $y = {}^1/_2 b$ und verdoppelt das Resultat; so kommt:

$$hf(bx^2dx + \frac{b^3}{12}dx).$$

Eine ähnliche Integration in Beziehung auf x gibt:

$$h\left(\frac{a^3b}{12} + \frac{ab^3}{12}\right) = \frac{1}{12}abh\,(a^2 + b^2),$$

welches der Ausdruck des gesuchten Trägheitsmomentes ist.

Als zweites Beispiel wollen wir das Trägheitsmoment eines verticalen Cylinders in Beziehung auf seine Axe suchen.

Der Cylinder wird durch die Umdrehung eines Rechteckes von derselben Höhe h als seine Axe und von einer Grundlinie, welche dem Halbmesser $OA = a$ (Fig. 148) des Kreises gleich ist, welcher die Grundfläche des Cylinders bildet. In diesem Kreise wollen wir die beiden einander unendlich nahe liegenden Halbmesser OB, OC ziehen und den Winkel AOB oder den mit einem Halbmesser $= 1$ aus dem Mittelpuncte O zwischen den Schenkeln dieses Winkels beschriebenen Bogen mit Θ bezeichnen, so ist $d\Theta$ das Maaß des unendlich kleinen Winkels BOC.

Aus dem Mittelpuncte O wollen wir mit den Halbmessern r und $r + dr$ zwischen den Halbmessern OB, OC die Bogen pq, $p'q'$ ziehen, so ist der Bogen $pq = rd\Theta$ und das Viereck $pqq'p'$ kann als ein Rechteck betrachtet werden, dessen Flächeninhalt durch $rd\Theta \times dr = rdrd\Theta$ ausgedrückt wird. Betrachtet man dasselbe als die Grundfläche eines Parallelepipedums von der Höhe dz, so erhält man das Volumen- oder Massenelement des Cylinders $dm = rdrd\Theta dz$, und wenn man jeden Theil der letzten Gleichung mit r^2 multiplicirt und die Integration andeutet, so wird das gesuchte Trägheitsmoment des Cylinders ausgedrückt durch:

$$\int r^2 dm = \int r^2 dr\, d\Theta dz. \quad (a)$$

Die Integrale des zweiten Theiles lassen sich sehr leicht erhalten. Zunächst hat man $\int r^3 dr = \frac{r^4}{4} = \frac{a^4}{4}$, indem man den äußern Halbmesser a für r setzt. Da die Höhe des Cylinders durch h ausgedrückt wird, so ist $\int dz = z = h$. Der Bogen Θ ist mit dem Halbmesser $= 1$ beschrieben, und folglich ist das Integral in Beziehung auf Θ von $\Theta = 0$ bis $\Theta = 2\pi$, nämlich $\int d\Theta = 2\pi$. Nach diesen drei Integrationen verwandelt sich die Gleichung (a) in:

$$\int r^2 dm = \frac{a^4}{4} \times h \times 2\pi = \frac{\pi a^2 h}{2} a^2,$$

woraus man sieht, daß das Trägheitsmoment des Cylinders dem Producte aus der Hälfte seines Volumens und aus dem Quadrate des Halbmessers seiner Grundfläche gleich ist.

§. 276. Von allen festen Körpern werden die sogenannten Rotationskörper am häufigsten in der Praxis angewandt, und zur Berech-

nung des Trägheitsmomentes eines solchen Körpers kann man sich der Formel (*a*) bedienen, indem man sie auf folgende Weise abändert.

Für jeden Rotationskörper ist das von $\Theta = 0$ bis $\Theta = 2\pi$ genommene Integral $\int d\Theta = 2\pi$. Integrirt man ferner von $r = o$ bis $r = y$, so hat man $\int r^3 dr = \frac{y^4}{4}$, und wenn man diese Integrale substituirt und x für z setzt, so erhält man:

$$\int r^2 dm = \int \frac{y^4}{4} 2\pi dx = {}^1/_2 \pi \int y^4 dx. \qquad (b)$$

Um diese Formel auf einige Beispiele anzuwenden, wollen wir zunächst das Trägheitsmoment des geraden Kegels zu bestimmen suchen, welcher durch die Umdrehung des rechtwinkligen Dreieckes *AOB* (Fig. 149) um die Kathete *AO*, welche mit der Axe der x zusammenfällt, erzeugt wird und dessen Spitze *A* im Anfangspuncte der Coordinaten liegt.

Die gerade Linie *AB*, welche die convexe Oberfläche des Kegels beschreibt, bilde mit der Axe der x einen Winkel, dessen Tangente wir mit α bezeichnen wollen, so ist die Gleichung dieser geraden Linie:

$$y = \alpha x,$$

und wenn dieser Werth von y in die Formel (*b*) substituirt wird, so erhält man:

$$\int r^2 dm = {}^1/_2 \pi \alpha^4 \int x^4 dx.$$

Setzt man die Axe des Kegels $AO = l$, den Halbmesser seiner Grundfläche $OB = a$ und integrirt von $x = o$ bis $x = l$; so findet man, daß das Trägheitsmoment des Kegels ausgedrückt wird durch:

$$\int r^2 dm = \frac{1}{10} \pi \alpha^4 l^5 = \frac{1}{10} \pi a^4 l = \frac{\pi a^2 l}{3} \cdot \frac{3a^2}{10}.$$

Aus diesem Resultate sieht man, daß das Trägheitsmoment des Kegels, wenn die Dichtigkeit $= 1$ gesetzt wird, durch das Product aus seinem Volumen oder seiner Masse und ${}^3/_{10}$ des Quadrates des Halbmessers seiner Grundfläche ausgedrückt wird.

Wenn man von $x = AP$ bis $x = AO$ integrirt, indem man der Kürze wegen $AO = l$, $AP = k$, $AO - AP = OP = h$, $BO = a$ und $DP = b$ setzt; so erhält man:

$${}^1/_{10} \pi \alpha^4 (l^5 - k^5)$$

für das Trägheitsmoment des abgestumpften Kegels, welcher durch die Umdrehung des Trapezes *OBDP* erzeugt wird, in Beziehung auf die Axe des Kegels. Man kann diesem Ausdrucke eine andere Form geben, wenn man die Halbmesser der Grundflächen einführt. Denn die rechtwinkligen Dreiecke *AOB*, *APD* geben:

$$l = \frac{a}{\alpha}, k = \frac{b}{\alpha}, \alpha = \frac{a-b}{l-k} = \frac{a-b}{h},$$

und wenn man diese Werthe substituirt, so verwandelt sich der Ausdruck des Trägheitsmomentes des abgestumpften Kegels in:

$$^1/_{10}\pi\left(\frac{a-b}{h}\right)^4 \frac{a^5-b^5}{\left(\frac{a-b}{h}\right)^5} = {}^1/_{10}\pi h\,\frac{a^5-b^5}{a-b}.$$

Wenn man $b=o$ setzt, so erhält man den bereits gefundenen Werth des Trägheitsmomentes des ganzen Kegels.

Setzt man $a=b$, so erscheint der Bruch $\frac{a^5-b^5}{a-b}$, und folglich auch die damit multiplicirte Größe unter der Form $\frac{0}{0}$; aber wenn man den Zähler durch den Nenner dividirt, so erhält man:

$$^1/_{10}\pi h\,(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4),$$

und wenn man alsdann $a=b$ setzt, so gibt diese Formel das schon gefundene Trägheitsmoment des Cylinders.

Als drittes Beispiel wollen wir das Trägheitsmoment der Kugel in Beziehung auf einen ihrer Durchmesser suchen.

Es sei AMB (Fig. 150), der Halbkreis, durch dessen Umdrehung um den mit der Axe der x zusammenfallenden Durchmesser AB die Kugel erzeugt wird. Das Perpendikel MP auf dem Durchmesser $AB=2a$ ist eine Ordinate des Kreises, dessen Gleichung folgende ist:

$$y^2=2ax-x^2,\ y=\sqrt{2ax-x^2}.$$

Substituirt man diesen Werth von y in die Gleichung (b), so erhält man:

$$\int r^2dm={}^1/_2\pi\int(4a^2x^2-4ax^3+x^4)\,dx, \qquad (c)$$

und wenn man von $x=o$ bis $x=2a$ integrirt und reducirt, so erhält man:

$$^8/_{15}\pi a^5={}^4/_3\pi a^3\times{}^2/_5\,a^2$$

für das Trägheitsmoment der ganzen Kugel, woraus man sieht, daß dasselbe durch das Product aus ihrem Volumen oder ihrer Masse und $^2/_5$ des Quadrates ihres Halbmessers ausgedrückt wird.

Um das Trägheitsmoment eines Kugelabschnittes von der Höhe $AP=f$ in Beziehung auf den auf seiner Grundfläche senkrechten Durchmesser zu erhalten, muß man den zweiten Theil der Gleichung (c) von von $x=o$ bis $x=f$ integriren, wodurch man erhält:

$$^1/_2\pi f^3\,(^4/_3a^2-af+{}^1/_5f^2).$$

Das Trägheitsmoment eines Körpers bezieht sich immer auf eine bestimmte Axe, weil diese Größe bei der Bestimmung der Rotationsbewegung eines Körpers um eine gewisse Axe bekannt sein muß.

§. 277. Bei den eben betrachteten Aufgaben über die Trägheitsmomente der Körper haben wir diese Trägheitsmomente nur in Beziehung auf die durch den Schwerpunct gehenden Axen betrachtet. Oft ist aber die Lage dieser Axe von der der Rotationsaxe verschieden; allein wenn man das Trägheitsmoment eines Körpers in Beziehung auf eine durch seinen Schwerpunct gehende Axe kennt, so kann man nach der sogleich zu erörternden Regel leicht das Trägheitsmoment dieses Körpers in Beziehung auf eine andere zu der ersten parallele Axe finden.

Es sei A (Fig. 151) der Schwerpunct des Körpers und wir wollen durch diesen Punct die drei rechtwinkligen Axen AX, AY, AZ ziehen, ferner annehmen, daß das Trägheitsmoment des Körpers in Beziehung auf die verticale Axe AZ bekannt sei, und den Werth dieses Trägheitsmomentes in Beziehung auf eine andere zu der Axe AZ parallele und um die bekannte Länge $AA' = a$ davon entfernte Axe $A'Z'$ zu bestimmen suchen.

Die Coordinaten AB, BA' des Punctes A', worin die Axe $A'Z'$ die Ebene der xy trifft, wollen wir mit b, c bezeichnen; so gibt das rechtwinklige Dreieck ABA' die Relation $a^2 = b^2 + c^2$.

Es sei ferner m eines der Molecule des Körpers und $mE = r$, $mF = r'$ seien die Entfernungen desselben von den beiden Axen AZ, $A'Z'$; so wollen wir auf die Ebene der xy das Perpendikel mp fällen, pC parallel zu AY, dann Ap ziehen und die Coordinaten AC, Cp des Punctes p mit x, y bezeichnen; so haben wir, wenn wir bemerken, daß $pA = mE = r$ ist, die Relation $r^2 = x^2 + y^2$.

Es ist $mF = pA' = r'$, so gibt, wenn man pq parallel zu AX zieht, das rechtwinklige Dreieck $A'qp$ die Relation:

$$r'^2 = (x - b)^2 + (c - y)^2 =$$
$$x^2 - 2bx + b^2 + c^2 - 2cy + y^2,$$

und wenn man für $x^2 + y^2$, $b^2 + c^2$ die vorhingefundenen Werthe setzt, so bekommt man:

$$r'^2 = r^2 + a^2 - 2bx - 2cy.$$

Multiplicirt man alle Glieder dieser Gleichung mit dm und integrirt dann, so geht sie über in:

$$\int r'^2\,dm = \int r^2 dm + a^2 \int dm - 2b \int x\,dm - 2c \int y\,dm.$$

Wenn der Schwerpunct der Anfangspunct ist, so hat man $\int x\,dm = 0$ und $\int y\,dm = 0$; denn wenn man diese Integrale durch die Masse des Körpers dividirt, so müßten die Quotienten die Abstände des Schwerpunctes von den Ebenen der yz und der xz ausdrücken, welche Abstände in diesem Falle offenbar $= 0$ sind. Das Integral $\int dm$ drückt die Masse M des Körpers aus und die vorhergehende Gleichung reducirt sich folglich auf:

$$\int r'^2\,dm = \int r^2 dm + Ma^2.$$

Dieses Resultat zeigt, daß das Trägheitsmoment des Körpers in Beziehung auf die zweite Axe der Summe aus dem Trägheitsmomente des Körpers in Beziehung auf die erste durch seinen Schwerpunct gehende Axe und dem Producte aus seiner Masse und dem Quadrate des gegenseitigen Abstandes der beiden Axen gleich ist.

Man kann der eben erhaltenen Gleichung auch folgende Form geben:

$$\int r'^2\,dm = M\left(\frac{\int r^2 dm}{M} + a^2\right),$$

und wenn man der Kürze wegen $\frac{\int r^2 dm}{M} = k^2$ setzt, so hat man:

$$\int r'^2\,dm = M(k^2 + a^2).$$

Aus diesen Formeln folgt, daß das Trägheitsmoment eines beliebigen Körpers in Beziehung auf eine durch seinen Schwerpunct gehende Axe kleiner ist, als in Beziehung auf eine andere zu der ersten parallele Axe.

Das Trägheitsmoment eines rechtwinkligen Parallelepipedums in Beziehung auf die auf seiner Grundfläche senkrechte und durch seinen Schwerpunct gehende Axe haben wir im Vorhergehenden $= {}^1/_{12} abh\,(a^2 + b^2)$ gefunden, und wenn man das Trägheitsmoment in Beziehung auf eine der Kanten des Parallelepipedums nach der vorhergehenden Regel bestimmt, so findet man:

$$\tfrac{1}{12} abh\,(a^2 + b^2) + abh\,\frac{a^2 + b^2}{4} = {}^1/_3 abh\,(a^2 + b^2),$$

welches 4mal größer ist, als das erste.

Elftes Kapitel.

Ueber die Rotationsbewegung eines festen Körpers um eine feste Axe.

Krummlinige Bewegungen kann es von so vielen verschiedenen Arten geben, als es krumme Linien gibt; allein in der Mechanik ist nur eine kleine Anzahl solcher Bewegungen im Gebrauch und von diesen ist die kreisförmige Bewegung diejenige, welche am häufigsten angewandt wird, wozu namentlich auch die Rotationsbewegung eines Körpers um eine feste Axe gehört, deren Theorie von den Geometern aufgestellt ist, indem sie sowohl für den Fall der gleichförmigen, als für den der veränderlichen Bewegung allgemeine Formeln gefunden haben. Wir wollen jetzt die wichtigsten dieser Formeln ableiten und dann später einige Anwendungen derselben mittheilen.

Von der gleichförmigen Rotationsbewegung.

§. 278. Wir wollen zunächst die gleichförmige Bewegung eines sich um eine feste Axe drehenden festen Körpers untersuchen und der Einfachheit wegen diesen Körper als ein System von Moleculen oder materiellen Puncten betrachten, welche unter sich und mit der festen Axe auf eine unveränderliche Weise verbunden sind.

Vermöge der auf dieses System wirkenden Kräfte beschreibt jedes Molecul einen Kreis, welcher in einer auf der festen Axe senkrechten Ebene liegt, indem diese Axe durch die Mittelpuncte aller dieser Kreise geht. Alle Molecule, deren Massen wir mit m, m', m'', *etc.* bezeichnen wollen, beschreiben in derselben Zeit Kreisbogen von derselben Anzahl von Graden, deren Längen sich aber wie ihre Halbmesser verhalten.

Unter der Winkelgeschwindigkeit eines rotirenden Körpers versteht man die auf dem Kreisumfange von dem Halbmesser $= 1$ ge-

messene Geschwindigkeit, welche für alle materielle Puncte des Systemes dieselbe ist, und wir wollen annehmen, daß alle an dem Systeme angebrachten Kräfte gleichzeitig und momentan wirken, wodurch eine gleichförmige Rotationsbewegung hervorgebracht wird.

Wir wollen die drei rechtwinkligen Axen OX, OY, OZ (Fig. 152) so ziehen, daß die Axe OZ vertical ist, die Massen m, m', m'', *etc.* des Systemes vermittelst der Coordinaten x, y, z auf diese Axen beziehen und die verticale Axe OZ zur festen Rotationsaxe nehmen.

Wenn die Kräfte, welche die als frei vorausgesetzten Massen m, m', m'', *etc.* in Bewegung setzen, gegen die feste Axe OZ schiefe Richtungen haben, so zerlegt man jede dieser Kräfte in zwei andere, wovon die eine parallel zu dieser Axe und die andere in einer darauf senkrechten Ebene wirkt, so daß man die zu der festen Axe parallelen Componenten unberücksichtigt lassen kann, weil sie auf die Rotationsbewegung um diese Axe keinen Einfluß haben, und wenn man die Geschwindigkeiten, welche den in den auf der Axe OX senkrechten Ebenen liegenden Kräften entsprechen, mit v, v', v'', *etc.* bezeichnet, so werden die entsprechenden Quantitäten der Bewegung ausgedrückt durch mv, $m'v'$, $m''v''$, *etc.*

Wir wollen die Entfernungen der materiellen Puncte m, m', m'', *etc.* von der festen Rotationsaxe oder die Halbmesser der Kreise, welche diese materiellen Puncte um diese Axe beschreiben, mit r, r', r'', *etc.* und die Winkelgeschwindigkeit des Systemes mit ω bezeichnen; so sind die absoluten Geschwindigkeiten der materiellen Puncte resp. $r\omega$, $r'\omega$, $r''\omega$, *etc.* und ihre Quantitäten der Bewegung werden resp. ausgedrückt durch $mr\omega$, $m'r'\omega$, $m''r''\omega$, *etc.* Man hat also folgende Kräfte oder Quantitäten der Bewegung:

$$mv,\ m'v',\ m''v'',\ etc.,\ mr\omega,\ m'r'\omega,\ m''r''\omega,\ etc.$$

und nach dem D'Alembertschen Principe muß die Summe der ersten Kräfte, in der Richtung, welche sie vor dem Stoße hatten, genommen, der Summe der zweiten Kräfte oder der der kreisförmigen Bewegung entsprechenden, mit entgegengesetztem Zeichen, oder nach einer der Richtung der Bewegung des Systemes entgegengesetzten Richtung genommen, das Gleichgewicht halten. Da diese beiden gleichen Summen von Quantitäten der Bewegung das System nach entgegengesetztem Sinne um die feste Axe OZ zu drehen streben, so folgt, daß die in Beziehung auf diese Axe genommenen Momente einander gleich sind.

Die Quantitäten der kreisförmigen Bewegung $mr\omega$, $m'r'\omega$, $m''r''\omega$, *etc.* haben die Momente:

$$mr\omega.r + m'r'\omega.r' + m''r''\omega.r'' + etc.$$
$$= \omega\,(mr^2 + m'r'^2 + m''r''^2 + etc.),$$

und wenn man die Perpendikel zwischen der Axe OZ und den Richtungen der Quanitäten der Bewegung mv, $m'v'$, $m''v''$, *etc.* mit f, f', f'', *etc.* bezeichnet, so wird die Summe der Momente dieser Quantitäten der Bewegung durch $mvf + m'v'f' + m''v''f'' + etc.$ ausgedrückt, und da diese Summe der vorhergehenden gleich sein muß, so erhält man den Werth der Winkelgeschwindigkeit:

$$\omega = \frac{mvf + m'v'f' + m''v''f'' + etc.}{mr^2 + m'r'^2 + m''r''^2 + etc.}.$$

Betrachten wir nun den Fall, wo die Geschwindigkeiten v, v', v'', *etc.* alle einander gleich sind. Wenn man durch die feste Axe OZ eine zu der Richtung dieser Geschwindigkeiten parallele Ebene legt, so sind die geraden Linien f, f', f'', *etc.* die von jedem Massenelemente m, m', m'', *etc.* auf diese Ebene gefällten Perpendikel. Bezeichnet man das aus dem Schwerpuncte dieser Massen auf diese Ebene gefällte Perpendikel mit F, die Summe dieser Massen mit M und ihre gemeinschaftliche Geschwindigkeit mit V; so hat man nach der Theorie des Schwerpunctes:

$$mvf + m'v'f' + m''v''f'' + etc. = MV.F,$$

und wenn man diesen Werth in die letzte Gleichung substituirt, so erhält man:

$$\omega = \frac{MV.F}{mr^2 + m'r'^2 + m''r''^2 + etc.}.$$

Wenn das System der materiellen Puncte in zwei Theile getheilt wird, wovon bloß dem einen die Geschwindigkeit V unmittelbar mitgetheilt wird und L bezeichnet die Masse dieses Theiles des Systemes oder die Summe der darin enthaltenen materiellen Puncte und endlich F die Entfernung seines Schwerpunctes von der festen Axe; so wird die Winkelgeschwindigkeit ausgedrückt durch:

$$\omega = \frac{LV.F}{mr^2 + m'r'^2 + m''r''^2 + etc.}.$$

Diese Formel bezieht sich auf den Fall, wo ein sich mit der Geschwindigkeit V frei bewegender Körper gegen einen andern ruhenden Körper trifft, welcher sich nur um eine feste Axe drehen kann und beide Körper nach dem Stoße eine Masse bilden.

Wir haben bisher vorausgesetzt, daß die Molecule des Systemes, welches sich nur um eine feste Axe drehen kann, fest mit einander verbunden sind. Bei den festen Körpern sind diese Molecule fast mit einander in Berührung und ihr stärkerer oder schwächerer Zusammenhang wird durch die sogenannte Cohäsionskraft bewirkt. Wenn eines der unendlich kleinen Molecule mit dm und seine Entfernung von der Rotationsaxe mit r bezeichnet wird, so drückt r^2dm das Product aus diesem Molecule und dem Quadrate seiner Entfernung von der festen Axe aus und die Summe aus allen analogen Producten oder das Trägheitsmoment des ganzen Körpers wird folglich durch das Integral $\int r^2dm$ ausgedrückt. Die vorhergehende Formel verwandelt sich also in folgende:

$$\omega = \frac{LV.F}{\int r^2dm},$$

welche den Werth der Winkelgeschwindigkeit ausdrückt.

§. 279. Wenn ein fester Körper, welcher sich nur um eine feste Axe drehen kann, durch den momentanen Stoß eines andern Körpers in Bewegung gesetzt wird, so entsteht bei der Mittheilung der Bewe-

gung ein Druck auf die feste Rotationsaxe, welchen man muß berechnen können, und außerdem müssen die Bedingungen angegeben werden, welche zu erfüllen sind, wenn auf diese Axe kein Druck ausgeübt werden soll. Diese beiden Aufgaben sollen uns nun zunächst beschäftigen.

Nach dem im Vorhergehenden Gesagten wird die feste oder verticale Axe OZ im Puncte O von der Ebene geschnitten, worin die rechtwinkligen Axen OX, OY gezogen sind und worin auch die gerade Linie GH liegt, nach welcher sich der stoßende Körper von der Masse L und der Geschwindigkeit V vor dem Stoße bewegt. Wir wollen den Punct G als den Schwerpunct der Masse L betrachten, so ist das aus dem Puncte O auf die gerade Linie GH oder auf ihre Verlängerung gefällte Perpendikel $OQ = F$ der Abstand dieser geraden Linie von der festen Axe. Nach dem Stoße bewegt sich die Gesammtmasse M mit der Winkelgeschwindigkeit ω und wir wollen zunächst ihre zu den Axen der x und der y parallelen Componenten zu bestimmen suchen.

Es sei p die Projection eines Elementes dm der Masse M auf die Ebene der x, y, so ist der Halbmesser Op des von diesem Massenelemente beschriebenen Kreises $= r$. In dem Puncte p wollen wir an diesen Kreis eine Tangente ziehen, welche die Axen der x und der y in den Puncten q und q' schneidet, so ist der Halbmesser $Op = r$ auf dieser Tangente, welche die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreieckes qOq' bildet, senkrecht, und wenn man sie gegen p' verlängert, so gibt dieses Dreieck folgende Ausdrücke für die Cosinus der Winkel, welche die Richtung der Kraft mit den Axen der x und y bildet:

$$cos.p'qX = \frac{y}{r},\ cos.pq'Y = -\frac{x}{r}.$$

Der materielle Punct oder das Massenelement dm bewegt sich mit der Geschwindigkeit $r\omega$, und wenn seine Quantität der Bewegung $r\omega.dm$ durch die Cosinus der Winkel multiplicirt wird, welche ihre Richtung mit den Axen der x und der y bildet, so hat man:

$$\frac{y}{r}\, r\omega dm = \omega y dm, -\frac{x}{r}\, r\omega dm = -\omega x dm.$$

Diese Producte sind die zu den Axen der x und der y parallelen Componenten der Quantität der Bewegung des Massenelementes dm, und folglich werden die Componenten der Quantität der Bewegung der ganzen Masse M durch die Integrale:

$$\int \omega y dm = \omega \int y dm, -\int \omega x dm = -\omega \int x dm$$

ausgedrückt, wo jedes dieser Integrale auf die ganze Masse des Körpers erstreckt werden muß.

Nimmt man die Momente dieser Quantitäten der Bewegung in Beziehung auf die Ebene der x, y, so hat man:

$$\omega \int yz dm, -\omega \int xz dm.$$

Die Quantitäten der Bewegung und die Momente der Gesammtmasse M lassen sich auch anders ausdrücken

Es bezeichne P die Projection des Schwerpunctes dieser Masse auf die Ebene der x, y, ferner seien x_1 und y_1 die Coordinaten des Punctes P und r_1 bezeichne seinen Abstand OP von der festen Axe

oder den Halbmesser des Kreises, welchen er um diese Axe beschreibt; so wird die Quantität der Bewegung der ganzen Masse durch $Mr_1\omega$ und ihre zu den Axen der x und der y parallelen Componenten werden durch:

$$Mr_1\omega.\frac{y_1}{r_1} = My_1\omega\,,\; Mr_1\omega.-\frac{x_1}{r_1} = -Mx_1\omega$$

ausgedrückt, und wenn man endlich ihre Entfernungen von der Ebene der x, y resp. mit z' und z'' bezeichnet, so werden ihre Momente in Beziehung auf diese Ebene ausgedrückt durch:

$$\omega My_1z',\; -\omega Mx_1z''.$$

Diese Ausdrücke der Momente und die schon gefundenen geben die beiden Gleichungen:

$$My_1z' = \int yzdm\,,\; Mx_1z'' = \int xzdm\,,$$

wodurch die Werthe von z' und z'' bestimmt werden.

Alle Kräfte des Systemes sind also nun auf die drei folgenden reducirt, nämlich auf die auf den stoßenden Körper nach der Richtung GH wirkende Kraft LV und auf die beiden Kräfte $-\omega My_1$ und ωMx_1, wovon die eine parallel zu der Axe der x und die andere parallel zu der Axe der y wirkt, indem der Abstand der ersten von der Ebene der x, y durch z' und der Abstand der zweiten von derselben Ebene durch z'' ausgedrückt wird. Diese drei Kräfte lassen sich wenigstens auf zwei zurückführen, welche die feste Axe treffen und die darauf ausgeübten Druckkräfte ausdrücken.

Wenn die Integrale $\int yzdm$, $\int xzdm$, welche die zweiten Theile der vorhergehenden Gleichungen bilden, Null sind, so ist auch $z'=0$ und $z''=0$ und die beiden letzten Kräfte liegen sowohl als die erste in der Ebene der x, y. Dieses muß in dem zweiten Falle, wo die Kräfte einander das Gleichgewicht halten, ohne irgend einen Druck auf die feste Axe auszuüben, stattfinden. Die Resultante aus diesen Kräften muß also $=0$ sein, wozu erforderlich ist, daß die Summen der zu den Axen der x und y parallelen Componenten einzeln $=0$ sind.

Mit α und β wollen wir die Winkel bezeichnen, welche die gerade Linie GH mit den Parallelen zu den Axen der x und der y bildet. Die Kraft LV des stoßenden Körpers läßt sich in zwei andere Kräfte $LV\cos.\alpha$ und $LV\cos.\beta$ zerlegen, welche parallel zu den Axen der x und der y wirken, und die Bedingung, daß die feste Axe keinen Druck erleidet, wird durch die Gleichungen:

$$LV\cos.\alpha = \omega My_1,\; LV\cos.\beta = -\omega Mx_1$$

ausgedrückt, und wenn man die erste durch die zweite dividirt, so findet man:

$$\frac{y_1}{x_1}\,\frac{\cos.\beta}{\cos.\alpha}+1=0.$$

Es ist leicht einzusehen, daß der Factor $\frac{y_1}{x_1}$ die Tangente des Winkels POX ausdrückt, welchen die gerade Linie OP mit der Axe OX bildet. Wird die gerade Linie QH verlängert, so schneidet sie die Axe

der x im Puncte n und man hat $\frac{cos.\beta}{cos.\alpha} = \frac{sin.\alpha}{cos.\alpha} = tang.\ tnX$.
Subſtituirt man dieſe Werthe, ſo verwandelt ſich die letzte Gleichung in:

$$tang.\ POX\ tang.\ tnX + 1 = 0,$$

woraus nach den Lehren der analytiſchen Geometrie folgt, daß die beiden geraden Linien OP und QH auf einander ſenkrecht ſind.

Werden die beiden Gleichungen:

$$LV\ cos.\alpha = \omega My_1,\ LV\ cos.\beta = -\omega Mx_1,$$

zum Quadrate erhoben, dieſe Quadrate zuſammenaddirt, ſo kommt, wenn man bemerkt, daß $cos.^2\alpha + cos.^2\beta = 1$ iſt, und wenn man die Entfernung des Schwerpunctes der Maſſe M von der feſten Axe, nämlich $OP = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = r_1$ ſetzt:

$$L^2V^2 = \omega^2M^2(x_1^2 + y_1^2) = \omega^2M^2r_1^2,$$

und wenn man den Werth von $\omega = \frac{LV.F}{\int r^2dm}$ ſubſtituirt, ſo erhält man:

$$F = \frac{\int r^2dm}{Mr_1}.$$

Dieſer Werth von F oder der Quotient aus dem Trägheitsmomente und der mit der Entfernung ihres Schwerpunctes von der feſten Axe multiplicirten Maſſe drückt die Entfernung der feſten Axe von dem Puncte aus, worin der ſtoßende Körper in normaler Richtung auf der durch dieſe Axe und durch den Schwerpunct der Maſſe M gelegten Ebene ſeine Wirkung ausüben muß, damit der Druck auf die feſte Axe Null wird. Dieſer Punct iſt deswegen merkwürdig, weil der ſich um eine feſte Axe drehende Körper in demſelben den größten Stoß hervorbringt, und er wird daher auch der **Mittelpunct des Stoßes** genannt.

Veränderliche Bewegung eines feſten Körpers, welcher ſich nur um eine feſte Axe drehen kann.

§. 280. Wir haben vorhin in Beziehung auf die Rotationsbewegung eines feſten Körpers um eine feſte Axe nur den Fall betrachtet, wo dieſe Bewegung, welche durch einen Stoß oder durch einzelne Impulſe hervorgebracht wird, gleichförmig iſt, und wir wollen uns nun mit dem Falle beſchäftigen, wo ſtetige beſchleunigende Kräfte auf den Körper wirken und ihm eine veränderliche Bewegung ertheilen.

Wir wollen die drei rechtwinkligen Axen OX, OY, OZ (Fig. 153) ziehen und die horizontale Axe OZ zur feſten Rotationsaxe nehmen. Es ſei dm ein Element des Körpers, welcher ſich um die feſte Axe OZ drehen muß, und wir wollen mit Θ den Winkel bezeichnen, welchen die materiellen Puncte dieſes Körpers am Ende der Zeit t um die Rotationsaxe beſchrieben haben und r ſei die Entfernung derſelben von dieſer Axe, ſo iſt $\frac{d\Theta}{dt}$ die Winkelgeſchwindigkeit dieſes Kör-

pers und $\frac{r d\Theta}{dt}$ die wirkliche Geschwindigkeit desselben. Wenn φ die beschleunigende Kraft bezeichnet, welche auf jedes Element des Körpers wirkt und δ den Winkel, welchen die Richtung dieser Kraft mit der Tangente an dem Kreise bildet, welchen das Massenelement dm um die feste Axe beschreibt; so ist die lebendige Kraft eines Elementes des Körpers $= dm.\, r^2 \frac{d\Theta^2}{dt^2}$.

Während jedes Zeitelementes beschreibt das Massenelement des Körpers den Raum $rd\Theta$, oder nach der Richtung der beschleunigenden Kraft φ, den Raum $rd\Theta \cos.\delta$, und wenn die beschleunigende Kraft $dm\varphi$ durch diesen Raum multiplicirt wird; so drückt das Product $dm\varphi rd\Theta \cos.\delta$ die Quantität der Wirkung aus, welche diese Kraft in jedem Zeitelemente ausübt, und nach dem Principe der lebendigen Kräfte (§. 242) muß die lebendige Kraft der doppelten Quantität der Wirkung gleich sein. Nimmt man also von diesen Größen die Integrale, so erhält man:

$$\int dm.\, r^2 \frac{d\Theta^2}{dt^2} = 2\int dm\varphi rd\Theta \cos.\delta + C,$$

oder wenn man die Winkelgeschwindigkeit, welche für alle Theilchen des Körpers dieselbe ist, vor das Integralzeichen setzt:

$$\frac{d\Theta^2}{dt^2} = \frac{2\int \varphi d\Theta \cos.\delta r dm}{\int r^2 dm} + C.$$

Von dieser Formel bietet sich bei der Rotations- oder Oscillationsbewegung eines an einer festen horizontalen Axe OZ aufgehangenen schweren Körpers eine Anwendung dar.

§. 281. Es sei P die Projection des Massenelementes dm auf die Ebene der x, y und wir wollen PQ, PH resp. zu den Axen OX, OY parallel und dann die Linie OP ziehen. Die beschleunigende Kraft φ ist der auf alle Theilchen der Masse M des Körpers nach der Richtung der Verticale PH wirkenden beschleunigenden Kraft g der Schwere gleich. Ferner haben wir den Winkel $HPF = OPQ$ mit δ bezeichnet, und wenn wir $OP = r$ setzen, so ist $\cos.\delta = \frac{x}{r}$. Werden diese Werthe für φ und $\cos.\delta$ substituirt und bemerkt man, daß, da x_1 die Entfernung des Schwerpunctes des Körpers von der Ebene der y, z ist, $\int x dm = Mx_1$ ist; so verwandelt sich die vorhergehende Gleichung in:

$$\frac{d\Theta^2}{dt^2} = \frac{2gM\int x_1 d\Theta}{\int r^2 dm} + C.$$

Wird die Entfernung des Schwerpunctes des Körpers von der festen Axe mit a bezeichnet, so hat man:

$$x_1 = a \sin.\Theta,\ \int x_1 d\Theta = \int a \sin.\Theta d\Theta = -a \cos.\Theta.$$

Substituirt man diesen Werth von $\int x_1 d\Theta$ in die vorhergehende Formel und bemerkt, daß das Integral mit entgegengesetztem Zeichen

genommen werden kann, weil der Winkel Θ abnimmt, wenn die Zeit t zunimmt, so hat man:

$$\frac{d\Theta^2}{dt^2} = \frac{2agM\cos.\Theta}{\int r^2 dm} + C.$$

Wir wollen den Werth der Constante C in der Voraussetzung bestimmen, daß die Geschwindigkeit im Anfange der Bewegung, wenn der Winkel $\Theta = \alpha$ ist, Null ist; so haben wir:

$$0 = \frac{2agM\cos.\alpha}{\int r^2 dm} + C,\ C = -\frac{2agM\cos.\alpha}{\int r^2 dm},$$

und wenn wir diesen Werth für C substituiren, so kommt:

$$\frac{d\Theta^2}{dt^2} = \frac{2agM}{\int r^2 dm}(\cos.\Theta - \cos.\alpha).$$

Wenn die Lage des Schwerpunctes des Körpers gegeben ist, so gibt diese Gleichung die Winkelgeschwindigkeit und wir werden in dem folgenden Kapitel Anwendung davon machen.

Bewegung eines Körpers auf den Seiten eines Vieleckes und auf einer stetigen Curve.

§. 282. Wenn ein Körper, welchen wir als einen schweren materiellen Punct betrachten können, auf der concaven Seite eines in einer Verticalebene liegenden Vieleckes herabsinkt, indem er successive die Seiten desselben durchläuft, so findet bei jedem Uebergange von einer Seite zu der andern ein Geschwindigkeitsverlust statt.

Es seien CD, DE, EF, *etc.* (Fig. 154) die Seiten des Vieleckes und wir wollen annehmen, daß der materielle Punct während des Durchlaufens der Seite CD eine Geschwindigkeit erlangt habe, vermöge welcher er auf der Verlängerung von CD in der Zeiteinheit die Länge De durchlaufen würde. Die Geschwindigkeit De wollen wir in zwei andere zerlegen, die eine nach der an CD liegenden Seite DE und die andere Dd nach einer auf DE senkrechten Richtung, so wird diese letzte Componente durch den Widerstand des Vieleckes aufgehoben und die Geschwindigkeit des beweglichen Punctes wird durch die Länge DE, welche die andere Componente darstellt, gemessen.

Aus dem Puncte D als Mittelpunct wollen wir mit dem Halbmesser De einen Kreisbogen beschreiben, welcher die Verlängerung von DE in I schneidet; so wird der Geschwindigkeitsverlust durch die Länge EI ausgedrückt und diese verlorne Geschwindigkeit ist der Unterschied zwischen der nach der verlängerten Seite CD gerichteten Geschwindigkeit des Körpers im Puncte D und der nach der folgenden Seite DE gerichteten Geschwindigkeit. Wir wollen die gleichförmige Geschwindigkeit De des materiellen Punctes mit v und den äußern Winkel eDI mit α bezeichnen; so gibt das rechtwinklige Dreieck DEe für die Componenten folgende Werthe:

$$Ee = Dd = v\sin.\alpha,\ DE = v\cos.\alpha.$$

Die erste Componente ist Null, weil sie nach einer auf der Richtung der Bewegung des materiellen Punctes senkrechten Richtung

wirkt, und wenn man die zweite Componente von der Geschwindigkeit v abzieht, so wird die verlorne Geschwindigkeit durch die Differenz:

$$v - v\ cos.\ \alpha = v\ (1 - cos.\ \alpha)$$

ausgedrückt.

Wenn der materielle Punct auf eine dritte Seite übergeht, für welche der äußere Winkel $= \alpha'$ ist, so drückt das Product aus der Geschwindigkeit v' des materiellen Punctes im Puncte E und aus dem Factor $1 - cos.\ \alpha'$ den Geschwindigkeitsverlust auf der dritten Seite des Vieleckes aus, u. s. f.

Der Geschwindigkeitsverlust, welchen der materielle Punct erfährt, indem er sich successive über die Seiten des Vieleckes bewegt, ist desto kleiner, je kleiner die äußern Winkel α, α', *etc.* sind, und wenn alle diese Winkel Null wären, so bildete das Vieleck eine gerade Linie, welche der Durchschnitt einer schiefen Ebene wäre, und die Geschwindigkeit des materiellen Punctes würde, nachdem er längs dieser Ebene herabgefallen wäre, der Geschwindigkeit gleich sein, welche er bei dem freien Falle durch die Höhe der schiefen Ebene erlangt haben würde.

Wenn das Vieleck eine sehr große Anzahl unendlich kleiner Seiten hat, so geht dasselbe in eine stetige Curve über, die Winkel α, α', *etc.* zwischen zwei auf einander folgenden Tangenten, welche Contingenzwinkel genannt werden, sind unendlich klein und der Geschwindigkeitsverlust kann als Null betrachtet werden, woraus man schon nach der Analogie schließen könnte, daß ein Körper, welcher sich längs einer in einer Verticalebene beschriebenen Curve abwärts bewegt, eine Geschwindigkeit erlangt, die der gleich ist, welche er bei dem freien Falle durch dieselbe Höhe, als auf der Curve erlangt haben würde. Allein man kann diesen Satz auch auf folgende Weise darthun.

§. 283. Es sei *HMRS* (Fig. 155) die krumme Linie, welche der materielle Punct beschreiben muß, so kann dieselbe als die Axe eines krummlinigen Kanales betrachtet werden, und man kann annehmen, daß der bewegliche Körper eine Kugel von einem etwas kleinern Durchmesser, als der des Kanales ist, worin sich dieselbe vermöge der Wirkung der Schwere, ohne den von der Reibung und der Luft herrührenden Widerstand zu erfahren, bewegen kann. Wenn der Körper vom Puncte H ausgegangen ist, und auf der Curve die Länge HM durchlaufen hat, so kommt es darauf an, das Gesetz seiner Bewegung zu finden.

Wenn die beschleunigende Kraft der Schwere im Puncte M durch das Stück $ML = g$ der Verticale MP dargestellt wird, so kann diese Kraft in zwei andere zerlegt werden, wovon die eine $MN = KL = g\ sin.\ LMK$ nach der Normale wirkt und durch den Widerstand der Curve aufgehoben wird, während die andere $MK = \varphi = g\ cos.\ LMK$ nach der Tangente gerichtet ist und die veränderliche Bewegung des Körpers hervorbringt.

Das rechtwinklige Dreieck MKL gibt $cos.\ LMK = \frac{MK}{ML}$. Wenn man die Horizontale bm zieht, welche die Verticale MP in p und die Curve in m schneidet, so drücken der Theil MP der Verticale und der kleine Bogen Mm resp. die unendlich kleinen Zunahmen oder die Dif-

ferentiale dy, ds der Ordinate $MP = y$ und des Bogens $HM = s$ aus.

Da die rechtwinkligen Dreiecke MKL, Mpm einander ähnlich sind, so hat man:

$$ML : MK = Mm : Mp = ds : dy,$$

$$\frac{MK}{ML} = \frac{dy}{ds},$$

und wenn man dieses Verhältniß statt des Cosinus substituirt, so verwandelt sich der Ausdruck der nach der Richtung der Tangente wirkenden Componente in:

$$\varphi = g\frac{dy}{ds}.$$

Wenn man in der allgemeinen Gleichung der veränderlichen Bewegung $\varphi = \frac{dv}{dt}$ (§. 209) für φ die Größe $g\frac{dy}{ds}$ setzt und bemerkt, daß der Cosinus mit dem Zeichen — genommen werden muß, weil die Ordinate y abnimmt, wenn der Bogen s zunimmt; so hat man:

$$\frac{dv}{dt} = -g\frac{dy}{ds}, \quad \frac{ds}{dt}dv = -gdy,$$

und wenn man v für $\frac{ds}{dt}$ setzt; so verwandelt sich diese Gleichung in:

$$vdv = -gdy,$$

und wenn man endlich integrirt, so hat man:

$$\tfrac{1}{2}v^2 = -gy + C.$$

Zur Bestimmung der Constante C ist zu bemerken, daß der Körper von dem Puncte H ohne alle anfängliche Geschwindigkeit ausgeht, also in diesem Puncte $v = 0$ und die Ordinate $PM = y = AF = h$ ist. Subsiituirt man diese Werthe, so reducirt sich diese vorhergehende Gleichung auf:

$$0 = -gh + C, \quad C = gh,$$

und wenn man diesen Werth für C substituirt, so erhält man:

$$v^2 = 2g(h-y) = 2g \times BF, \quad v = \sqrt{2g.\,BF}.$$

Diese Geschwindigkeit ist der gleich, welche der Körper oder materielle Punct bei dem freien Falle durch die verticale Höhe BF erlangt haben würde und diese Höhe ist der des Bogens HM gleich, worauf sich der Körper oder materielle Punct herabbewegt hat. Wenn sich also ein Körper oder materieller Punct vermöge der Wirkung der Schwere auf einem Curvenbogen abwärts bewegt, so ist die erlangte Geschwindigkeit desselben immer der gleich, welche er bei dem freien Falle durch die verticale Höhe dieses Bogens erlangt haben würde.

Wenn man an den tiefsten Punct R der Curve eine horizontale Tangente zieht, welche die Ordinatenaxe AY im Puncte Q trifft, so hat der Körper während seines Falles durch den Curvenzweig HMR eine Geschwindigkeit erlangt, welche durch:

$$\sqrt{2g.FQ}$$

ausgedrückt wird, und vermöge welcher der Körper oder materielle Punct auf dem andern Zweige *RS* der Curve, welcher dem ersten nicht ähnlich zu sein braucht, bis zu dem Puncte *S* aufsteigen wird, welcher in derselben Höhe, als der Ausgangspunct *H* liegt. Alsdann ist seine erlangte Geschwindigkeit durch die entgegengesetzte Wirkung der Schwere auf Null reducirt, und da die Schwere fortfährt, auf den Körper zu wirken, so nimmt er eine rückläufige Bewegung an, indem er sich auf dem Curvenzweige *SR* niederwärts bewegt und auf dem Zweige *MRH* wieder aufsteigt. Diese Oscillationsbewegung würde ununterbrochen fortdauern, wenn sie nicht allmählig durch die Reibung und durch den Widerstand der Luft verzögert würde, bis sie endlich ganz aufhört.

Zwölftes Kapitel.

Allgemeine Formeln für die schwingende Bewegung der Pendel.

Die Theorie der Bewegung der Pendel ist einer der wichtigsten Zweige der Theorie der veränderlichen krummlinigen Bewegungen. Galiläi hat zuerst einige Begriffe von den Eigenschaften des Pendels gehabt; allein Huyghens verdankt man die schönen und nützlichen Entdeckungen der Anwendung des Pendels auf die Uhren und den Lehrsatz, welcher die zwischen der Länge des Pendels und der Intensität der Schwere stattfindende Relation ausdrückt, so daß, wenn die erste dieser Größen bekannt ist, die zweite sich daraus ableiten läßt, wie wir später sehen werden.

§. 284. Ein Pendel besteht aus einem schweren Körper, welcher an dem einen Ende einer Stange befestigt ist, an deren anderem Ende sich scharfkantige Prismen oder sehr biegsame Federn befinden, um das Pendel an einer horizontalen Axe, um welche es frei schwingen kann, aufzuhängen.

Obgleich dieser Apparat sehr einfach ist, so betrachtet man doch, um seine Eigenschaften zu bestimmen, zunächst das einfache oder ideelle Pendel, welches aus einem materiellen Puncte besteht, der vermittelst eines unausdehnbaren und so dünnen Fadens, daß man von seiner Masse und von seinem Gewichte abstrahiren kann, an einer horizontalen Axe aufgehangen ist und es wird zugleich von der Reibung und dem Widerstande der Luft abstrahirt.

Es sei *CA* (Fig. 156) ein einfaches Pendel, welches im Puncte *C* einer sogenannten horizontalen Rotationsaxe in einer auf diese Axe senkrechten Richtung aufgehangen ist. Wird dieses Pendel aus der Verticale *CB* entfernt und dann der Wirkung der Schwere überlassen, so beschreibt der materielle Punct einen Kreisbogen *ABD*, welcher in der auf der Rotationsaxe senkrechten Verticalebene liegt, und die aus

dem Mittelpuncte C gefällte Verticale fällt mit dem nach dem tiefsten Puncte B dieses Bogens gezogenen Halbmesser CB zusammen.

Wir wollen annehmen, daß das Pendel im Anfange der Bewegung die Lage CA habe und nach Verlauf der Zeit t in die Lage CM gekommen sei. Auf die Verticale CB wollen wir die Perpendikel AN, MP fällen und $CP = z$, $CN = c$ setzen. Bezeichnet man die Intensität der Schwere mit g, die Geschwindigkeit des materiellen Punctes im Puncte M mit v, und bemerkt man, daß diese Geschwindigkeit seiner verticalen Fallhöhe entspricht, so hat man:

$$v = \sqrt{2g(z-c)},$$

und wenn man den Bogen $AM = s$ setzt, so wird die Geschwindigkeit durch den Quotienten aus dem Elemente des Bogens und dem Elemente der Zeit ausgedrückt. Man hat also:

$$\sqrt{2g(z-c)} = \frac{ds}{dt},\ dt = \frac{ds}{\sqrt{2g(z-c)}}.$$

Setzt man die Länge des Pendels $CA = a$, den Winkel $MCB = \Theta$ und den anfänglichen Werth dieses Winkels oder den Winkel $ACB = \alpha$; so hat man:

$$s = a(\alpha - \Theta),\ ds = -ad\Theta.$$

Ferner geben die rechtwinkligen Dreiecke CPM, CNA:

$$z = a\ cos.\ \Theta,\ c = a\ cos.\ a,$$

und wenn man diese Werthe in den von dt subſtituirt, so erhält man:

$$dt = \frac{-ad\Theta}{\sqrt{2ga(cos.\ \Theta - cos.\ \alpha)}} = \sqrt{\frac{a}{g}} \cdot \frac{-d\Theta}{\sqrt{2\ cos.\ \Theta - 2\ cos.\ \alpha}}.$$

Ferner hat man bekanntlich:

$$cos.\ \Theta = 1 - \frac{\Theta^2}{2} + \frac{\Theta^4}{2.3.4} - etc.,$$

$$cos.\ \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{2.3.4} - etc.,$$

und wenn diese Werthe in die vorhergehende Formel subſtituirt werden, indem man wegen der Kleinheit der Winkel die vierten Potenzen unberücksichtigt läßt, so kommt:

$$dt = \sqrt{\frac{a}{g}} \cdot \frac{-d\Theta}{\sqrt{\alpha^2 - \Theta^2}},\ t = \sqrt{\frac{a}{g}} \int \frac{-d\Theta}{\sqrt{\alpha^2 - \Theta^2}},$$

wo das Integral:

$$\int \frac{-d\Theta}{\sqrt{\alpha^2 - \Theta^2}} = \int \frac{-\frac{d\Theta}{\alpha}}{\sqrt{1 - \frac{\Theta^2}{\alpha^2}}} = arc.\left(cos. = \frac{\Theta}{\alpha}\right)$$

ist, und folglich hat man:

$$t = \sqrt{\frac{a}{g}}\ arc.\left(cos. = \frac{\Theta}{\alpha}\right).$$

Eine Constante braucht nicht hinzugefügt zu werden, weil im Anfange der Bewegung $t = o$ und $\Theta = \alpha$ ist.

§. 285. Je mehr die Zeit t zunimmt, desto kleiner wird der Winkel Θ, und wenn das Pendel mit der Verticale CB zusammenfällt, so ist:

$$arc.\left(cos. = \frac{\Theta}{\alpha}\right) = arc.(cos. = o) = {}^1/_2\pi,$$

und folglich wird die Zeit t, welche das Pendel gebraucht, um den tiefsten Punct des Bogens, welchen es beschreibt, zu erreichen, durch:

$$t = {}^1/_2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$$

ausgedrückt.

Mit der Geschwindigkeit, welche das Pendel während seines Niedersteigens unter der Wirkung der Schwere erlangt hat, fängt es auf der andern Seite der Verticale an aufzusteigen, und wenn der Winkel Θ auf der linken Seite der Verticale als positiv betrachtet wird, so muß er auf der rechten Seite als negativ betrachtet werden. Auf dieser Seite wirkt die Schwere auf das Pendel nach einem seiner Bewegung entgegengesetzten Sinne, welche aufgehoben ist, wenn der materielle Punct in den Punct D gelangt ist, welcher in derselben Höhe, als der Punct A liegt, von welchem das Pendel ausgegangen ist, worauf sich die Richtung der Bewegung in die entgegengesetzte verwandelt und das Pendel von D gegen B herabsinkt, um alsdann wieder bis zu dem Puncte A aufzusteigen. U. s. f.

Man sieht, daß die Excursion des Pendels, welche man eine Oscillation oder Schwingung nennt, aus zwei halben Oscillationen besteht, wovon die eine eine niedersteigende und die andere eine aufsteigende ist. Diese beiden halben Oscillationen sind einander gleich, weil die Geschwindigkeit, welche das Pendel vermöge der Wirkung der Schwere während der niedersteigenden halben Oscillation erlangt, genau durch die Wirkung der Schwere während seiner aufsteigenden halben Oscillation aufgehoben wird. Diese Gleichheit der Oscillationen des Pendels nennt man Isochronismus, und man sagt, daß die Schwingungen des Pendels isochronisch sind, wenn dasselbe unendlich kleine Bogen beschreibt.

Um von einer verticalen dem Durchmesser $2a$ gleichen Höhe herabzufallen, oder die Sehne $\overline{AB}$ zu durchlaufen, gebraucht ein schwerer Körper eine Zeit $t = 2\sqrt{\frac{a}{g}}$ (§. 198) und zum Durchlaufen des zu der Sehne $\overline{AB}$ gehörigen Bogens AMB gebraucht er eine Zeit $t = {}^1/_2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$. Wenn also zwei der Wirkung der Schwere überlassene Körper ohne alle anfängliche Geschwindigkeit von dem Puncte A ausgehen, um zu dem Puncte B zu gelangen, indem sich der eine auf

dem Bogen AMB und der andere auf der Sehne AB bewegt; so gelangt der erste früher in den Punct B, als der zweite. Der Kreisbogen AMB wird also schneller von dem Körper durchlaufen, als die gerade Linie AB, obgleich sie die kürzeste Entfernung zwischen den beiden Puncten A und B ist; aber dennoch ist der Kreisbogen selbst nicht die Curve des schnellsten Falles.

Da die Dauer der niedersteigenden halben Oscillation der Dauer der aufsteigenden halben Oscillation des Pendels gleich ist, so hat man, wenn T die Dauer einer ganzen Oscillation bezeichnet:

$$T = \pi \sqrt{\frac{a}{g}}.$$

Diese Formel ist von der Amplitüde des Bogens unabhängig, und folglich sind die Schwingungen des Pendels auch für verschiedene Bogen, wofern diese Bogen nur sehr klein sind, isochronisch.

§. 286. Wir haben bisher die von dem Pendel beschriebenen Bogen als unendlich klein betrachtet, was aber eine bloße Abstraction ist, und obgleich man sich derselben soviel als möglich zu nähern sucht, so müssen die Bogen doch immer eine endliche Größe behalten, um die Schwingungen zählen zu können. Es ist daher eine Correction erforderlich, um diese Bogen auf unendlich kleine zurückzuführen, und wir wollen nun die Auflösung der Aufgabe nochmals wiederholen, um eine Reihe abzuleiten, deren erste Glieder den Näherungswerth dieser Correction geben.

Den tiefsten Punct B des von dem Pendel beschriebenen Bogens wollen wir zum Anfangspuncte, die verticale Axe BX zur Abscissenaxe und die horizontale Axe BY zur Ordinatenaxe nehmen. Durch die einander unendlich naheliegenden Puncte M und k wollen wir die Verticale Mh und die Horizontale kh ziehen und die frühern Bezeichnungen beibehalten.

Wenn sich das Pendel von seiner anfänglichen Lage A bis zu dem Puncte M herabbewegt hat, so ist seine erlangte Geschwindigkeit der der Fallhöhe $NP = BN - BP = b - x$ entsprechenden Geschwindigkeit gleich, was durch die Gleichung:

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{2g(b-x)}$$

ausgedrückt wird, woraus folgt, wenn man bemerkt, daß ds und dt entgegengesetzte Zeichen haben müssen:

$$dt = \frac{-ds}{\sqrt{2g(b-x)}}.$$

Die beiden rechtwinkligen Dreiecke CPM, Mhk, deren Seiten resp. auf einander senkrecht sind, sind also einander ähnlich und geben:

$$ds = \frac{adx}{y}$$

und nach der Eigenschaft des Kreises hat man:

$$y^2 = 2ax - x^2 = 2ax\left(1 - \frac{x}{2a}\right).$$

Der Werth von ds verwandelt sich also in:

$$ds = \frac{\sqrt{a}\,dx}{\sqrt{2x\left(1 - \frac{x}{2a}\right)}},$$

und wenn man diesen Werth von ds in den von dt substituirt; so erhält man die Differentialgleichung:

$$dt = {}^1/_2\sqrt{\frac{a}{g}} \cdot \frac{-dx}{\sqrt{bx - x^2}}\left(1 - \frac{x}{2a}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

deren zweiter Theil nur mit Hilfe von Reihenentwickelungen integrirt werden kann.

Entwickelt man das Glied $\left(1 - \frac{x}{2a}\right)^{-\frac{1}{2}}$ nach der Binominalformel, so hat man:

$$\left(1 - \frac{x}{2a}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\,\frac{x}{2a} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\,\frac{x^2}{4a^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\,\frac{x^3}{8a^3} + etc.$$

Die Substitution dieser Reihenentwickelung gibt:

$$dt =$$

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\left[\frac{-dx}{\sqrt{bx - x^2}} + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{2a}\,\frac{-x\,dx}{\sqrt{bx - x^2}} + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\frac{1}{4a^2}\,\frac{-x^2 dx}{\sqrt{bx - x^2}} + etc.\right]$$

und um den Werth von t oder die Dauer einer halben Schwingung zu erhalten, muß man jedes Glied dieser Reihe integriren.

Wenn man den Ausdruck $x^{n-1}\sqrt{bx - x^2}$ differentiirt, so findet man:

$$d.\ x^{n-1}(bx - x^2)^{\frac{1}{2}} = (n-1)\,x^{n-2}\,dx\,(bx - x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{2}x^{n-1}(b\,dx - 2x\,dx)}{(bx - x^2)^{\frac{1}{2}}},$$

und wenn man auf denselben Nenner reducirt und die gleichartigen Glieder zusammennimmt, so verwandelt sich dieses Differential in:

$$d.\ x^{n-1}(bx - x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{(2n-1)^{\frac{1}{2}}\,bx^{n-1}\,dx}{\sqrt{bx - x^2}} - \frac{nx^n\,dx}{\sqrt{bx - x^2}}.$$

Transponirt man, dividirt alle Glieder durch n und integrirt, so erhält man:

$$\int \frac{x^n\,dx}{\sqrt{bx - x^2}} = -\frac{x^{n-1}\sqrt{bx - x^2}}{n} + \frac{(2n-1)\,b}{2n}\int \frac{x^{n-1}\,dx}{\sqrt{bx - x^2}}.$$

In der obigen Reihe müssen die Integrale zwischen den Grenzen $x = o$ und $x = b$ genommen werden, und alsdann reducirt sich die letzte Gleichung auf:

$$\int \frac{x^n\,dx}{\sqrt{bx-x^2}} = \frac{(2n-1)\,b}{2n} \int \frac{x^{n-1}\,dx}{\sqrt{bx-x^2}}.$$

Aus dieser Gleichung folgt, wenn man dx mit dem negativen Zeichen nimmt und succeſſive $n=1$, $n=2$, *etc.* ſetzt:

$$\int \frac{-x\,dx}{\sqrt{bx-x^2}} = \tfrac{1}{2}b \int \frac{-dx}{\sqrt{bx-x^2}},$$

$$\int \frac{-x^2\,dx}{\sqrt{bx-x^2}} = \tfrac{3}{4}b \int \frac{-x\,dx}{\sqrt{bx-x^2}} = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}b^2 \int \frac{-dx}{\sqrt{bx-x^2}}.$$

etc. *etc.*

Subſtituirt man dieſe Werthe in den von dt, ſo kommt:

$$dt = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\left[1+(\tfrac{1}{2})^2\frac{b}{2a}+(\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4})^2\left(\frac{b}{2a}\right)^2+etc.\right]\frac{-dx}{\sqrt{bx-x^2}},$$

und wenn man zu der Größe unter dem Wurzelzeichen des Differentialausdruckes $\frac{1}{4}b^2-\frac{1}{4}b^2$ addirt, ſo hat man:

$$\int \frac{-dx}{\sqrt{\frac{1}{4}b^2-(x-\frac{1}{2}b^2)}} = \int \frac{-\frac{dx}{\frac{1}{2}b}}{\sqrt{1-\left(\frac{x-\frac{1}{2}b}{\frac{1}{2}b}\right)^2}} = arc.\left(cos.=\frac{2x-b}{b}\right).$$

Wenn ſich das Pendel in der Richtung der Verticale befindet, ſo hat man:

$$x=0,\ arc.\left(cos.=\frac{2x-b}{b}\right) = arc.\,(cos.=-1) = \pi = 3{,}14159,$$

und die Dauer einer halben Schwingung wird ausgedrückt durch die Reihe:

$$t = {}^1/_2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}\left[1+(\tfrac{1}{2})^2\frac{b}{2a}+(\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4})^2\left(\frac{b}{2a}\right)^2+etc.\right].$$

Wenn man nur das erſte Glied dieſer Reihe nimmt, ſo erhält man den bereits früher gefundenen Ausdruck für die Dauer t einer halben Pendelſchwingung wieder.

Wenn man $T'=2t$ ſetzt und bloß die beiden erſten Glieder der vorhergehenden Reihe nimmt, ſo erhält man für die Dauer der ganzen Pendelſchwingung:

$$T' = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}\left(1+\tfrac{1}{8}\frac{b}{a}\right)$$

Das rechtwinklige Dreieck CNA gibt:

$$a-b = a\ cos.\,\alpha,\ \frac{b}{a} = 1-cos.\,\alpha = 2\,sin.^2\,{}^1/_2\alpha.$$

Wegen der Kleinheit der Bogen iſt der Sinus des einen dieſer Bogen wenig von der Hälfte des Sinus des doppelten Bogens verſchieden; man hat alſo ſehr nahe:

$$sin.\,{}^1/_2\,\alpha = {}^1/_2\,sin.\,\alpha,\ \frac{b}{a} = {}^1/_2\,sin.^2\,\alpha,$$

und wenn man diesen Werth von $\frac{b}{a}$ in den von T' subſtituirt, ſo hat man:

$$T' = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}(1 + {}^1/_{16}\,sin.^2\,\alpha),$$

woraus erhellet, daß die Schwingungsdauer wie das Quadrat des Sinus des Winkels oder Bogens α, welcher die Hälfte des von dem Pendel beſchriebenen Winkels oder Bogens iſt, zunimmt.

Die Dauer einer unendlich kleinen Schwingung wird durch die Formel $T = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}$ ausgedrückt, und wenn man dieſe Dauer mit der einer ſehr kleinen Schwingung vergleicht, ſo hat man:

$$T' = T(1 + {}^1/_{16}\,sin.^2\,\alpha).$$

Es ſei n die Anzahl der Schwingungen, welche ein Pendel während der Zeit t in dem Bogen 2α macht, ſo iſt die Dauer einer dieſer Schwingungen $= \frac{t}{n} = T'$, und N ſei die Anzahl der unendlich kleinen Schwingungen, welche dieſes Pendel in derſelben Zeit macht, ſo iſt $\frac{t}{N} = T$ die Dauer einer Schwingung. Werden dieſe Werthe für T' und T in die letzte Gleichung ſubſtituirt, ſo verwandelt ſie ſich in:

$$N = n\,(1 + {}^1/_{16}\,sin.^2\,\alpha),$$

und wenn man die Zahl n beſtimmt hat, ſo gibt dieſe Formel die zugehörige Anzahl N der unendlich kleinen Schwingungen.

Die Größe der Schwingungsbogen nimmt während der Beobachtung wegen des Widerſtandes der Luft fortwährend ab, und das einfachſte Mittel zur Correction des daraus entſpringenden Fehlers beſteht darin, daß man das Mittel $\frac{\alpha + \alpha_n}{2}$ oder die halbe Summe des erſten und letzten beobachteten Schwingungsbogens nimmt, wodurch man erhält:

$$N = n\left(1 + {}^1/_{16}\,sin.^2\,\frac{\alpha + \alpha_n}{2}\right),$$

und dieſe Formel dient zur Verwandlung der beobachteten Schwingungen in unendlich kleine Schwingungen, wenn die Beobachtung während einer ſehr kurzen Zeit angeſtellt iſt.

§. 287. Wenn man eine genauere Correction der Amplitude oder Schwingungsweite haben will, als die, welche die letzte Formel gibt, ſo kann man ſich der, aus der folgenden Analyſe ſich ergebenden bedienen.

Wir haben eben gefunden, daß einer Schwingung des Pendels in dem kleinen Bogen 2α, $1 + {}^1/_{16}\,sin.^2\,\alpha$ unendlich kleine Schwingungen entſprechen, indem bei jeder der folgenden Schwingungen der

Bogen α abnimmt. Wir wollen die Reihe dieser Bogen mit α_1, α_2, ..., α_n bezeichnen, so haben wir die Reihe der entsprechenden unendlich kleinen Schwingungen:

$$1 + {}^1/_{16}\, sin.^2\, \alpha_1,\ 1 + {}^1/_{16}\, sin.^2\, \alpha_2,\ \ldots..,\ 1 + {}^1/_{16}\, sin.^2\, \alpha_n$$

und nach n Schwingungen des Pendels wird die entsprechende Anzahl der unendlich kleinen Schwingungen ausgedrückt durch:

$$n + {}^1/_{16}\,(sin.^2\, \alpha_1 + sin.^2\, \alpha_2 \ldots + sin.^2\, \alpha_n).$$

Um die Reihe von Sinussen zu transformiren und ihre Summe in einem endlichen Ausdrucke zu erhalten, wollen wir uns auf folgenden Lehrsatz stützen, dessen Wahrheit durch die Erfahrung erkannt ist. Wenn ein Pendel ungefähr um 2 Grad von der Verticale entfernt und dann der Wirkung der Schwere überlassen wird, so wächst die Anzahl seiner Schwingungen nach einer arithmetischen Progression und die zugehörigen Schwingungsbogen α_1, α_2, α_3, *etc.* bilden eine abnehmende geometrische Progression, und wenn diese Bogen sehr klein sind, so kann man dasselbe auch von ihren Sinussen sagen.

Es sei q ein constanter Coefficient, so hat man nach dem eben ausgesprochenen Gesetze:

$$sin.\, \alpha_1 = \frac{sin.\, \alpha}{q},\ sin.\, \alpha_2 = \frac{sin.\, \alpha}{q^2},\ \ldots,\ sin.\, \alpha_n = \frac{sin.\, \alpha}{q^n},$$

$$n + \frac{sin.^2\, \alpha}{16}\left(\frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} \ldots. + \frac{1}{q^n}\right),$$

und wenn man die zwischen den Parenthesen stehende geometrische Progression summirt, so verwandelt sich dieser Ausdruck in:

$$n + \frac{sin.^2\, \alpha}{16} \cdot \frac{q^n - 1}{(q-1)\, q^n}.$$

Eliminirt man q vermittelst der Gleichung $sin.\, \alpha_n = \frac{sin.\, \alpha}{q^n}$, woraus folgt:

$$q^n = \frac{sin.\, \alpha}{sin.\, \alpha_n},\ q = \sqrt[n]{\frac{sin.\, \alpha}{sin.\, \alpha_n}},$$

indem man diese Werthe von q und q^n substituirt, so findet man:

$$n + \frac{sin.\, \alpha}{16} \cdot \frac{sin.\, \alpha - sin.\, \alpha_n}{\left(\frac{sin.\, \alpha}{sin.\, \alpha_n}\right)^{\frac{1}{n}} - 1}. \quad (a)$$

Die $n$te Wurzel aus $\frac{sin.\, \alpha}{sin.\, \alpha_n}$ läßt sich näherungsweise ausziehen, und wenn man sich der gewöhnlichen Logarithmen bedient, so hat man zunächst:

$$\left(\frac{sin.\, \alpha}{sin.\, \alpha_n}\right)^{\frac{1}{n}} = 10^{\frac{Log.\, \frac{sin.\, \alpha}{sin.\, \alpha_n}}{n}}.$$

Entwickelt man die Exponentialgröße im zweiten Theile dieser Gleichung vermittelst der Reihe:

$$a^x = 1 + log.\, a.\, x + {}^1/_2 log.^2 a.\, x^2 + etc.,$$

so erhält man:

$$\left(\frac{sin.\,\alpha}{sin.\,\alpha_n}\right)^{\frac{1}{n}} = 1 + log.10\,\frac{Log.\frac{sin.\,\alpha}{sin.\,\alpha_n}}{n} + \tfrac{1}{2} log.^2 10\,\frac{Log.^2\frac{sin.\,\alpha}{sin.\,\alpha_n}}{n} + etc.$$

Beschränkt man sich auf die beiden ersten Glieder und bemerkt, daß in dem hyperbolischen oder neperschen Logarithmensysteme $log.\,10 = 2{,}302585\ldots = M$ ist, so hat man:

$$\left(\frac{sin.\,\alpha}{sin.\,\alpha_n}\right)^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{M}{n}\,Log.\frac{sin.\,\alpha}{sin.\,\alpha_n}$$

und die Formel (a) verwandelt sich in:

$$n + \frac{n\,sin.\,\alpha\,(sin.\,\alpha - sin.\,\alpha_n)}{16\,M\,Log.\frac{sin.\,\alpha}{sin.\,\alpha_n}}.$$

Da der Bogen α sehr klein ist, so kann man $sin.(\alpha - \alpha_n)$ für $sin.\,\alpha - sin.\,\alpha_n$ und ${}^1/_2\,sin.(\alpha + \alpha_n)$ für $sin.\,\alpha$ setzen, und alsdann entspricht n sehr kleinen Schwingungen eine Anzahl unendlich kleiner Schwingungen, welche durch:

$$n\left[1 + \frac{sin.(\alpha + \alpha_n)\,sin.(\alpha - \alpha_n)}{32\,M\,Log.\frac{sin.\,\alpha}{sin.\,\alpha_n}}\right],$$

oder:

$$n\left[1 + \frac{sin.(\alpha + \alpha_n)\,sin.(\alpha - \alpha_n)}{32\,M\,Log.\frac{\alpha}{\alpha_n}}\right]$$

ausgedrückt wird. Dieses ist die Bordasche Formel, welche Biot in seiner physischen Astronomie bewiesen hat.

Zusammengesetztes Pendel.

§. 288. Das einfache Pendel ist ein bloß fingirtes; in der Wirklichkeit hat jedes Pendel endliche Dimensionen und wird alsdann ein zusammengesetztes oder physisches Pendel genannt. Wir wollen nun die Formel abzuleiten suchen, welche die schwingende Bewegung dieses letzten Pendels, wovon Figur 156 einen Durchschnitt mit einer auf der Aufhängungsaxe senkrechten und durch den Punct C gehenden Ebene darstellt, ausdrückt, indem wir dieselben Größen und Bezeichnungen beibehalten, wie bei dem einfachen Pendel und durch a den Halbmesser CA oder CM des Kreises bezeichnen, welchen der Schwerpunct des Pendels beschreibt. Wir wollen die Winkelgeschwindigkeit des Pendels oder die Geschwindigkeit der in der Einheit der Entfernung von der Aufhängungsaxe liegenden materiellen Puncte desselben am Ende der Zeit t mit ω bezeichnen; so ist die Geschwindigkeit

des Schwerpunctes des Pendels $= a\omega$ und die eines in der Entfernung r von der Aufhängungsaxe liegenden Elementes dm wird ausgedrückt durch $r\omega$. Die Intensität g der Schwere ist die auf alle materielle Puncte oder Elemente dm des Pendels wirkende beschleunigende Kraft, welche nach der Verticale MH gerichtet ist, und wenn man sie in zwei andere Kräfte zerlegt, wovon die eine nach dem Halbmesser CM und die andere nach der Tangente MT wirkt, so hat die erste auf die Geschwindigkeit des Pendels keinen Einfluß und die zweite, welche die Geschwindigkeit des Pendels verändert, ist eine beschleunigende Kraft $= g \cos. \delta$.

Die beschleunigende Kraft ist $g \cos. \delta = \frac{dv}{dt}$, und folglich drückt $g \cos. \delta dt$ den Geschwindigkeitszuwachs aus, welchen diese Kraft während des Zeittheilchens dt dem Massenelemente dm ertheilen würde, wenn sich dieses Element von den übrigen Massenelementen des Pendels, womit es verbunden ist, trennte. Nach Verlauf der Zeit $t + dt$ würde es die Geschwindigkeit $r\omega + g \cos. \delta dt$ und die Quantität der Bewegung $(r\omega + g \cos. \delta dt)\, dm$ haben; aber wegen seiner Verbindung mit den übrigen Elementen des Pendels wird die Geschwindigkeit und die Quantität der Bewegung des Elementes dm nach Verlauf der Zeit $t + dt$ resp. gleich $r\omega + rd\omega$, $(r\omega + rd\omega)\, dm$.

Dieselben Schlüsse sind auf alle Elemente des Pendels anwendbar, woraus folgt, daß von den beiden Integralen:

$$\int (r\omega + g \cos. \delta dt)\, dm\,,\ \int (r\omega + rd\omega)\, dm$$

das erste die dem Pendel von der Schwere ertheilte Quantität Bewegung und das zweite die Quantität Bewegung ausdrückt, welche das Pendel behält, und nach dem zweiten Ausdrucke des D'Alembertschen Principes (§. 218) müssen diese beiden Quantitäten Bewegung einander das Gleichgewicht halten. Soll dieses aber um die Axe des Pendels der Fall sein, so müssen die Momente dieser Quantitäten der Bewegung in Beziehung auf diese Axe einander gleich sein, und um diese Momente zu bilden, braucht man nur die Quantitäten der Bewegung mit der Entfernung r des Elementes dm von dieser Axe zu multipliciren, wodurch man folgende Gleichung erhält:

$$\int (r^2\omega + r^2 d\omega)\, dm = \int (r^2\omega + rg \cos. \delta dt)\, dm.$$

Läßt man den beiden Theilen der Gleichung gemeinschaftlichen Factor hinweg und läßt die Factoren, welche für alle Elemente des Pendels dieselben sind, aus dem Integralzeichen heraustreten, so kann man dieser Gleichung folgende Form geben:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{g \int r \cos. \delta dm}{\int r^2 dm}.$$

Die Winkel HMT, CMP, welche denselben Winkel TMB zum Complemente haben, sind einander gleich und das rechtwinklige Dreieck CPM gibt $r \cos. \delta = y$, und wenn man diesen Werth für $r \cos. \delta$ in die letzte Gleichung substituirt; so verwandelt sie sich in:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{g \int y dm}{\int r^2 dm}.$$

Bezeichnet man die Masse des Pendels mit M und das aus seinem Schwerpuncte auf die Verticale CB gefällte Perpendikel mit y_1, so ist der Werth des Integrales $\int y dm = My_1$ und man hat:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{gMy_1}{\int r^2 dm}.$$

Da der Winkel $MCP = \Theta$ ist, so gibt das rechtwinklige Dreieck CPM, $y_1 = a \sin. \Theta$, und wenn man diesen Werth von y_1 in die vorhergehende Gleichung setzt, so kommt:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{gMa \sin. \Theta}{\int r^2 dm}.$$

Die Winkelgeschwindigkeit des Pendels wird ausgedrückt durch $\omega = -\frac{d\Theta}{dt}$, und wenn man die correspondirenden Theile dieser beiden Gleichungen in einander multiplicirt und dann integrirt; so erhält man:

$$^1/_2 \omega^2 = \frac{agM \cos. \Theta}{\int r^2 dm} + C.$$

Zur Bestimmung des Werthes der Constante C wollen wir annehmen, daß im Anfange der Zeit $\omega = 0$, $\Theta = \alpha$ sei, welches gibt:

$$0 = \frac{agM \cos. \alpha}{\int r^2 dm} + C, \; C = -\frac{agM \cos. \alpha}{\int r^2 dm},$$

und wenn man diesen Werth für C substituirt, so hat man:

$$\omega^2 = \frac{d\Theta^2}{dt^2} = \frac{2agM}{\int r^2 dm} (\cos. \Theta - \cos. \alpha).$$

Diese Formel, welche sich nach dem D'Alembertschen Principe unmittelbar ergibt, ist dieselbe, als die, welche wir bereits in §. 281 vermittelst des Principes der lebendigen Kräfte gefunden haben, und sie wird uns gleich dazu dienen, die Auflösung einer Aufgabe auf eine einfache Weise zu finden, welche die berühmtesten Geometer lange Zeit beschäftigt hat.

§. 289. Ein zusammengesetztes Pendel ist im Allgemeinen ein Apparat, der aus mehreren schweren Körpern besteht, die vermittelst eines durch sie hindurch gehenden Stabes oder Fadens mit einander verbunden sind. Dieser Faden ist an einer horizontalen Axe befestigt, um welche er zu beiden Seiten der durch den Aufhängungspunct gehenden Verticale schwingen kann.

Bei der Bewegung des zusammengesetzten Pendels ist die jedes Theiles nicht dieselbe, als wenn er ein einzelnes Pendel für sich bildete; denn die Schwere strebt, alle diese Theile in derselben Zeit durch denselben Raum fallen zu lassen, was wegen der Steifigkeit des durch ihre Mittelpuncte gehenden Fadens nicht angeht, sondern sie beschreiben vielmehr Bogen, deren Längen der Entfernung vom Aufhängungspuncte proportional sind. Es muß also zwischen diesen Theilen oder Gewichten eine Compensation der Bewegungen stattfinden, so daß die näher am Aufhängungspuncte liegenden Theile die Geschwindigkeiten der weiter davon entfernt liegenden Theile beschleunigen und die letztern die Ge-

schwindigkeiten der erstern verzögern. Es gibt also auf dem Faden, woran alle Gewichte oder Theile des Pendels aufgehangen sind, einen Punct von solcher Beschaffenheit, daß, wenn man darin ein Gewicht aufhängt, dasselbe wie ein einfaches Pendel schwingt, ohne daß die übrigen Theile des zusammengesetzten Pendels einen Einfluß darauf haben, und auf die Bestimmung der Lage dieses Punctes kommt es eben zunächst an.

Wird die Differentialgleichung für die Bewegung des einfachen Pendels (§. 284) zum Quadrate erhoben und $a = l$ gesetzt, so hat man:

$$dt^2 = \frac{l d\Theta^2}{2g\,(\cos.\Theta - \cos.\alpha)},$$

und wenn dieser Werth von dt^2 in die vorhergehende Gleichung substituirt wird, so kommt:

$$l = \frac{\int r^2 dm}{Ma},$$

woraus erhellet, daß die Entfernung l des Aufhängungspunctes des zusammengesetzten Pendels von dem Puncte, dessen Bewegung durch die verschiedenen Theile des Pendels weder beschleunigt, noch verzögert wird, dem Quotienten aus dem Trägheitsmomente des Pendels in Beziehung auf die Aufhängungsaxe und dem Producte aus der Masse des Pendels und der Entfernung des Aufhängungspunctes vom Schwerpuncte gleich ist.

Man hat diesen Punct den Schwingungsmittelpunct des zusammengesetzten Pendels genannt und seine Lage ist dieselbe, als die des Mittelpunctes des Stoßes (§. 279), obgleich die Methoden zur Bestimmung der Lage dieser beiden Puncte sehr verschieden sind.

Wenn man das Verhältniß des Trägheitsmomentes des Pendels in Beziehung auf eine durch seinen Schwerpunct gehende und zu der Aufhängungsaxe parallele Axe zu seiner Masse M mit k^2 bezeichnet, so hat man $\int r^2 dm = M(a^2 + k^2)$ (§. 277), und wenn man diesen Werth substituirt, so verwandelt sich die letzte Formel in:

$$l = \frac{a^2 + k^2}{a} = a + \frac{k^2}{a}.$$

Man sagt, zwei Pendel sind synchronisch, wenn sie ihre Schwingungen in derselben Zeit machen, und folglich drückt der Werth von l oder die Entfernung des Aufhängungspunctes vom Schwingungsmittelpuncte des zusammengesetzten Pendels die Länge des einfachen Pendels aus, welches mit dem zusammengesetzten synchronisch ist, und man sieht, daß dieses einfache Pendel um $\frac{k^2}{a}$ länger ist, als die Entfernung des Aufhängungspunctes vom Schwerpuncte des zusammengesetzten Pendels.

§. 290. Wir wollen die Formel:

$$l = \frac{\int r^2 dm}{Ma} \text{ oder } \int r^2 dm = Mal$$

wieder betrachten. Wenn das zusammengesetzte Pendel aus mehreren Körpern besteht, welche vermittelst eines durch ihre Schwerpuncte gehenden Fadens auf eine unveränderliche Weise mit einander verbunden sind, und man bezeichnet die Massen dieser Körper resp. mit M', M'', M''', *etc.*, die Entfernungen der Aufhängungsaxe von ihren Schwerpuncten mit a', a'', a''', *etc.* und die Entfernungen derselben Axe von ihren Schwingungsmittelpuncten mit l', l'', l''', *etc.*; so sind $M'a'l'$, $M''a''l''$, $M'''a'''l'''$, *etc.* die Trägheitsmomente dieser Körper in Beziehung auf die Aufhängungsaxe. Ferner hat man nach einer Eigenschaft des Schwerpunctes (§. 51):

$$Ma = M'a' + M''a'' + M'''a''' + etc.,$$

und dieselbe Eigenschaft findet auch für die Trägheitsmomente statt, woraus folgt, daß die Länge l des einfachen mit dem zusammengesetzten synchronischen Pendel durch:

$$l = \frac{M'a'l' + M''a''l'' + M'''a'''l''' + etc.}{M'a' + M''a'' + M'''a''' + etc.}$$

ausgedrückt wird, und vermittelst dieser Formel berechnet man den Abstand des Aufhängungspunctes eines zusammengesetzten Pendels von seinem Schwingungsmittelpuncte, wenn man die Entfernung des Aufhängungspunctes von dem Schwerpuncte und Schwingungsmittelpuncte jedes Theiles des zusammengesetzten Pendels bestimmt hat.

Dreizehntes Kapitel.

Von dem Secundenpendel und von den Mitteln, welche dasselbe zur Aufklärung verschiedener Naturerscheinungen darbietet.

§. 291. Man hat schon früher Pendelbeobachtungen angestellt; allein Borda hat zur Bestimmung des Verhältnisses zwischen der Länge des Secundenpendels und den Längenmaaßen einen neuen und viel genauern Apparat, als alle frühern angegeben und unter seiner Aufsicht construiren lassen, womit Borda und Cassini im Jahre 1792 auf der Sternwarte zu Paris Beobachtungen angestellt haben, und die Abhandlung von Borda, welche die Details dieser Versuche enthält, befindet sich im dritten Bande der **Base du Système métrique décimal**.

In dem Zimmer der Sternwarte zu Paris, worin diese Versuche angestellt sind, befindet sich eine sehr solide isolirte Mauer von 12 Fuß Höhe, auf welche ein nach vorn überragender Steinblock gelegt ist, dessen überragender Theil die gehörige Form hat, um vermittelst einer Kupferplatte *IKL* (Fig. 157), auf welche eine sorgfältig gearbeitete und polirte Stahlplatte *MN* gelegt ist, das Pendel aufhängen zu können. In dieser ebenen Stahlplatte und in der Kupferplatte, welche auf dem Steinblocke durch drei Schrauben befestigt wird, vermittelst

welcher man der Ebene *MN* eine genau horizontale Lage gibt, befindet sich eine rechteckige Oeffnung *ST*. Das Pendel (Fig. 158) besteht aus mehreren Theilen, nämlich aus der scharfkantigen stählernen Axe *AB*, durch deren Mitte in senkrechter Richtung der Stab *FD* geht, dessen oberer Theil an seinem Ende in eine Schraube ausläuft, woran sich eine kleine Schraubenmutter *GH* befindet, welche man der Aufhängungsaxe nähern oder davon entfernen kann, so daß man dem untern Theile des Stabes eine schwingende Bewegung geben kann, welche mit der des Pendels fast synchronisch ist. Dieser untere Theil ist nach seiner Axe mit einem kleinen Loche durchbrochen, in welches man das obere Ende des Fadens treten läßt, den man mit einer Druckschraube befestigt und Borda bediente sich zur Aufhängung der Gewichte des Pendels an dem untern Ende des Stabes *FD* eines Eisendrahtes. Dieses Gewicht war eine Platinkugel von $16\,^1/_6$ Linien im Durchmesser (Fig. 158^a). Der Draht ging in den obern Theil einer Kupferkappe, worin er wie an seinem andern Ende durch eine Druckschraube befestigt wurde und der Durchmesser der Concavität dieser kupfernen Kappe war dem der Kugel gleich. Der Druck der Luft und eine dünne Schicht Talg zwischen den beiden einander berührenden Flächen bewirkte eine Adhäsion, welche zum Festhalten der Gewichte hinreichend war.

§. 292. Nachdem diese Einrichtung der scharfkantigen Axe und des durch sie hindurch gehenden Stabes getroffen war, regulirte man die Schwingungen so, daß sie mit denen des Pendels synchronisch waren, so daß die Masse der scharfkantigen Axe und des durch sie hindurch gehenden Stabes keinen Einfluß ausübte und folglich ohne irgend einen Fehler ganz unberücksichtigt bleiben konnte.

Unter den Steinblock war an die Mauer eine Secundenuhr gestellt und das Pendel, dessen Bewegung mit der der Uhr verglichen werden sollte, ging voran, so daß die Kugel, welche sich ungefähr in der Höhe des Mittelpunctes der Linse des Uhrpendels befand, ungefähr 10 Zoll davon entfernt war.

Um den Pendelapparat gegen die Bewegungen der Luft zu schützen, hatte man denselben, sowohl als die Uhr mit einem Kasten umgeben, welcher unterhalb mit Fenstern versehen war.

Wenn sich das Pendel und die Uhr in Ruhe befanden und der Mittelpunct der Linse durch den Durchschnitt der beiden Diagonalen eines kleinen Quadrates von Papier bestimmt war; so stellte man in einer Entfernung von 6 Fuß in der durch den Faden und durch den Mittelpunct der Linse gehenden horizontalen Richtung ein Fernrohr auf, um die Coincidenzen der Schwingungen zu beobachten, welche jedesmal stattfanden, wenn der Faden des Pendels und der Mittelpunct der Linse sich gleichzeitig in der durch die Axe des Fernrohres gelegten Verticalebene befanden. Vor dem Pendel war ferner ein Schirm aufgestellt, dessen verticaler Rand die Hälfte des Fadens verdeckte, um die Coincidenzen leichter beobachten zu können, und um die Amplitude der Bogen bei jedem Zusammentreffen schätzen zu können, hatte man in einer kleinen Entfernung einen in Minuten eingetheilten Maaßstab angebracht.

Ferner hatte man die Uhr nach Fixsternbeobachtungen regulirt und sie ging 13″, 4 vor, so daß sie also in einem Sterntage 86413, 4 und

in einem mittlern Sonnentage 86650 Schwingungen machte (§. 185). Die Länge des Pendels betrug 12 Fuß und es gebrauchte ungefähr 2″ zu einer Schwingung, und endlich verlängerte oder verkürzte man den Draht, um demselben eine solche Länge zu geben, daß die Dauer einer Pendelschwingung etwas kleiner war, als die Dauer zweier Schwingungen des Pendels der Uhr.

Obgleich das Pendel länger, als 12 Stunden bemerkbare Schwingungen machte, so beobachtete man es doch nur 4 oder 5 Stunden lang, weil bei den folgenden Schwingungen die von dem Pendel beschriebenen Bogen sehr klein wurden und es sehr schwierig gewesen wäre, den Augenblick der Coincidenzen genau zu beobachten.

Nachdem der Versuch angestellt war, mußte man die Länge des Pendels messen, und nachdem es zum Stillstehen gebracht war, wurde die kleine Kupferplatte *IK* vermittelst einer Stellschraube gehoben, und man befestigte sie mit einer Druckschraube, wenn sie mit der Kugel in Berührung war, ohne dieselbe zu heben. Hierauf wurde das Pendel durch die Bewegung der scharfkantigen Axe *OP* (Fig. 157) verrückt und dafür das Stück *QR* an die Stelle gebracht, welches den Kopf *T* eines Platinstabes bildete, welcher wie das Pendel aufgehangen war.

Dieser Platinstab (Fig. 159) war zum Messen der Länge des Pendels bestimmt; seine Länge betrug etwas mehr als 12 Fuß; er war mit einem Kupferstabe belegt, dessen oberes Ende etwas über *T*, wo die Aufhängung stattfindet, mit drei Schrauben befestigt war, und welcher eine Länge von 11 $^1/_2$ Fuß hatte; sein anderes Ende war frei und der Unterschied der Ausdehnung des Kupfers und des Platins bildete ein metallisches Thermometer. Am untern Ende des Maaßstabes befand sich eine Nute, worin ein Streifen von Platin fortgleiten konnte, welcher in Bewegung gesetzt wurde, wenn man sanft gegen den Knopf drückte.

Wenn der Maaßstab für das Pendel substituirt war, so ließ man den Platinstreifen bis auf die kleine Platte *IK* herabgehen, die Theilung des Streifens gab $\frac{2}{10}\frac{0}{00}$ von 12 Fuß an und der kleine Vernier oder Nonius gab Zehntel dieser Theile an. Vermittelst eines Mikroskopes wurde die Länge des Pendels von dem Aufhängungspuncte bis an die untere Fläche der Kugel mit einer großen Genauigkeit gemessen.

§. 293. Wir wollen nun den ersten Bordaschen Versuch nebst den Correctionen, welche an den beobachteten Resultaten vorgenommen werden mußten, um die Länge des Secundenpendels genau zu erhalten, hier mittheilen.

Nachdem das Pendel in Bewegung gesetzt war, beobachtete man die Schwingungen mit dem Fernrohre, wenn der Draht und der Mittelpunct der Linse gleichzeitig sehr nahe bei dem Rande des Schirmes waren und eben dahinter verschwinden wollten. Wenn der Draht früher als der Mittelpunct der Linse durch die Verticale geht, so kommt bald der Zeitpunct, wo das Umgekehrte stattfindet, und es findet folglich zwischen diesen beiden einander sehr nahe liegenden Zeitmomenten eine Coincidenz statt. Alsdann notirt man die von der Uhr unmittelbar vorher und nachher angegebene Zeit und schätzt den wahrscheinlichen Augenblick ab, worin diese Coincidenz stattgefunden hat. Hierauf beobachtet man die Amplitude des von dem Pendel beschriebenen Bo-

gens, die Temperatur, welche die Thermometer in dem Gehäuse des Apparates angeben und den Barometerstand.

Die Linse fährt fort, dem Pendel zuvorzukommen, und wenn sie fast zwei Schwingungen mehr gemacht hat, so fängt man die Beobachtung der zweiten Coincidenz an, ganz auf dieselbe Weise, wie vorhin und ebenso bei den folgenden Beobachtungen. Die folgende Tafel enthält die Resultate dieser Beobachtungen für die fünf bei dem ersten Versuche beobachteten Coincidenzen.

Nummern.	Beobachtungszeiten.	Amplituden.	Thermometer		Metallthermometer 181,3 Theile.	Barometer 28 Zoll 3 Linien.
			unteres.	oberes.		
1	$7^h\,45'\,56''$	64′	15′,3	16′,2		
2	8. 59. 10	32	15,4	16,9		
3	10. 12. 40	19	15,4	16,9		
4	11. 26. 29	11,5	15,4	16,8		
5	12. 39. 3	7	15,6	17		

Aus dieser Tafel erhellet, daß die Zeiten und Amplituden nahezu resp. eine zunehmende arithmetische und eine abnehmende geometrische Progression bilden. Bei der Beobachtung der ersten Coincidenz zeigte die Uhr $7^h\,45'\,56''$ und der von dem Pendel auf jeder Seite der Verticale beschriebene Bogen betrug 64′; aber dieser Bogen nahm schnell ab und um $8^h\,59'\,10''$, nachdem die Linse um zwei Schwingungen vor dem Pendel voraus war, beobachtete man das zweite Zusammentreffen, wo das Pendel nur noch einen Bogen von 32′ beschrieb. Der Zeitraum zwischen den beiden Coincidenzen betrug $73'\,14'' = 4394''$ und die Linse der Uhr hatte während dieser Zeit doppelt so viel und noch zwei Schwingungen mehr, als das Pendel gemacht, folglich war die Anzahl der Schwingungen des Pendels $= \frac{4394 - 2}{2} = 2196$. Während die Linse eine Oscillation machte, machte also das Pendel deren $\frac{2196}{4394}$; aber die Linse macht in einem mittlern Sonnentage 86650 Schwingungen, und wenn folglich die Bewegung mit derselben Geschwindigkeit fortdauerte, so würde das Pendel während derselben Zeit $86650 \times \frac{2196}{4394} = 43305,28$ Schwingungen machen.

§. 294. Die Correction, welche man an dieser Schwingungszahl vernehmen muß, um sie auf die Anzahl der entsprechenden unendlich kleinen Schwingungen zurückzuführen, wird nach §. 287 durch folgende Formel ausgedrückt:

$$43305,28 + \frac{43305,28\ sin.(\alpha + \alpha_n)\ sin.(\alpha - \alpha_n)}{32\ M\ log.\ \frac{\alpha}{\alpha_n}}$$

worin $\alpha = 64'$, $\alpha_n = 32'$, $M = 2{,}302585$ ist. Setzt man diese Zahlen für die Buchstaben und bedient sich der Logarithmentafeln, so findet man:

	log. 43305,28	=	4,6365408
	log. sin. 1° 36′	=	2,4459409
	log. sin. 0° 32′	=	3,9688698
dec. Erg.	*log.* 32	=	8,4948500
dec. Erg.	*log.* 2,302585	=	9,6377844
dec. Erg.	*log.* 2	=	10,5213902
	log. 0,50743	=	29,7053761,

d. h. die vorzunehmende Correction ist nahezu $= 0{,}51$, und wenn man dieselbe zu dem ersten Gliede der Formel addirt, so erhält man 43305,79.

Nimmt man dieselben Rechnungen für jedes der drei übrigen Intervalle vor, so findet man:

43305,35 + 0,14	=	43305,49
43305,44 + 0,05	=	43305,49
43305,14 + 0,02	=	43305,16
		173221,93,
welches im Mittel		43305,48

unendlich kleine Schwingungen gibt.

Die Länge des Pendels von dem Aufhängungspuncte bis zu der Ebene, welche die Kugel unterwärts berührt, wurde mit dem Maaßstabe auf die angegebene Weise gemessen und $= 203952{,}2$ Theilen gefunden, wozu wegen der Verlängerung des an seinem obern Ende aufgehangenen Maaßstabes 0,3 addirt werden muß, so daß man 203952,5 erhält. Diese Länge muß aber noch um die von der Temperaturveränderung herrührende Ausdehnung oder Zusammenziehung verbessert werden. Ein Eisendraht verlängert sich bei einer Temperaturerhöhung von 1° Reaumur um $\frac{1}{7000}$, und folglich für 1° Centes. um $\frac{1}{8750}$, was für die ganze Länge des Pendels 2,33 Theile beträgt.

Die Thermometer haben im Mittel aus allen Beobachtungen 16°,12 gezeigt, und als man das Pendel gemessen hatte, zeigten sie 16°,30, so daß der Unterschied 0,18 beträgt, woraus sich eine Verlängerung von $2{,}33 \times 0{,}18 = 0{,}42$ ergibt. Wird diese Correction von der obigen Länge abgezogen, so bleibt 203952,08, wovon noch der Halbmesser der Kugel abgezogen werden muß, welcher $= 937$ gefunden wurde, so daß die Länge des Pendels von dem Aufhängungspuncte bis zu dem Mittelpuncte der Kugel 203015,08 Theile beträgt.

§. 295. Hierauf muß nun die Entfernung des Aufhängungspunctes des Pendels von seinem Schwingungsmittelpuncte bestimmt werden und die allgemeine Regel zur Bestimmung dieser Entfernung wird nach §. 290 durch folgende Formel ausgedrückt:

$$l = \frac{M'a'l' + M''a''l'' + M'''a'''l'''}{M'a' + M''a'' + M'''a'''}.$$

Um diese Formel auf das Bordasche Pendel anzuwenden, wollen wir zunächst bemerken, daß man statt der Massen M', M'', M''' der

Kugel, der Kugelkappe und des Drahtes ihre Gewichte setzen kann, welche wir mit A, B, C bezeichnen wollen, indem wir statt der Buchstaben a', a'', a''', welche die Entfernungen des Aufhängungspunctes von den Schwerpuncten dieser drei Stücke ausdrücken, die Buchstaben a, b, c setzen und den Halbmesser der Kugel mit r bezeichnen, so daß $l' = a + \frac{2r^2}{5a}$ die Entfernung des Aufhängungspunctes vom Schwingungsmittelpuncte der Kugel ausdrückt. Der Schwerpunct und Schwingungsmittelpunct der Kugelkappe, welche fast mit einander zusammenfallen, liegen auf der Oberfläche der Kugel, so daß $l'' = b = a - r$ ist, und wenn die Länge des Drahtes mit h bezeichnet wird, so hat man $l''' = c + \frac{h^2}{12c}$ für die Entfernung seines Schwingungsmittelpunctes von dem Aufhängungspuncte. Substituirt man diese Werthe in die allgemeine Formel, so verwandelt sie sich in:

$$l = \frac{Aa\left(a + \frac{2r^2}{5a}\right) + B(a-r)^2 + Cc\left(c + \frac{k^2}{12c}\right)}{Aa + B(a-r) + Cc},$$

und wenn man den Zähler durch den Nenner dividirt und das erste Glied des Restes reducirt, so erhält man:

$$l = a + \frac{2r^2}{5a} - \frac{B\left(ar - \frac{3}{5}r^2 - \frac{2r^3}{5a}\right) + Cc\left[a + \frac{2r^2}{5a} - \left(c + \frac{h^2}{12c}\right)\right]}{Aa + B(a-r) + Cc},$$

wo die in dieser Formel vorkommenden Buchstaben folgende durch die Beobachtung erhaltene Werthe haben:

$A = 9911$ Gran, Gewicht der Kugel,
$B = 37,82$ Gr., Gewicht der Kugelkappe,
$C = 13,79$ Gr., Gewicht des Drahtes,
$a = 203015,08$ Theile,
-2905 { 1968 Theile, Entfernung zwischen dem Aufhängungspuncte und dem Anfange des Drahtes,
$r = 937$ Theile
$h = 200110,08$ Theile, Länge des Drahtes,
$100055,04$
$+ \quad 1968$
$c = 102023,04$ Theile, Entfernung des Aufhängungspunctes vom Schwerpuncte des Drahtes.

Wenn diese Zahlenwerthe statt der Buchstaben gesetzt werden, so erhält man:

$$l = 203015,08 + 1,73 - \frac{10325545417 2,27}{2021131948,58},$$

wo das zweite Glied die Entfernung des Mittelpunctes der Kugel von ihrem Schwingungsmittelpuncte und das dritte, welches $= 51,08$ Theilen ist, die Correction wegen des Gewichtes der Kugelkappe und dem des Fadens ausdrückt. Wenn man das Gewicht der Kugelkappe ver-

nachläſſigte, ſo betrüge die Correction wegen des Gewichtes des Drahtes 47,71 Theile. Nach allen dieſen Correctionen ergibt ſich alſo, daß die Länge l des einfachen Pendels, welches mit dem beobachteten zuſammengeſetzten Pendel ſynchroniſch iſt, 202965,73 Theile beträgt.

§. 296. Wir wollen nun dieſe durch die Beobachtung erhaltenen Reſultate zur Beſtimmung der Länge des Secundenpendels anwenden.

Die Dauer einer Schwingung des einfachen Pendels wird nach §. 285 durch die Formel:

$$T = \pi \sqrt{\frac{a}{g}}$$

ausgedrückt, und wenn man l für a ſetzt, mit n die Anzahl der Schwingungen des Pendels während der Zeit t bezeichnet, ſo hat man $T = \frac{t}{n}$ und die vorhergehende Formel verwandelt ſich in:

$$\frac{t}{n} = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Es ſei L die Länge eines andern Pendels, welches N Schwingungen während der Zeit T macht, ſo wird die Dauer einer Schwingung dieſes Pendels ausgedrückt durch:

$$\frac{T}{N} = \pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

und dieſe beiden letzten Gleichungen geben folgende Proportion:

$$\frac{t}{n} : \frac{T}{N} = \sqrt{l} : \sqrt{L},$$

d. h. die Dauern der Schwingungen zweier Pendel verhalten ſich wie die Quadratwurzeln aus ihren Längen.

Wenn die Schwingungsdauer $\frac{T}{N} = 1''$ iſt, ſo wird die Länge des zweiten oder Secundenpendels ausgedrückt durch:

$$L = \frac{ln^2}{t^2}.$$

Setzt man $l = 202965{,}73$, $n = 43305{,}48$, $t = 86400$ und rechnet mit Logarithmen, ſo findet man:

	$log.\, l$	$= 5{,}3074227$
	$2\, log.\, n$	$= 9{,}2730856$
dec. Erg.	$2\, log.\, t$	$= 0{,}1269726$
	$log.\, L$	$= 14{,}7074809.$

Die Länge des Secundenpendels iſt alſo in der Luft:

$$L = 50989{,}52 \text{ Theilen},$$

woran noch die Correctionen wegen des Widerſtandes der Luft angebracht werden müſſen, um die Länge des Secundenpendels im leeren Raume zu erhalten.

Das Gewicht eines Körpers ist in der Luft kleiner, als im leeren Raume, und zwar ist der Unterschied dem Gewichte des Volumens Luft gleich, welches der Körper einnimmt. Dieses Factum findet bei allen Flüssigkeiten statt und kann vermittelst der hydrostatischen Wage durch das Experiment dargethan werden.

Bezeichnet man also das Gewicht des Körpers in der Luft mit P, sein Gewicht im leeren Raume mit P' und das Gewicht eines Volumens Luft, welches dem des Körpers gleich ist, mit p; so hat man nach dem eben erwähnten Satze:

$$P = P' - p.$$

Es bezeichne m die Masse des Körpers, ϱ das Verhältniß der Dichtigkeit der Luft zu der des Körpers und g, g' resp die Intensität der Schwere in der Luft und im leeren Raume, so hat man:

$$P = mg,\ P' = mg',\ p = P'\varrho = mg'\varrho,$$

und wenn man diese Werthe in die erste Gleichung substituirt, so kommt:

$$mg = mg' - mg'\varrho,\ g' = \frac{g}{1-\varrho} = g + g\varrho + g\varrho^2 + etc.$$

Es seien l, l' dir Längen zweier synchronischer Pendel unter der Wirkung der Schwerkräfte g, g', so hat man:

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}} = \pi\sqrt{\frac{l'}{g'}},$$

und wenn man diese Gleichung mit der vorhergehenden verbindet, so ergibt sich:

$$l' = \frac{l}{1-\varrho} = l + l\varrho + l\varrho^2 + etc.$$

Bleibt man bei der ersten Potenz von ϱ stehen, welches ein sehr kleiner Bruch ist, so drückt das zweite Glied dieser Reihe die Correction aus, welche an der Länge des Pendels in der Luft angebracht werden muß, um die Länge des synchronischen Pendels im leeren Raume zu erhalten.

Wenn der Barometerstand 28 Zoll und der Thermometerstand $16^3/_4$ Grad beträgt, so entspricht einer Queckfilbersäule von 1 Linie Höhe nach den Versuchen von Deluc eine Luftsäule von 77,55 Fuß Höhe, d. h. das specifische Gewicht der Luft verhält sich zu dem des Queckfilbers wie 1 : 11167,2; das specifische Gewicht des Queckfilbers verhält sich nach Brisson zu dem des Wassers wie 13,57 : 1 und nach den Versuchen von Borda verhält sich das specifische Gewicht des Wassers zu dem der Platinkugel wie 1 : 20,71. Multiplicirt man diese drei Verhältnisse in einander und dividirt dann durch das Vorderglied, so findet man, daß sich das specifische Gewicht der Luft zu dem der Platinkugel wie 1 : 17043 verhält.

Nach dem Werthe von $l = 50989,52$ und dem eben gefundenen Werthe von $\varrho = \frac{1}{17043}$ hat man folgende Correction anzubringen, um aus der Länge des Pendels in der Luft die des synchronischen Pendels im leeren Raume abzuleiten:

$50989,52 \times \frac{1}{17043} =$ . . . . . 2,99 Theilen

und wegen des Gewichtes des Drahtes und der Kugelkappe 0,02

Diese Correction nimmt für jede Linie des Barometerstandes um $\frac{1}{28 \times 12} = \frac{1}{336}$ zu und nach Lavoisier dehnt sich ein Volumen Luft für eine Temperaturerhöhung von 1° Reaumur um $\frac{1}{215}$ oder für 1° Centes. um $\frac{1}{270}$ aus, so daß man hat:

$$3,01\left(\frac{2,8}{336} + \frac{5}{270}\right) = 3,01 \times \frac{29}{1080} = \quad 0,08$$

3,09

Addirt man diese Correction zu der Länge des Pendels in der Luft, nämlich 50989,52

so erhält man für die Länge des Secundenpendels im leeren Raume . . . . . 50992,6 Theile.

Das metallische Thermometer zeigte bei der Temperatur des schmelzenden Eises 151 Theile und während des Versuches 181,5 Theile, so daß der Unterschied = 30,5 ist, und für einen Theil dieses Thermometers verlängerte sich der Maaßstab um $\frac{1}{216000}$, und die letzte Correction ist daher:

$$50992,6 \times \frac{30,5}{216000} = \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 7,2$$

Die Länge des Secundenpendels im leeren Raume und bei der Temperatur des schmelzenden Eises ist also = ... 50999,8 Theilen.

Aus der Tafel der 20 von Borda angestellten und berechneten Versuche sieht man, daß alle Differenzen sehr klein sind; denn die größte beträgt noch nicht $^1/_2$ Theil, so daß der mittlere Werth der sich aus diesen Versuchen ergebenden Länge des Secundenpendels = 50999,6 Theilen ist.

§. 297. Vermittelst der folgenden durch sehr genaue Versuche bestimmten Verhältnisse wollen wir nun die in Theilen des Platinmaaßstabes ausgedrückte Länge des Secundenpendels in gewöhnlichen Maaßen ausdrücken.

Lenoir hatte unter Borda's Leitung vier Platinmaaßstäbe verfertigt und auf den mit No. 1 bezeichneten wurden die drei übrigen bei der Temperatur des schmelzenden Eises bezogen, und es ergab sich, daß 204000 Theile des Maaßstabes des Pendels 203995,1 Theilen des Maaßstabes No. 1 entsprachen, so daß die Länge des Pendels $l =$

$\frac{50999,6 \times 203995,1}{204000} = 50998,38$ Theilen des Maaßstabes **No. 1** ist, und wenn man durch die Anzahl 200000 der Theile des Maaßstabes dividirt, so hat man $l = 0,2549919$ des Maaßstabes **No. 1**.

Nach den Versuchen von Borda verhält sich die Länge des Maaßstabes **No. 1** bei der Temperatur des schmelzenden Eises zu der Toise bei 13° Reaum. wie 200000 zu 100015,15 und wenn man folglich die Länge der Toise mit t bezeichnet, so wird sie ausgedrückt durch:

$$t = \frac{100015,15}{200000} = 0,50007575.$$

Diese beiden letzten Ausdrücke geben für die Länge des Secundenpendels im leeren Raume und auf der Pariser Sternwarte:

$$l = \frac{0,2549919\, t}{0,50007575},$$

und wenn für die Toise ihr Werth $t = 864$ Linien gesetzt wird, so findet man:

$$l = 440,5593 \text{ Linien},$$

und wenn man endlich durch 443,296 dividirt, so erhält man die Länge des Secundenpendels in Metern:

$$l = 0^m,9938265.$$

Um diese Länge des Secundenpendels auf die zu reduciren, welche es in dem entsprechenden Puncte am Niveau des Meeres haben würde, wollen wir die Intensitäten der Schwere an diesen beiden einander entsprechenden Puncten mit g, G, die Höhe des Beobachtungsortes über der Meeresfläche mit H und den Halbmesser der Erde mit R bezeichnen; so haben wir:

$$G = \frac{g(R+H)^2}{R^2} = g\left(1 + \frac{2H}{R}\right),$$

wenn das Quadrat entwickelt und das letzte Glied hinweggelassen wird.

Für G und g kann man auch die entsprechenden Pendellängen L und l, welche in demselben Verhältnisse stehen, setzen, so verwandelt sich die vorhergehende Gleichung durch diese Substitution in:

$$L = l\left(1 + \frac{2H}{R}\right).$$

Die Höhe der Pariser Sternwarte über der Meeresfläche ist $H = 63$ Meter, und wenn man für den diesem Puncte entsprechenden Halbmesser der Erde den Halbmesser des mittlern Parallelkreises nimmt, so hat man $R = 6366679$ Meter; folglich ist $\frac{2H}{R} = 0,0000197$ und man hat für die Länge des Secundenpendels im leeren Raume und am Niveau des Meeres:

$$L = 0^m,9938462.$$

§. 298 Die Dauern der unendlich kleinen Schwingungen zweier Pendel verhalten sich wie die Quadratwurzeln aus ihren Längen, und

wenn man folglich die Anzahlen der Schwingungen, welche sie während der Zeiten T und T' machen, mit N und N' bezeichnet, so hat man:

$$\frac{T}{N} : \frac{T'}{N'} = \sqrt{L} : \sqrt{L'},$$

und wenn $T = T'$ ist, so ergibt sich aus dieser Proportion:

$$L' = \frac{N^2 L}{N'^2}.$$

Wir wollen diese Formel zur Berechnung der Länge des Decimalpendels anwenden, welches in einem mittlern Sonnentage $N' = 100000$ Schwingungen macht.

Wir kennen die Länge $L = 0^m,9938462$ des Sexagesimalpendels, welches in einem mittlern Sonnentage $N = 86400$ Schwingungen macht, und vermittelst dieser Werthe gibt die logarithmische Rechnung:

$$\begin{aligned} log.\, L &= 1,9973192 \\ 2\, log.\, N &= 9,8730274 \\ \text{dec. Erg. } 2\, log.\, N' &= 0,0000000 \\ log.\, L' &= 9,8703466 \end{aligned}$$

$$L' = 0^m,7419020$$

Nach den Versuchen vom Jahre 1808 ist $L' = 0,7419175$

Differenz $0,0000155$.

Diese letzten Versuche sind auf der Pariser Sternwarte von Biot, Bourard und Mathieu angestellt und der Apparat ihres Pendels war dem von Borda ähnlich, aber er hatte kaum eine Länge von 28 Zoll oder $0^m,76$, um denselben an die verschiedenen Orte transportiren zu können, wo Beobachtungen angestellt werden sollten. Statt des Eisendrahtes bediente man sich eines Kupferdrahtes, um die Fehler zu vermeiden, welche durch den Erdmagnetismus verursacht werden können. Der Unterschied zwischen der durch diese Beobachtungen gefundenen Länge des Decimalpendels und der sich aus den Bordaschen Versuchen ergebenden Länge beträgt $\frac{155}{1000}$ Millimeter, oder ungefähr $\frac{7}{1000}$ Linien, und Resultate, welche so wenig von einander verschieden sind, müssen folglich mit sehr vollkommenen Instrumenten und mit vieler Geschicklichkeit und Umsicht erhalten sein. In der That bieten die physikalischen Wissenschaften wohl nicht leicht Beispiele genauerer Versuche dar, als die Bordaschen Pendelbeobachtungen und das letzte aus allen diesen Beobachtungen eben abgeleitete Resultat soll uns nun dazu dienen, die Intensität der Schwere g oder die in der Zeiteinheit bei dem freien Falle schwerer Körper durch diese Kraft erzeugte Geschwindigkeit zu berechnen. In §. 221 haben wir gesehen, wie diese erlangte Geschwindigkeit vermittelst der Atwoodschen Fallmaschine anschaulich gemacht werden kann; denn wenn man sich mit den Haupterscheinungen begnügt, so kann man sie vermittelst dieser sinnreichen Maschine immer auf eine genügende Weise hervorbringen; allein man kann bei weitem nicht die Genauigkeit erreichen, welche das Pendel gewährt.

§. 299. Wir wollen die Formel:

$$\frac{T}{N} = \pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

wieder betrachten, und es sei $T = 1''$, $N = 1$ Schwingung, ferner $\pi = 3,1415926$ und eben haben wir $L = 0^m,9938462$ gefunden. Substituirt man diese Werthe in die vorhergehende Gleichung und erhebt jeden Theil derselben zum Quadrate; so ergibt sich daraus:

$$g = 9^m,8089$$

und dieses ist die Geschwindigkeit, welche ein schwerer Körper erlangt hat, wenn er am Niveau des Meeres und in einem, wie die Pariser Sternwarte auf dem Parallelkreise von der nördlichen Breite von 48°50'14'' liegenden Orte während einer Sexagesimalsecunde mittlerer Zeit im leeren Raume gefallen ist.

Alle ähnlichen Körper und von demselben Volumen, z. B. alle Kugeln von demselben Durchmesser, machen, von welcher Beschaffenheit sie auch sein mögen, schwerer oder leichter, wenn sie an Fäden von derselben Länge aufgehangen werden, an demselben Orte der Erde in gleichen Zeiten gleiche Schwingungen, was durch sehr genaue Versuche dargethan ist, woraus folgt, daß die schweren Körper im leeren Raume auch nach der verticalen Richtung in gleichen Zeiten gleiche Räume durchfallen.

§. 300. Aus der Theorie der Attraction folgt, daß die Länge des Secundenpendels dem Quadrate des Sinus der geographischen Breite proportional zunimmt, wenn man von dem Aequator gegen den Pol zu geht, so daß also für eine beliebige geographische Breite H die Länge L des Secundenpendels ausgedrückt wird durch:

$$L = A + B \sin.^2 H,$$

wo A die Länge des Secundenpendels unter dem Aequator und B den Ueberschuß dieser Länge über die des Secundenpendels unter dem Pole bezeichnet. Zur Bestimmung dieser beiden Constanten braucht man nur die Längen L', L'' des Secundenpendels am Niveau des Meeres in zwei Oertern von bekannten geographischen Breiten H', H'' zu kennen; denn alsdann hat man:

$$L' = A + B \sin.^2 H', \quad L'' = A + B \sin.^2 H'',$$

und wenn man die erste Gleichung von der zweiten abzieht, so erhält man:

$$B = \frac{L'' - L'}{\sin.^2 H'' - \sin.^2 H'}.$$

Wenn man die beiden bekannten Werthe von $\sin.(H'' + H')$, $\sin.(H'' - H')$ mit einander multiplicirt, für $\cos.^2 H'$ seinen Werth $1 - \sin.^2 H'$ setzt und bemerkt, daß $\sin.^2 H'' + \cos.^2 H'' = 1$ ist; so findet man:

$$\sin.(H'' + H') \sin.(H'' - H') = \sin.^2 H'' - \sin.^2 H'$$

und die vorhergehende Formel verwandelt sich in:

$$B = \frac{L'' - L'}{\sin.(H'' + H')\,\sin.(H'' - H')}.$$

Einer der Beobachtungsörter sei die Pariser Sternwarte, deren geographische Breite $H' = 48°50'14''$ und worauf nach den Bordaschen Versuchen $L' = 0^m,9938462$ ist. Biot hat gefunden, daß die Länge des Decimalsecundenpendels auf der Insel Unst, die nördlichste der Schottländischen Inseln, deren geographische Breite $H'' = 60\ 45'25''$ ist, $0^m,7427231$ beträgt, und wenn diese Pendellänge mit $(\frac{1000}{864})^2$ multiplicirt wird, so ist das Product die Länge des Sexagesimalsecundenpendels $L'' = 0^m,9949459$. Werden diese Zahlen statt der Buchstaben substituirt und bemerkt man, daß die Summe der geographischen Breiten $H'' + H' = 109°35'39''$ dem Werthe $\sin.(90° - 19°35'39'')$ oder $\sin. 70°24'21''$ entspricht, so hat man:

$$B = \frac{0,0010997}{\sin.70°24'21''\,\sin.11°55'11''},$$

und wenn man mit Logarithmen rechnet, so findet man:

$$\begin{aligned} \log. 0,0010997 &= 3,0412742 \\ \text{dec. Erg. } \log.\sin.70°24'21'' &= 0,0259069 \\ \text{dec. Erg. } \log.\sin.11°55'11'' &= 0,6849938 \\ \log. B &= \overline{3},7521749, \end{aligned}$$

also: $$B = 0,0056516.$$

Die Gleichung für die geographische Breite von Paris gibt:

$$A = L' - B\sin.^2 H',$$

und wenn man für die Buchstaben im zweiten Theile ihre Zahlenwerthe setzt, so findet man:

$$A = 0,9938462 - 0,0056516\sin.^2 48\ 50'14'',$$

$$\begin{aligned} \log. 0,0056516 &= \overline{3},7521749 \\ 2\log.\sin.48°50'14'' &= \overline{1},7534084 \\ \log. 0,0032039 &= \overline{3},5055833 \end{aligned}$$

$$A = 0,9938462 - 0,0032039 = 0,9906423.$$

Durch ähnliche Rechnungen wie die eben ausgeführten findet man denselben Werth der Länge A des Pendels unter dem Aequator, wenn man in die sich auf die zu Unst angestellten Beobachtungen beziehende Gleichung die Werthe der Buchstaben L'', B und H'' substituirt.

§. 301. Zur Nachweisung der Richtigkeit der eben gefundenen Werthe der Constanten A und B wollen wir den folgenden Lehrsatz aus der Theorie der Attraction entlehnen.

Die Abplattung des Erdsphäroides ist gleich $\frac{5}{2}$ des Verhältnisses der Centrifugalkraft unter dem Aequator zur Intensität der Schwere daselbst, weniger dem Quotienten aus dem Ueberschusse der Länge des Secundenpendels unter dem Aequator über die des Secundenpendels unter dem Pole und aus der Länge des ersten Pendels.

Wir wollen die Abplattung der Erde mit α bezeichnen, so haben wir, da das Verhältniß der Centrifugalkraft unter dem Aequator zu

der Intensität der Schwere daselbst durch den Bruch $\frac{1}{289}$ ausgedrückt wird (§. 266), nach dem eben erwähnten Lehrsatze:

$$\alpha = \frac{5}{2} \times \frac{1}{289} - \frac{B}{A} = 0,00865 - \frac{B}{A}.$$

Wenn man die Werthe der Constanten A und B in diese Formel setzt, so findet man:

$$\alpha = 0,002957 = \frac{1}{338}.$$

Diese Abplattung ist etwas kleiner als die Abplattung $\frac{1}{334}$, welche von der Commission angenommen ist, die mit der Bestimmung des französischen metrischen Decimalmaaß- und Gewichtssystemes beauftragt war, und nach Delambre soll die Abplattung wenigstens $\frac{1}{310}$ betragen.

Die Nutation und Präcession oder die Theorie der Ungleichheiten der Bewegung des Mondes, die Gradmessungen und die Pendelbeobachtungen geben Abplattungen, welche zwischen enge Grenzen eingeschlossen sind, und nach Laplace's analytischen Untersuchungen ist die Abplattung, welche diesen drei Bestimmungsarten am besten entspricht, $= 0,00326 = \frac{1}{306,75}$, und wir wollen nun die Werthe der Constanten A und B vermittelst dieser Abplattung zu bestimmen suchen.

Wird der Werth dieser Abplattung für α in den Ausdruck des vorhin angeführten Lehrsatzes substituirt, so erhält man:

$$0,00865 - \frac{B}{A} = 0,00326,$$

woraus folgt: $$B = 0,00539\, A,$$

und die allgemeine Gleichung verwandelt sich in:

$$L = (1 + 0,00539\, sin.^2 H)\, A.$$

Für die geographische Breite der Pariser Sternwarte hat man $L = 0,9938462$ und $H = 48\ 50'\ 14''$, und wenn man diese Werthe statt der Buchstaben substituirt, so findet man:

$$A = \frac{0,9938462}{1 + 0,00539\, sin.^2\, 48^\circ 50' 14''} = 0,9908193,$$

$$B = 0,00539 \times 0,9908193 = 0,0053405,$$

woraus folgt, daß die Länge des Secundenpendels unter einer beliebigen geographischen Breite H ausgedrückt wird durch:

$$L = 0,9908193 + 0,0053405\, sin.^2\, H.$$

Wir wollen diese Formel auf die Berechnung der Länge des Secundenpendels zu London anwenden, und es sei $H = 51^\circ 31' 8''$ die geographische Breite des Beobachtungsortes, so findet man, wenn man das letzte Glied der vorhergehenden Formel durch Logarithmen berechnet:

$$\begin{aligned} 2\, log.\, sin.\, 51^\circ 31' 8'' &= \overline{1},7873164 \\ log.\, 0,0053405 &= \overline{3},7275819 \\ &\overline{5},5148983. \end{aligned}$$

Dieser Logarithmus entspricht der Zahl 0,0032726
und wenn man dazu das erste Glied 0,9908193
addirt, so erhält man . . . . . $L = 0{,}9940919$
für die gesuchte Länge des Pendels.

Aus den vom Capitain Kater zu London an einem Beobachtungsorte von 51° 31′ 8″ geographischer Breite angestellten Beobachtungen ergibt sich die Länge des Secundenpendels an diesem Orte = 39,13908 engl. Zoll und am Niveau des Meeres = 39,13929 engl. Zoll. Verwandelt man diese letzte Zahl in Meter, indem man bemerkt, daß 1 Meter = 39,37079 engl. Zoll ist; so erhält man:

$$L = \frac{39{,}13929}{39{,}37079} = 0^m{,}99412.$$

Der Unterschied zwischen dieser Länge des Secundenpendels und der, welche wir durch Rechnung gefunden haben, beträgt noch nicht $\frac{3}{100}$ Millimeter, und ist folglich fast 10mal kleiner, als der Fehler, welcher nach Bouguer's Meinung bei solchen Versuchen kaum zu vermeiden sei.

§. 302. Der Capitain Kater hat nach seiner Abhandlung in den **Philosophical transactions** vom Jahre 1819 die Bordaschen Verfahrungsarten zum Theil angewandt; aber er hat sich durch die Einrichtung des von ihm angewandten Pendels aller Rechnungen in Beziehung auf die Form des Pendels überhoben.

Kater's Pendel besteht aus einer kupfernen Stange *AB* (Fig. 160), deren Länge 1 1/2 engl. Zoll oder 38 Millimeter und deren Dicke 1/8 engl. Zoll oder 3 Millimeter beträgt. Die an ihren beiden Enden befestigten Ansatzstücke *AH* und *BI* sind nur halb so dick, um die Coincidenz des Pendels mit dem Mittelpuncte der Linse einer Secundenuhr leichter beobachten zu können.

Gegen die Enden der Kupferstange sind zwei scharfkantige Aufhängungsaxen *C* und *O* angebracht und diese Kupferstange geht durch ein cylindrisches Gewicht *D*, welches eine Art von Linse bildet und nahe bei der Aufhängungsaxe *O* befestigt wird. Zwischen den beiden Aufhängungsaxen befinden sich noch zwei andere Gewichte *E* und *F*, wovon das erste an der Kupferstange festsitzt, während das zweite längs derselben verschoben werden kann. Das Gewicht des ganzen Pendels beträgt ungefähr 14 Kilogr.

In einer schicklichen Höhe über einer Secundenuhr ist ein gußeisernes Support an einer Mauer gut befestigt, welches aus zwei Schenkeln besteht, die mit Nuten versehen sind, worin Lager von polirtem Stahle liegen, auf denen die scharfkantigen Axen ruhen. Der ganze Apparat muß so eingerichtet sein, daß die Schärfen der Aufhängungsaxen in derselben Horizontallinie liegen und daß die auf dieser Linie senkrechte und durch den Mittelpunct der Linse der Secundenuhr gehende Verticalebene das Pendel nach seiner Länge in zwei gleiche Theile theilt.

Nachdem man das Pendel um die Aufhängungsaxe *C* hat schwingen lassen, kehrt man dasselbe um und hängt es an der Axe *O* auf, worauf man dem Gewichte *F*, welches sich auf der Kupferstange ver-

schieben läßt, wodurch der Schwerpunct des Pendels verrückt wird, in einer solchen Lage befestigt, daß das Pendel bei beiden Aufhängungsarten Schwingungen von derselben Dauer macht, und alsdann ist die gegenseitige Entfernung der beiden Aufhängungsaxen die Länge des einfachen Pendels, welches mit dem zusammengesetzten Pendel synchronisch ist.

§. 303. Dieses von dem Capitain Kater erfundene Verfahren gründet sich auf eine von Huyghens entdeckte Eigenschaft des Schwingungsmittelpunctes, welche darin besteht, daß der Aufhängungs- und Schwingungsmittelpunct reciprok sind, d. h., wenn man die Schwingungsaxe mit der Aufhängungsaxe vertauscht, so hat das mit dem zusammengesetzten Pendel synchronische einfache Pendel dieselbe Länge, als bei der ersten Lage der Axen.

Es sei G der Schwerpunct des Pendels, welcher in der Ebene der Aufhängungs- und Schwingungsaxe liegt, so ist, wenn man $CG = a$ und $GO = \frac{K^2}{a}$ setzt, die Länge des einfachen Pendels:

$$L = a + \frac{K^2}{a}.$$

Kehrt man nun das zusammengesetzte Pendel um, um es um die Axe O schwingen zu lassen, so wird C die Schwingungsaxe und das Trägheitsmoment in Beziehung auf die durch den Schwerpunct G gehende, zu den beiden andern parallele Axe wird nicht geändert. Die Größe K behält also denselben Werth und $\frac{K^2}{a}$ ist der Abstand der Aufhängungsaxe vom Schwerpuncte, und wenn man diese Größe für a setzt, so verwandelt sich die vorhergehende Gleichung in:

$$L = \frac{K^2}{a} + a,$$

so daß bloß die Aufeinanderfolge der Glieder geändert ist und in dem einen, wie in dem andern dieser beiden Fälle wird die Dauer einer sehr kleinen Schwingung des Pendels durch $\frac{T}{N} = \pi \sqrt{\frac{L}{g}}$ ausgedrückt.

Umgekehrt, wenn das zusammengesetzte Pendel sehr kleine Schwingungen von derselben Dauer macht, wenn es abwechselnd an den beiden parallelen Axen C, O aufgehangen wird und der Schwerpunct G des Pendels in der Ebene dieser beiden Axen liegt; so ist die gegenseitige Entfernung derselben die Länge des einfachen Pendels, welches seine Schwingungen ebenfalls in derselben Zeit macht.

Wir wollen die Entfernungen CG und OG der Axen C und O vom Schwerpuncte G resp. mit a und a' bezeichnen. Da die Schwingungen des zusammengesetzten Pendels um diese beiden Axen von derselben Dauer sind, so haben die einfachen Pendel dieselbe Länge und man hat die Gleichung des zweiten Grades:

$$a' + \frac{K^2}{a'} = a + \frac{K^2}{a}$$

oder: $$a'^2 - \left(a + \frac{K^2}{a}\right) a' = -K^2,$$

woraus sich ergibt:

$$a' = {}^1/_2\left(a + \frac{K^2}{a}\right) \pm {}^1/_2\left(a - \frac{K^2}{a}\right).$$

Der erste Werth der Unbekannten $a' = a$ ist unzulässig, weil die Aufhängungs- und Schwingungsaxe nicht gleich weit vom Schwerpuncte entfernt sind, und wenn man in die erste Gleichung den zweiten Werth von $a' = \frac{K^2}{a}$ oder $a = \frac{K^2}{a'}$ substituirt; so erhält man:

$$a' + a = a + \frac{K^2}{a},$$

wie es sein muß.

Nach einer glücklichen Vergleichung Huyghens seiner schönen Theorie der Evoluten und Evolventen mit der Bewegung des Pendels kam er auf das Mittel, das Pendel in einer Cycloide schwingen zu lassen, und eine der Eigenschaften dieser Curve besteht darin, daß die Pendelschwingungen in dieser Curve unabhängig von ihren Amplituden isochronisch sind. Ferner verdankt man Huyghens die Entdeckung des Ueberganges der Bewegung eines auf einer Curve vermöge der Wirkung der Schwere herabfallenden Körpers zu der Bewegung des Pendels, welches diese Curve beschreibt, und wir wollen uns zunächst mit der Betrachtung der ersten dieser Bewegungen beschäftigen.

§. 304. Wenn sich nämlich ein Körper auf einer Cycloide bewegen muß, so wollen wir zunächst das Gesetz dieser Bewegung suchen.

Die Auflösung dieser Aufgabe gründet sich auf das allgemeine Gesetz des Falles der Körper und die Geschwindigkeit, welche sie erlangen, ist dieselbe, sie mögen nach der Verticale, oder auf geneigten Ebenen, oder auf Curven, welche in Verticalebenen liegen, von derselben Höhe herabfallen (§. 283).

Es sei ADB (Fig. 161) eine in einer Verticalebene unter ihrer Basis AB liegende Cycloide, und wir wollen durch den Scheitel D die rechtwinkligen Axen Dx, Dy ziehen, wovon die erste mit dem Durchmesser DE des Erzeugungskreises zusammenfällt. Wenn sich der Ausgangspunct des Körpers, welcher auf dieser Curve ohne alle anfängliche Geschwindigkeit herabfallen muß, in L befindet; so sei M der Punct, worin sich der Körper nach Verlauf der Zeit t befindet. Zieht man die Ordinaten LN, NP, setzt $DN = h$, $DP = x$ und bezeichnet die dem Körper durch die Schwere ertheilte Geschwindigkeit mit v; so hat man:

$$v = \sqrt{2g(h - x)}.$$

Setzt man den Bogen $DM = s$ und bemerkt, daß derselbe abnimmt, wenn die Zeit t zunimmt, so hat man:

$$v = -\frac{ds}{dt},$$

und aus diesen beiden Ausdrücken der Geschwindigkeit ergibt sich:

$$dt = -\frac{ds}{\sqrt{2g(h-x)}}.$$

Um diese Gleichung zu integriren, muß man ds eliminiren. Das unendlich kleine rechtwinklige Dreieck Mnm gibt:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Wenn der Anfangspunct der Coordinaten x, y im Scheitel D der Cycloide liegt und der Halbmesser ihres Erzeugungskreises durch a bezeichnet wird, so ist ihre Differentialgleichung:

$$dy = \frac{(2a-x)\,dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}}(2a-x)^{\frac{1}{2}},$$

und wenn man diesen Werth für dy in die vorhergehende Gleichung substituirt, so verwandelt sie sich in:

$$ds = \sqrt{dx^2 + \frac{dx^2}{x}(2a-x)} = dx\sqrt{\frac{2a}{x}},$$

und wird endlich dieser Werth von ds in den von dt substituirt, so erhält man:

$$dt = \frac{-dx\sqrt{\frac{2a}{x}}}{\sqrt{2g(h-x)}} = \sqrt{\frac{a}{g}} \cdot \frac{-dx}{\sqrt{hx-x^2}}.$$

Der letzte Factor dieses Ausdruckes läßt sich folgendermaßen umformen:

$$\frac{-dx}{\sqrt{hx-x^2}} = \frac{-\frac{dx}{\frac{1}{2}h}}{\sqrt{\frac{\frac{1}{4}h^2-(x^2-hx+\frac{1}{4}h^2)}{\frac{1}{4}h^2}}}$$

$$= \frac{-\frac{dx}{\frac{1}{2}h}}{\sqrt{1-\left(\frac{x-\frac{1}{2}h}{\frac{1}{2}h}\right)^2}} = d.\,arc.\left(cos. = \frac{x-\frac{1}{2}h}{\frac{1}{2}h}\right),$$

und wenn man dieses Resultat in die vorhergehende Gleichung setzt und dann von jedem Theile derselben das Integral nimmt, so kommt:

$$t = \sqrt{\frac{a}{g}}\,arc.\left(cos. = \frac{2x-h}{h}\right) + C.$$

Im Anfange der Bewegung ist $t = o$, $x = h$, und folglich die Constante $C = o$.

Wenn der Körper bis zu dem Scheitel D herabgefallen ist, so hat man:

$$x = o,\ arc.\left(cos. = \frac{o-h}{h}\right) = arc.\,(cos. = -1) = \pi = 3{,}14159,$$

und nach diesen Transformationen verwandelt sich die vorhergehende Formel in:

$$t = \pi \sqrt{\frac{a}{g}}.$$

Diese letzte Formel ist, wie man sieht, von der Größe h unabhängig, welche die verticale Höhe des zum Anfangspuncte der Bewegung genommenen Punctes der Curve ausdrückt und hieraus folgt, daß ein auf der Cycloide vermöge der Wirkung der Schwere herabfallender Körper immer in derselben Zeit zu dem tiefsten Puncte dieser Curve gelangt, von welchem Puncte derselben er auch ausgegangen sein mag. Diese merkwürdige Eigenschaft nennt man Tautochronismus, und folglich ist die Cycloide eine tautochronische Curve.

Wir haben bereits in §. 198 gefunden, daß die von dem untern Endpuncte des verticalen Durchmessers eines in einer Verticalebene liegenden Kreises nach verschiedenen Puncten des Umfanges gezogenen Sehnen von den der alleinigen Wirkung der Schwere folgenden Körpern in derselben Zeit durchlaufen werden, welches eine ähnliche Eigenschaft wie die eben bewiesene der Cycloide oder eine Art von Tautochronismus ist; jedoch mit dem Unterschiede, daß der Körper im Kreise längs einer geraden Linie, aber bei der Cycloide auf dieser Curve selbst herabfällt, und außerdem ist zu bemerken, daß wir in beiden Fällen von der Reibung und dem Widerstande der Luft abstrahiren.

§. 305. Eine andere sehr merkwürdige Eigenschaft der Cycloide, welche wir hier aber bloß kurz anführen wollen, indem wir wegen des Beweises auf die Lehrbücher der rationellen oder höhern Mechanik verweisen, besteht darin, daß die Cycloide die sogenannte Brachystochrone oder die Curve des schnellsten Falles ist, d. h. die Curve, welche ein Körper beschreiben muß, um in der kürzesten Zeit von einem gegebenen Puncte zu einem andern gegebenen Puncte, welche beide weder in derselben Verticale noch in derselben Horizontale liegen, zu gelangen.

Es sei *AMND* (Fig. 162) die Curve des schnellsten Falles zwischen den Puncten *A* und *D*. Durch den Punct *A* sei die Horizontale *AE* gezogen. Wenn man in den Endpuncten *M* und *N* eines Elementes *MN* der Curve zwei Normalen zieht, so bilden sie den unendlich kleinen Winkel *MLN* mit einander, und durch die Infinitesimalanalysis wird bewiesen, daß, wenn die Zeit, welche der Körper zum Beschreiben des Elementes *MN* gebraucht, ein Minimum ist, die Normale *LM* von der Horizontale *AE* im Puncte *K* in zwei gleiche Theile getheilt wird, welches eine Eigenschaft des Krümmungshalbmessers der Cycloide ist. Hieraus folgt, daß die Curve *AMND* des schnellsten Falles im Bogen der Cycloide ist, deren Basis mit der Horizontale *AE* zusammenfällt, und welche den Punct *A* zum Anfangspuncte hat.

Um diese Curve zu zeichnen, wollen wir zunächst durch folgendes Verfahren den Durchmesser ihres Erzeugungskreises suchen. Mit einem Erzeugungskreise von einem beliebigen Durchmesser beschreibe man unter der Horizontale *AE* die Cycloide *AFI*, so hat man, wenn man *AD* und die Sehne *FI* zieht:

$$AF : AD = AI : \frac{AD \times AI}{AF}.$$

Diese vierte Proportionale, deren Werth man durch Rechnung erhält, oder wenn man durch den Punct *D* eine Parallele zu *FI* zieht, ist die Basis der Cycloide, deren Anfangspunct im Puncte *A* liegt, und welche durch den Punct *D* geht, woraus sich leicht der Durchmesser ihres Erzeugungskreises finden läßt. Nach dem bisher über die Cycloide Gesagten sieht man, daß die Curve zu gleicher Zeit Tautochrone und Brachystochrone im leeren Raume ist, und die erste dieser Eigenschaften ist von Huyghens in Verbindung mit der der Evoluten zur Construction des Cycloidenpendels angewandt.

§. 306. Ueber der Horizontale *AB* (Fig. 161) wollen wir mit einem Erzeugungskreise von dem Durchmesser $EC = ED$ die beiden halben Cycloiden *CA*, *CB* beschreiben, welche sich im Puncte *C* berühren und ihre Scheitel in den Puncten *A* und *B* haben. Wir wollen uns vorstellen, daß diese beiden halben Cycloiden von zwei Metallstreifen oder Federn von derselben Krümmung gebildet seien und daß ein unausdehnbarer, vollkommen biegsamer Faden, dessen Länge $= CD$ oder gleich dem doppelten Durchmesser *EC* des Erzeugungskreises ist, mit seinem einen Ende in dem Berührungspuncte *C* der beiden halben Cycloiden befestigt sei, und daß an dem andern Ende des Fadens ein Gewicht aufgehangen sei, so daß ein Pendel gebildet wird.

Legt man alsdann den Faden des Pendels um die halbe Cycloide *CA* und überläßt es dann der Wirkung der Schwere, so wickelt sich der Faden wieder ab, der abgewickelte Theil bildet eine gerade Linie, wie man im Puncte *L* sieht und das Gewicht beschreibt bei seinem Herabsinken die Evolvente *AMD*, welche eine halbe Cycloide und ihrer Evolute *AC* gleich ist.

Das Pendel gelangt mit einer Geschwindigkeit in die Verticale *CD*, vermöge welcher es die halbe Cycloide *BD* beschreibt, indem sich der Faden auf den Cycloidenbogen *CB* wickelt, und es setzt auf diese Weise seine Schwingungen weiter fort, welche isochronisch sind, was für Amplituden sie auch haben mögen.

Vierzehntes Kapitel.

Anwendung des Pendels auf die Uhren.

§. 307. So oft man auf den Ursprung der Entdeckungen zurückgeht, worauf die Dynamik beruhet, bietet sich der Name Galiläi dar, und auch er hat über das Pendel die ersten Entdeckungen gemacht und einige Eigenschaften desselben angegeben. Noch in den letzten Jahren seines Lebens hatte er sich vorgenommen, mit seinem Sohne das Pendel zur Regulirung der Bewegung der Uhren anzuwenden; allein Huyghens war die Ausführung dieses Gegenstandes vorbehalten.

Seit länger als zwei Jahrhunderten hatte man Uhren mit Zahnrädern construirt und die ersten hatten eine beträchtliche Größe und wurden in den Thürmen einiger großer öffentlicher Gebäude aufgestellt. Die Räder bestanden aus Eisen und die Verbindungen aller Theile war nur eine grobe Schlosserarbeit; allein die Erfinder hatten den Hauptmechanismus, wie er noch jetzt ist, gefunden und es waren bloß für den Regulator andere genauer ausgeführte Theile zu substituiren.

Der Regulator der alten Uhren ist ein an einer Schnur aufgehangener Balancier und er besteht aus einer verticalen Axe mit zwei Paletten, deren Enden in Ringe treten und welche sich mit geringer Reibung auf den untern Zapfen drehet. An seinem obern Theile hat der Regulator ein horizontales Querstück, woran auf jeder Seite ein Gewicht aufgehangen ist, welches man, um seine Bewegung zu reguliren, seiner Mitte nähern oder davon entfernen kann. Das Steig- oder Hemmungsrad ist ein Stirnrad, dessen Axe horizontal ist; seine dreikantig geformten und geneigten Zähne treffen gegen die Paletten der Welle des Balanciers und ertheilen derselben eine alternative Bewegung, wodurch die dem Räderwerke der Uhr durch ein Gewicht ertheilte Bewegung regulirt wird.

Huyghens hat, um statt des Balanciers das Pendel anzuwenden, die Lage der Axe, welche die beiden Paletten trägt, sowie die Lage der Axe des Steigrades verändert, und zwar der ersten eine horizontale und der zweiten eine verticale Lage gegeben. Das Pendel ist vermittelst eines Fadens, dessen beide Enden an einem über dem Räderwerke schicklich angebrachten Querstücke befestigt sind, aufgehangen und eine Stange, welche die Gabel genannt wird, ist am Ende der Palettenwelle in senkrechter Richtung befestigt und ihr unterer gekrümmter Theil hat zwei Zweige, zwischen welchen die Pendelstange hindurchgeht. Die Bewegung, welche der Pendelstange durch die Gabel ertheilt wird, compensirt die, welche sie wegen der Reibung und dem Widerstande der Luft verliert; aber wegen der Hemmung des Steigrades beschreibt das Pendel Bogen, deren nicht constante Amplitude mehr als 20° betragen kann, und folglich sind seine Schwingungen nicht von gleicher Dauer.

Diese Substitution, welche im Jahre **1657** von Huyghens versucht und das folgende Jahr bekannt gemacht wurde, wandte man bei der Construction einiger Uhren an. Die Eigenschaft des Tautochronismus der Cycloide und die der Evoluten gaben Huyghens das Mittel an die Hand, die Inconvenienz der ungleichen Dauer der Schwingungen des Pendels, wenn es nicht sehr kleine Bogen beschreibt, zu beseitigen, und er machte in seinem **1673** gedruckten **Horologium oscillatorium** die schönen geometrischen und mechanischen Entdeckungen bekannt, welche er während der seit seinen ersten Versuchen verflossenen **16** Jahren gemacht hatte.

Statt des gewöhnlichen Pendels, welches Kreisbogen beschreibt, wandte Huyghens die folgende bereits in §. **306** erwähnte Einrichtung an. Das Pendel bestand aus einer Metallstange, deren unteres Ende ein linsenförmiges Gewicht trug und durch das obere Ende der Pendelstange ging ein Draht, dessen beide Enden auf der durch den Berührungspunct ***C*** der beiden Cycloidenbogen ***CI***, ***CK*** (Fig. **161**)

gehenden Horizontale befestigt waren. Diese Bogen wurden aus zwei Kupferstreifen gebildet, welche die Krümmung einer Cycloide hatten, deren Erzeugungskreis die Hälfte der Entfernung zwischen dem Aufhängungspuncte und dem Schwingungsmittelpuncte des Pendels zum Durchmesser hatte.

Wenn man das Pendel aus der Verticale entfernte und dann es der Wirkung der Schwere überließ, so legte sich der Faden abwechselnd an die Cycloidenbogen *CI*, *CK*, sein Schwingungsmittelpunct beschrieb Cycloidenbogen und die Schwingungen des Pendels waren wegen des Tautochronismus dieser Curve alle von derselben Dauer, welche Amplituden sie auch haben mochten.

Diese sinnreiche Einrichtung gründet sich auf eine streng erwiesene geometrische Theorie, und zu der Zeit, wo sie von Huyghens bekannt gemacht wurde, war sie die beste, welche man treffen konnte, weil man damals bloß die Hemmung vermittelst des Steigrades kannte, wobei das Pendel große Bogen beschreibt. In der Folge ist jedoch diese Einrichtung allmählig durch geschickte Künstler vervollkommnet und vervollständigt und sie erfanden Hemmungsvorrichtungen, bei welchen das Pendel nur kleine Bogen beschrieb, welche fast mit der entsprechenden Cycloide zusammenfielen, so daß die cycloidischen kupfernen Streifen überflüssig wurden und hinweggelassen werden konnten. Durch die länger als ein Jahrhundert nach den Entdeckungen Huyghens fortgesetzten Arbeiten ist man dahin gelangt, Uhren von einem außerordentlich regelmäßigen Gange zu construiren, deren Haupttheile wir sogleich kurz beschreiben wollen.

Seit Huyghens haben die Theorie und die Anwendungen, indem sie einander gegenseitige Hilfe leisteten, schnelle Fortschritte gemacht, und obgleich man die noch übrigen Vervollkommnungen der Uhren hauptsächlich den Arbeiten einer kleinen Anzahl eminenter Künstler verdankt, so haben sie den wahren Erfolg doch nur dadurch erhalten können, daß sie sich auf mathematische Principien stützten, und die Communicationen zwischen den Gelehrten und den Künstlern sind sowohl für die einen, als für die andern von großem Nutzen gewesen.

Unter den Künstlern, welche am meisten zur Vervollkommnung der Uhren beigetragen haben, wollen wir bloß Ferd. Berthoud und Breguet nennen. Der erste hat viele Werke geschrieben, worunter sich besonders sein **Essai sur l'Horlogerie 2 Vol.** in 4, 1786 auszeichnet; unter den vielen Erfindungen Breguet's sind besonders seine Hemmungen mit Wirbeln und mit constanter Kraft und sein metallisches Thermometer zu bemerken; aber besonders ausgezeichnet hat er sich durch die genaue Ausführung und die einfache und sinnreiche Einrichtung aller Theile des Mechanismus.

§. 308. Bei einer astronomischen Secundenuhr unterscheidet man vier Haupttheile, nämlich das Gewicht, welches die bewegende Kraft bildet, das Räderwerk, die Hemmung und das Pendel, welches den Regulator bildet.

Wir wollen uns ein Gewicht denken, welches an einer Schnur aufgehangen ist, die in der schraubenförmigen Vertiefung des Cylinders oder der Trommel *C* (Fig. 163) aufgewickelt ist, deren Axe durch den Mittelpunct des Rades *D* geht, welches an einer seiner Grundflächen

befestigt ist; so wird durch das Herabsinken dieses Gewichtes das Rad *D* und alle übrigen Räder, welche das Uhrwerk bilden, gedrehet und wir wollen zunächst untersuchen, welche Geschwindigkeit jedem Rade mitgetheilt wird.

Das erste Rad *D* von 96 Zähnen, welches an der Grundfläche des Cylinders oder der Trommel befestigt ist, greift in das Getriebe *d* von 12 Zähnen, welches sich auf der Welle *E* befindet. Wenn also das Rad *D* eine Umdrehung macht, so macht das Rad *E* $\frac{96}{12} = 8$ Umdrehungen. Wenn sich das Rad *E* von 100 Zähnen, welches in das Getriebe *e* von 10 Zähnen greift, an der Welle des Rades *F* einmal herumdreht, so macht das Rad *F* 10 Umdrehungen, und folglich 80 Umdrehungen während das Rad *C* eine Umdrehung macht. Das Rad *F* von 80 Zähnen greift in das an der Welle des Rades *G* befindliche Getriebe *f* von 10 Zähnen. Das dritte Rad *F* macht also 8 Umdrehungen, wenn das Rad *E* eine Umdrehung macht, und es macht $80 \times 8 = 640$ Umdrehungen, während das Rad *D* eine Umdrehung macht. Das vierte Rad *G* mit 75 Zähnen greift in das an der Welle des fünften Rades *S*, welches das Steigrad ist, befindliche Getriebe *g* mit 10 Zähnen. Wenn also das Rad *G* eine Umdrehung macht, so macht das Rad *S* deren 7,5 und es macht $640 \times 7{,}5 = 4800$ Umdrehungen, während das erste Rad *D* eine Umdrehung macht.

In Figur 166 ist der Grundriß des Hemmungsrades *S*, welches 30 Zähne hat, angegeben. Dasselbe macht in der Minute eine Umdrehung und an seiner Welle, deren Axe durch den Mittelpunct des Zifferblattes geht, befindet sich der Ring, auf welchen der Secundenzeiger geschoben wird.

Die Einrichtung des Räderwerkes ist in Figur 165 in einer Seitenansicht angegeben. *AA*, *BB* sind zwei kupferne Platten, welche durch 4 Pfeiler parallel zu einander befestigt sind und diese Verbindung wird das Gehäuse der Uhr genannt. Unter den Minutenrädern versteht man die zwischen der Platte *AA* und dem Zifferblatte liegenden Räder, welche dazu dienen, dem Minuten- uud Stundenzeiger die Bewegung mitzutheilen, und in Figur 164 ist der Grundriß dieser Räder angegeben.

Auf der Welle des Rades *G*, jenseits der Platte *AA*, ist ein Getriebe *l* von 12 Zähnen befestigt, welches in das Rad *L* von 96 Zähnen eingreift und auf der Welle dieses Rades ist ein Rad *M* von 48 Zähnen angebracht, welches in das Rad *N* von derselben Anzahl von Zähnen eingreift.

Das Hemmungsrad *S* macht in der Minute eine Umdrehung und das auf der Welle dieses Rades befestigte Getriebe *g* von 10 Zähnen greift in das Rad *G* von 75 Zähnen, welches in 7,5 Minuten nur eine Umdrehung macht, und das auf seiner Welle befestigte Getriebe *l* von 12 Zähnen greift in das Rad *L* von 96 Zähnen, woraus folgt, daß dieses Rad in $7{,}5 \times 8 = 60$ Minuten oder in einer Stunde eine Umdrehung macht, und an der Welle dieses Rades befindet sich der Ring des Minutenzeigers.

Die Welle des Rades *N* trägt das Getriebe *h* von 8 Zähnen, welches in das Rad *H* von 96 Zähnen eingreift und durch dieses Rad wird der Stundenzeiger in Bewegung gesetzt.

Alle Räder und die übrigen Theile des Mechanismus sind in Fig. 163 bis 167 in natürlicher Größe angegeben, und Fig. 167 stellt das Zifferblatt mit dem Secunden-, Minuten- und Stundenzeiger dar. Man könnte die Oberfläche des Cylinders *C* (Fig. 163 und 165) ganz eben lassen, und aus der darauf befindlichen schraubenförmigen Nute sieht man, daß die Schnur 12 Windungen darin machen kann. Wir wollen zunächst die Zeit zu bestimmen suchen, welche sie unter der Wirkung des Gewichtes und bei den eben bestimmten Geschwindigkeiten zu ihrer Abwickelung gebraucht.

Da das Hemmungsrad, welches in der Minute eine Umdrehung macht, 4800 Umdrehungen macht, während der Cylinder oder die Trommel eine macht, so ist die Geschwindigkeit der letztern $= \frac{1}{4800}$ Umdrehungen in einer Minute oder in $\frac{1}{1440}$ Tage, und man findet die Anzahl der Tage, welche der Cylinder gebraucht, um 12 Umdrehungen zu machen, durch folgende Proportion:

$$\frac{1}{4800} : \frac{1}{1440} = 12 : x = 40,$$

d. h. die Uhr könnte 40 Tage gehen; allein man muß sie einige Tage früher aufziehen, ehe sich die Schnur ganz abgewickelt hat.

§. 309. Die Wirkung des Gewichtes auf das Räderwerk wird während des Aufziehens unterbrochen; allein ein Mechanismus, welcher der Aufzug genannt wird, vertritt die Stelle dieses Gewichtes während des Aufziehens. Wenn man den Cylinder oder die Trommel vermittelst des Schlüssels in einem entgegengesetzten Sinne von dem drehet, nach welchem sie durch die Wirkung des Gewichtes gedrehet wird, so greift die Klinke *O* (Fig. 163) zwischen die Zähne des Sperrrades *o* (Fig. 163 und 165) und alsdann kann sich das Rad *D* unabhängig von dem Cylinder fortbewegen.

Innerhalb des Cylinders befindet sich auf der Seite des Sperrrades, welches auch das Hilfsrad genannt wird, eine Feder, welche fast einen ganzen Umkreis bildet und deren eines Ende mit einem in den Cylinder gehenden Stifte an dem Hilfsrade befestigt ist, während das andere bewegliche Ende einen Stift trägt, welcher in eine in dem Hilfsrade befindliche Oeffnung tritt. Wird alsdann der Cylinder zurückgedrehet, so wird die Feder durch eine Sperrklinke gespannt und wirkt vermittelst des durch das Hilfsrad gehenden Stiftes auf das Rad *D* und ertheilt demselben während der Zeit des Aufziehens dieselbe Bewegung als das Gewicht.

In der folgenden Tafel sind die Bestimmungsstücke des Räderwerkes enthalten, welches die Bewegung des Gewichtes auf das Hemmungsrad überträgt, wobei das Millimeter zur Längeneinheit genommen ist:

Räder	Zähne	Halbmesser	Getriebe	Zähne	Halbmesser.
D	96	31,5	*C*		18
E	100	26,5	*d*	12	3,5
F	80	21	*e*	10	3
G	75	20,5	*f*	10	3
S	30	20	*g*	10	3

Das bewegende Gewicht *P* (Fig. 169) ist ein Cylinder, dessen Oberfläche aus Kupferblech und welcher innerhalb aus Blei besteht. Derselbe wiegt 3,125 Kilogr., und wenn man hierzu 0,075 für das Gewicht der Rolle und ihres Biegels addirt, so erhält man das Gesammtgewicht = 3,2 Kilogr. Dieses Gewicht ist mit einer beweglichen Rolle vermittelst einer Darmsaite aufgehangen, deren eines Ende an einem an dem Cylinder *C* (Fig. 165), auf welchen sich die Saite wickelt, befindlichen Haken befestigt ist, während das andere Ende in ein in der Büchse, welche den Mechanismus enthält, befindliches Loch tritt, worin es durch einen Knoten festgehalten wird. Bei dieser Einrichtung beträgt die bewegende Kraft, welche das Räderwerk umdrehet, bloß die Hälfte des Gewichtes oder $\frac{3,2}{2}$ Kilogr. = 1600 Gramm.

§. 310. Wir wollen nun zu bestimmen suchen, welcher Theil dieser bewegenden Kraft auf das letzte oder Hemmungsrad übertragen wird.

Diese Aufgabe wird vermittelst der Regel in §. 135 gelöst, welche algebraisch durch die Formel:

$$p = \frac{P r r' r'' \ldots}{R R' R'' \ldots}$$

ausgedrückt wird, worin die Unbekannte p die Kraft ausdrückt, welche an dem letzten Rade wirken muß, um dem Gewichte P das Gleichgewicht zu halten, welches an dem an dem ersten Rade befestigten Cylinder angebracht ist, und wenn man für die Buchstaben ihre obigen Werthe setzt, so gibt die vorhergehende Formel:

$$p = \frac{1600 \times 18 \times 3,5 \times 3 \times 3 \times 3}{31,5 \times 26,5 \times 21 \times 20,5 \times 20} = 0,378,$$

d. h. die auf das Hemmungsrad übertragene Kraft ist nahezu der gleich, welche durch ein Gewicht von 3 Decigramm hervorgebracht würde. Dieses Resultat ist nur eine Annäherung, weil wir von der Reibung abstrahirt und für die mittlern Halbmesser bloß ihre Näherungswerthe genommen haben; aber gleichwohl zeigt das erhaltene Resultat, daß auf das Hemmungsrad nur eine sehr kleine Kraft übertragen wird, und von der Anwendung oder Vertheilung dieser Kraft ist namentlich der richtige und regelmäßige Gang der Uhr abhängig.

§. 311. Wir haben eben gefunden, daß von einer bewegenden Kraft, die durch ein Gewicht von 1600 Grammen hervorgebracht wird, welches an der Schnur aufgehangen ist, die sich auf den an dem ersten Rade befestigten Cylinder wickelt, auf das letzte Rad nur ein Theil übertragen wird, welcher der Wirkung eines Gewichtes von ungefähr 3 Decigramm gleich ist, und vermittelst des Mechanismus, welcher die Hemmung genannt wird, verbindet sich diese letzte Kraft mit der Bewegung des Pendels, welches als Regulator an der Uhr angebracht ist.

Bis jetzt sind zehn bis zwölf gute Hemmungsvorrichtungen bekannt; aber in den Secundenuhren wendet man allgemein die sogenannte Ankerhemmung an, und der Londoner Uhrmacher Clement hatte 1680 zuerst die glückliche Idee, sie für die Steigradhemmung zu substituiren, was auch die Veranlassung war, von der Cycloide keinen Gebrauch mehr zu machen. Die Ankerhemmung ist seit-

dem vervollkommnet, ihre ursprüngliche Form ist von Graham verändert und die ihr von diesem berühmten Künstler gegebene Einrichtung führt seinen Namen und ist von den Uhrmachern mit einigen Modificationen allgemein angenommen.

Das Hemmungsrad *S* (Fig. 165 und 166) wird sehr leicht gemacht, weil es nur einen sehr geringen Widerstand zu überwinden hat; es besteht aus Messing und seine wie die eines Sperrrades begrenzten Zähne sind auf der einen Seite kreisbogenförmig und auf der andern Seite gerade und etwas gegen die nach ihren Endpuncten gezogenen Halbmesser geneigt.

Das Stück *TUV*, welches der Anker genannt wird, ist aus einer Messingplatte geschnitten und an den Enden seiner Schenkel befinden sich die Paletten *U* und *V*, woran Stahlfassungen mit Schrauben befestigt sind und an den Stellen, welche mit dem Hemmungsrade in Berührung kommen, sind Steine angebracht. In der Stange, durch welche eine Schraube geht, ist eine eckige Oeffnung angebracht, so daß man die gegenseitige Entfernung der beiden Paletten leicht gehörig reguliren kann. Der obere Theil der Ankerstange ist durch eine Schraube mit einer andern Messingstange, welche die Gabel genannt wird, verbunden und durch diese Verbindung der Stange, des Ankers und der Gabel geht eine senkrechte Axe, um welche sie frei schwingen kann und hier sieht man, wie die Zähne des Hemmungsrades auf die Paletten des Ankers wirken und ihm, sowie der Gabel, eine schwingende Bewegung ertheilen, welche sich mit der des Pendels verbindet. Nach dem Augenblicke, wo ein Zahn des Rades vor der Palette *U* vorüber ist, wird die Schwingung vollendet und das Rad *S*, auf welches das bewegende Gewicht wirkt, strebt, seine Rotationsbewegung fortzusetzen; aber es wird durch die in die Verzahnung eingreifende Palette *V* festgehalten und die Unterbrechung der Bewegung dauert noch während der folgenden halben Schwingung fort, worauf die Ankerstange auf die andere Seite der Verticale übergeht und die Palette *V* den Zahn, welchen sie festhielt, verläßt, welcher Zahn nach der geneigten Ebene der sich entfernenden Palette fortrückt und auf das Pendel die Kraft überträgt, welche ihm durch das Rad mitgetheilt ist. Eine entgegengesetzte Wirkung wird zu gleicher Zeit durch den andern Schenkel des Ankers, dessen Palette *U* in die Verzahnung des Rades eingreift, aber nicht bis auf den Grund hervorgebracht, so daß der sich dagegen stützende Zahn bloß mit der Spitze auf dem an der innern krummen Fläche dieser Palette angebrachten Rubin festgehalten wird. Während der Schwingung hebt sich die Palette *U* und verläßt den Zahn, welchen sie zurückhielt, und welcher am Ende der geneigten Ebene der Palette entweicht, so daß durch die Entfernung des Ankers die Wirkung des bewegenden Gewichtes vermittelst der Gabel auf das Pendel übertragen wird. Dieselben Erscheinungen wiederholen sich, und bei jeder doppelten Schwingung läßt der Anker einen Zahn hindurchgehen. Die Regelmäßigkeit, welche man bei dieser Verbindung der durch die Wirkung einer beschleunigenden Kraft auf ein System von Zahnrädern hervorgebrachten Bewegungen und der Ruhe erhalten hat, ist zu bewundern und die Bewegung wird gleichförmig durch den

Einfluß der isochronischen Schwingungen des Pendels, welches den Regulator der Uhr bildet.

§. 312. Man hat dem an dem untern Ende des Pendels befestigten Gewichte die Linsenform gegeben, um den Widerstand der Luft zu vermindern. Diese Linse besteht aus Messing und ist an einer Eisenstange *FH* (Fig. 168) aufgehangen, welche durch die Mitte der Rahmenverbindung *ABA'B'* geht, deren Stäbe *AB*, *A'B'* aus Eisen bestehen, während die Stäbe *CD*, *C'D'* des innern Rahmens *CDD'C'* aus Zink bestehen. Wir werden diese Einrichtung, durch welche die Wirkung der Ausdehnung des Eisens vermittelst der der Ausdehnung des Zinkes aufgehoben wird, bald näher betrachten.

Die Eisenstäbe sind, wie die Zinkstäbe, cylindrisch, indem der Durchmesser der letztern fast doppelt so groß ist, als der der erstern. In Fig. 168 und 169 sieht man, wie dieser doppelte Rahmen und die Pendelstange durch Querstücke mit einander verbunden sind; das des obern Theiles besteht aus Messing und darüber befindet sich ein schmäleres Stück, welches in seiner Mitte durchbrochen ist, wodurch zwei parallele Zweige gebildet werden, die in Haken auslaufen. Die Aufhängung geschieht mit Federn an einer vorspringenden Messingplatte *MN*, welche an einer Mauer gehörig befestigt sein muß. Die beiden Aufhängungsfedern *n*, *n* bestehen aus Gold, ihre untern Theile sind zwischen zwei Kupferstücken, durch welche kupferne Schrauben gehen, befestigt und durch die Mitte dieser Kupferstücke geht in normaler Richtung ein kleiner Cylinder, dessen äußere Theile die Haken des Pendels aufnehmen. Die obern Theile der Federn sind ebenfalls mit Schrauben an dem Mechanismus befestigt, welcher sich an der Kupferplatte *MN* befindet.

Die Federn *n*, *n* werden durch das Gewicht des Pendels gespannt, und wenn man dasselbe hinwegnehmen will, so darf die Spannung der Federn nicht ganz aufgehoben werden, zu welchem Zwecke Breguet in der Aufhängung noch einen Hilfsmechanismus angebracht hat. Es sind nämlich zwei rechteckige Kupferstücke, zwischen welche man eine gekrümmte Stahlfeder legt, auf die festen Stücke gelegt, woran die obern Theile der Federn befestigt sind, und durch diese Verbindung gehen in verticaler Richtung zwei Schrauben *V*, *V*, welche in dem obern Stücke festsitzen und die Zapfen an ihren untern Enden treten in die Löcher des Stückes, woran die Pendelhaken aufgehangen werden. Zwischen diesen beiden Schrauben befindet sich eine dritte Schraube *U*, deren Mutter sich in dem obern Stücke befindet, und wenn man diese Schraube drehet, so kann man das obere Stück ab- oder aufwärts bewegen. Im ersten Falle wird die Feder, auf welche sich dieses Stück stützt, gespannt und alsdann bewegen sich die Schrauben *V*, *V* niederwärts und ihre Zapfen drücken auf das am untern Theile der Aufhängungsfedern *n*, *n* befestigte Stück, welche Federn auch gespannt bleiben, nachdem das Pendel hinweggenommen ist.

Alle Theile des Mechanismus der Uhr, nebst ihrem Gestelle sind in einer messingenen cylindrischen Büchse enthalten und das Zifferblatt bildet eine der Grundflächen dieses Cylinders, während die andere Grundfläche offen bleibt und sich gegen die Kupferplatte *MN* stützt, worauf sie durch zwei Klauen festgehalten wird, welche in die Sup-

porte *N*, *N* greifen und durch eine dritte Klaue, welche mit dem durch eine starke Schraube befestigten Riegel befestigt wird. Um das Pendel an den Aufhängungsfedern aufzuhängen, läßt man es durch eine in dem untern Boden des Cylinders angebrachte Oeffnung gehen und ein Stift *t*, welcher an dem dritten Querstücke des Pendels befestigt ist, tritt in die Gabel, die mit einer Schraube an dem Ankerstabe befestigt ist und um eine Axe schwingt, deren Verlängerung durch den Aufhängungspunct des Pendels geht.

Die Länge des Pendels von seinem Aufhängungspuncte *S* bis zu seinem untern Ende *s* ist $= 1^m,205$ und es beschreibt auf jeder Seite der Verticale Bogen, welche ungefähr $1\,'/_4$ Grad betragen. Um die Amplitude dieser Bogen zu schätzen, ist unterhalb der Linse ein in Grade und Viertelgrade eingetheilter Maaßstab angebracht und die Länge eines Grades dieses Maaßstabes beträgt 21 Millimeter.

Die Entfernung der Axe des Ankers von dem untern Ende seiner Paletten beträgt 39 Millimeter und er beschreibt auf jeder Seite der Verticale Bogen, deren Amplitude noch nicht 0,85 Millimeter beträgt.

§. 313. An demselben Orte verhalten sich die Schwingungszeiten zweier Pendel wie die Quadratwurzeln aus ihren Längen. Bezeichnen also *T*, *T'* die Zeiten, *N*, *N'* die entsprechenden Schwingungszahlen und *L*, *L'* die Längen der Pendel, so hat man:

$$\frac{T}{N} : \frac{T'}{N'} = \sqrt{L} : \sqrt{L'},$$

und wenn man $T = T' = 1''$ setzt, so ergibt sich aus der vorhergehenden Proportion:

$$N' = \frac{N\sqrt{L}}{\sqrt{L'}}.$$

Wir wollen diese Formel zunächst zur Bestimmung der Anzahl *N'* der Schwingungen anwenden, welche ein einem einfachen Pendel von der Länge $L' = 0^m,994$ entsprechendes zusammengesetztes Pendel in 24 Stunden mittlerer Zeit macht.

Setzt man $L = 0,9938265$, $N = 86400$ und rechnet mit Logarithmen, so hat man:

$$\begin{aligned} log.\,N &= 4,9365137 \\ {}'/_2 log.\,L &= 1,9986553 \\ \text{dec. Erg. } {}'/_2 log.\,L' &= 10,0013068 \\ log.\,N' &= 14,9364758, \end{aligned}$$

also: $N' = 86392,45.$

Das Pendel *L'* ist um $\frac{1735}{10000}$ Millimeter länger, als das Secundenpendel, und aus dem eben gefundenen Resultate sieht man, daß bei einem Pendel von dieser Länge die Uhr täglich um $7'',55$ zurückbleiben würde.

Wir wollen die Länge *L'* des Pendels zur Unbekannten nehmen, so erhalten wir, wenn wir die obige Gleichung in Beziehung auf diese Größe auflösen:

$$L' = \frac{LN^2}{N'^2}.$$

Wir wollen annehmen, daß die Anzahl N' der Schwingungen des Pendels in 24 Stunden = 86399 sei, so haben wir, wenn die übrigen Buchstaben dieselben Werthe haben, als im vorhergehenden Beispiele:

$$\begin{aligned} \log. L &= \overline{1},9973105 \\ 2\log. N &= 9,8730274 \\ \text{dec. Erg. } 2\log. N' &= 0,1269826 \\ \log. L' &= \overline{9},9973205 \\ L' &= 0,9938493 \\ L &= 0,9938265 \\ \text{Differenz} &= 0,0000228. \end{aligned}$$

Diese Differenz, welche zwischen $^1/_4$ und $^2/_9$ Millimeter liegt, ist der Zuwachs der Länge des Pendels, welches täglich den Gang der Uhr um 1″ verzögert.

§. 314. Soll eine Uhr die Zeit mit einer großen Genauigkeit messen können, so darf das Pendel, welches den Regulator derselben bildet, keine Veränderung in seiner Länge erfahren; denn diese Bedingung ist eine Folge von der eben erörterten Eigenschaft des Pendels.

Alle Metalle dehnen sich aus, wenn ihre Temperatur steigt und ziehen sich zusammen, wenn sie sinkt; aber für die verschiedenen Metalle sind diese Ausdehnungen und Zusammenziehungen nicht von derselben Größe, und eben wegen dieser Ungleichheit kann man den Einfluß der Temperaturveränderungen auf die Länge des Compensationspendels zu Null machen, wo man unter einem Compensationspendel ein solches versteht, dessen Länge vermöge seiner Constructionsart durch die Temperaturveränderungen nicht geändert wird.

In dem beschriebenen Pendel (Fig. 168) strebt die Ausdehnung der Eisenstangen den Mittelpunct der Linse zu erniedrigen, in welcher sich drei Löcher befinden, in die die untern Enden der Eisenstangen treten. Die mittlere Eisenstange, welche bis dem Puncte G' hineingeht, läuft in eine Schraube aus und trägt eine Schraubenmutter, welche den Mittelpunct G der Linse in dem Puncte festhält, worin man denselben befestigen will. Der obere Theil dieser Stange kann in den Löchern der Querstücke bis zu dem Puncte F fortgleiten, wo sie in dem Querstücke, welches den innern Rahmen begrenzt, dessen beide Stangen von Zink sind, festgehalten wird.

Wenn sich bei dieser Einrichtung die Eisenstangen ausdehnen, so würde der Mittelpunct der Linse niedersteigen; aber zu gleicher Zeit wird durch den Zinkrahmen, dessen beide Stangen unterhalb an dem Querstücke BB' festsitzen und welcher sich nur in seinem obern Theile ausdehnen kann, das Querstück CC', sowie der Mittelpunct der Linse, welche von der im Puncte F dieses Querstückes befestigten Stange getragen wird, gehoben. Da die Ausdehnungen der Eisen- und Zinkstangen im entgegengesetzten Sinne wirken, so braucht man, um die Gesammtwirkung auf Null zu reduciren und das Pendel zu einem Compensationspendel zu machen, nur die Längen der Eisen- und Zinkstangen

so einzurichten, daß die Ausdehnung der ersten der der letzten gleich sei, was die Uhrmacher nach den bekannten Versuchen und durch Probiren thun, welches sich abkürzen läßt, wenn man sich der analytischen Formeln bedient.

Gewöhnlich wendet man zur Construction der Compensationspendel der Secundenuhren Eisen- und Messingstäbe an; aber da der Unterschied der Ausdehnungrn dieser beiden Metalle kleiner ist, als für das Eisen und Zink, so würden zwei Rahmen zur Bewirkung der Compensation nicht ausreichen, weshalb man deren vier, zwei mit Eisenstäben und zwei mit Messingstäben (Fig. 170) anwendet. Die Verbindungsart dieser Rahmen erhellet leicht aus der Figur, woraus man sieht, daß bei jedem doppelten Rahmen die Ausdehnung der Eisenstäbe von oben nach unten und die der Messingstäbe von unten nach oben wirkt.

Wenn man die Längen der Messingstäbe von den Längen der daran liegenden Eisenstäbe abzieht, so wird die Entfernung SG des Aufhängungspunctes S vom Mittelpuncte G der Linse ausgedrückt durch:

$$SG = SE + AB + TV + FG - CD - UX.$$

Wir wollen die Ausdehnung des Eisens mit f und die des Messinges mit c bezeichnen, so hat man, wenn sich die Ausdehnungen dieser beiden Metalle bei irgend einer Temperatur t compensiren:

$$(SE + AB + TV + TG)\,ft - (CD + UX)\,ct = 0.$$

Setzt man für den ersten Factor seinen aus der vorhergehenden Gleichung abgeleiteten Werth, so kommt:

$$(SG + CD + UX)\,f - (CD + UX)\,c = 0,$$

woraus folgt:
$$CD + UX = SG.\frac{f}{c-f},$$

und wenn man diesen Werth von $CD + UX$ in die erste Gleichung setzt, und transponirt, so kommt:

$$SE + AB + TV + FG = SG.\frac{c}{c-f}.$$

In dem Falle des Pendels (Fig. 168), welches bloß drei Eisenstangen und zwei Zinkstangen hat, sind die Stangen TV und UX Null, und wenn man die Ausdehnung des Zinkes mit k bezeichnet und die übrigen Bezeichnungen beibehält; so verwandelt sich die vorletzte Gleichung in:

$$CD = SG.\frac{f}{k-f}.$$

Die Entfernung des Aufhängungspunctes des Pendels vom Mittelpuncte der Linse ist:

$$SG = 1^m,062;$$

die Ausdehnung des Eisens $f = 0,001235$ nach Lavoisier,
" " " Zinkes $k = 0,002942$ " Smeaton,

und wenn man diese Zahlen in die vorhergehende Formel substituirt, so erhält man:

$$CD = \frac{1{,}062 \times 1235}{1707} = 0^m{,}7683.$$

Nach den auf der Zeichnung genommenen Maaßen ist $CD = 0^m{,}870$; allein man muß bemerken, daß die Eisenstange, welche die Linse trägt, unter den Mittelpunct der letztern bis gegen den Punct G' hinabgeht und daß die Ausdehnung des an den Federn aufgehangenen Kupferstückes größer ist, als die des Eisens, so daß man, wenn diese Stücke bei der Berechnung unberücksichtigt bleiben, für die Zinkstange eine kleinere Länge hat finden müssen, als die der Compensation entsprechende.

Durch langes Probiren gelangt man zu einer genauen Compensation und zu einem richtigen Gange der Uhr. Eine der besten Uhren, welche Breguet verfertigt hat und seit langer Zeit als Regulator dient, war am 10. April 1840 gegen mittlerer Zeit um 44″,32 voraus und ihr tägliches Voreilen betrug 0″,132, was in einem Jahre ungefähr 48″ beträgt.

§. 315. Die Linse besteht aus zwei gleichen messingenen Kugelsegmenten, und man kann ihr Volumen nach folgender Regel berechnen, welche sich aus einem in der Elementargeometrie bewiesenen Satze ergibt.

Wenn man das Volumen des Kugelsegmentes mit V, den Halbmesser seiner Grundfläche mit R und seine Höhe mit H bezeichnet, so hat man:

$$V = {}^1/_2 \pi R^2 H + {}^1/_6 \pi H^3,$$

und folglich für beide Segmente, welche die Linse bilden:

$$2V = \pi H (R^2 + {}^1/_3 H^2).$$

Nimmt man die Maaße auf der Zeichnung, deren Maaßstab $^2/_5$ der natürlichen Größe ist, so findet man:

$$R = 0^m{,}045 \times {}^5/_2 = 0{,}1125,$$
$$H = 0{,}0075 \times {}^5/_2 = 0{,}01875,$$
$$R^2 = {}^1/_3 H^2 = 0{,}012773,$$

und wenn diese Werthe in die vorhergehende Formel substituirt werden, so erhält man mit Hilfe der Logarithmentafeln:

$$\log. \pi = 0{,}4971509$$
$$\log. H = \overline{2}{,}2730013$$
$$\log. (R^2 + {}^1/_3 H^2) = \overline{2}{,}1062929$$
$$\log. 2V = \overline{4}{,}8764451,$$

also:
$$2V = 0{,}00075239 \text{ Cubikmeter}$$
$$= 0{,}75239 \text{ Cubikdecimeter}.$$

Versuche, welche in der Hydrostatik werden näher besprochen werden, lehren, daß ein Cubikdecimeter Messing 8,395 Kilogr. wiegt, und wenn man dieses Gewicht mit dem Volumen 0,75239 multiplicirt, so findet man das Gewicht der Linse $= 6{,}316$ Kilogr.

Fünfzehntes Kapitel.

Von den schwingenden Saiten.

§. 316. Wenn eine biegsame und elastische Saite durch eine einem Gewichte gleiche Kraft gespannt wird, so daß jedes ihrer Enden an einem festen Puncte befestigt ist; so kann man sie aus ihrer geradlinigen Richtung entfernen, indem man sie mit zwei Fingern faßt, oder in irgend einem ihrer Puncte einen Stoß auf sie ausübt, und wenn man sie alsdann sich selbst überläßt, so kommt sie nicht bloß in ihre ursprüngliche Lage wieder zurück, sondern sie geht vermöge der erlangten Geschwindigkeit noch darüber hinaus, und wenn diese Geschwindigkeit aufgehoben ist, so kehrt die Saite wieder in die Lage zurück, von welcher sie ausging, u. s. f., so daß sie also ähnliche Schwingungen macht, wie das Pendel.

Wenn die Länge der Saite, ihr Gewicht und das Gewicht, welches ihre Spannung ausdrückt, gegeben ist, so kann man die Anzahl der sehr kleinen Schwingungen bestimmen, welche sie während einer Secunde macht.

Wenn man die Länge der Saite mit l, ihr Gewicht mit p, das Gewicht, welches ihre Spannung ausdrückt, mit P und die Intensität der Schwere mit g bezeichnet, so findet man durch die Analysis, daß die Dauer T einer Schwingung dieser Saite ausgedrückt wird durch:

$$T = \sqrt{\frac{lp}{gP}},$$

und wenn man die Anzahl der Schwingungen, welche die Saite in der Zeiteinheit macht, mit N bezeichnet, so hat man:

$$N = \frac{1}{\sqrt{\frac{lp}{gP}}} = \sqrt{\frac{gP}{lp}}.$$

Aus dieser Formel ergeben sich mehrere wichtige Folgerungen. Zunächst sieht man, daß sie von der Größe der Amplituden der Schwingungen der Saite unabhängig ist, so daß also diese als sehr klein vorausgesetzten Schwingungen isochronisch sind.

Der Ton, welchen eine Saite hervorbringt, hängt von dem Werthe von N ab und ist desto höher, eine je größere Anzahl von Schwingungen die Saite in der Zeiteinheit oder in der Secunde macht.

Bei derselben durch das Gewicht P gespannten Saite ist die Anzahl N ihrer Schwingungen der Quadratwurzel aus ihrem Gewichte proportional.

Wenn zwei verschiedene Saiten durch gleiche Gewichte gespannt werden, so verhält sich die Anzahl der Schwingungen jeder dieser Saiten während einer Secunde umgekehrt wie das Product aus ihrer Länge und ihrem Gewichte.

Wenn man bloß die Dimensionen der Saite kennt, so kann man leicht den Werth ihres Gewichtes finden; denn bezeichnet r den Halbmesser der Saite und π das Verhältniß des Kreisumfanges zum Durchmesser, so ist ihr Volumen $= \pi r^2 l$, und wenn man das Gewicht der Volumeneinheit der Masse der Saite mit k bezeichnet, so hat man:

$$p = \pi r^2 l k.$$

Um diese Formel auf ein Beispiel anzuwenden, wollen wir folgende Werthe nehmen, welche sich auf die Saite **No. 19** der Versuche beziehen, wovon sogleich die Rede sein wird. Diese Zahlenwerthe und die, deren wir uns bei den folgenden Rechnungen bedienen werden, sind für die Längen in Metern, für die Volumina in Cubikmetern und für die Gewichte in Kilogrammen ausgedrückt.

Das Gewicht eines Cubikmeters Stahl oder der Werth von k ist nach den Versuchen von Muschenbroek $= 7767$ Kilogr., $\pi = 3,1416$, die Länge der Saite $l = 1^m,694$ und ihr Halbmesser $r = 0^m,0005355$. Setzt man diese Zahlen für die entsprechenden Buchstaben in die obige Formel und rechnet mit Logarithmen, so hat man:

$$\begin{aligned} log.\,\pi &= 0,4971509 \\ 2\,log.\,r &= \overline{7},4575190 \\ log.\,l &= 0,2289134 \\ log.\,k &= 3,8902533 \\ log.\,p &= \overline{2},0738366, \end{aligned}$$

also:

$$p = 0,01185$$

nnd dieses ist das Gewicht, welches wir durch die wirkliche Wägung der Saite gefunden haben.

Wenn man für den Buchstaben p seinen Werth setzt, so verwandelt sich der Werth von N in:

$$N = \sqrt{\frac{gP}{l^2 r^2 \pi k}} = \frac{1}{lr}\sqrt{\frac{gP}{\pi k}}.$$

Bei mehreren Arten musikalischer Instrumente wird der Ton durch schwingende Saiten, welche man auch tönende Saiten nennt, hervorgebracht und die, welche man bei dem Pianoforte anwendet, sind Eisen- oder Stahlsaiten, welche man am besten aus England bezieht. Bekanntlich werden auf ein solches Instrument viele Saiten gezogen; aber es ist mit Schwierigkeit verbunden, den Widerstand zu bestimmen, welchen der Kasten des Instrumentes muß leisten können. Die folgenden Versuche haben die Auflösung dieser Aufgabe zum Zwecke und dienen auch zur Vergleichung der analytischen Theorie der Saiten mit dem practischen Verfahren, welches man bei der Construction dieses Instrumentes anwendet. Diese Versuche wurden im Monate October 1834 bei Erard von mir und D. Klein, Chef seines Ateliers, angestellt. Ein von Klein gestimmtes Pianoforte wurde neben unsern Apparat gestellt, worauf eine Saite so lange gespannt wurde, bis sie mit der auf dem Pianoforte von denselben Dimensionen und einer ähnlichen Lage im Einklange war.

Die Saiten eines Pianoforte sind nach ihren Dicken nummerirt, welche durch ein Maaß (Fig. 171 und 172) bestimmt werden. Dieses Maaß besteht in einer kleinen Stahlplatte, in welche ein Winkel von 2° geschnitten ist. Diese Stahlplatte befindet sich in einer messingenen Fassung und die Nummern sind durch Puncte angegeben, welche auf dem einen Schenkel des Winkels durch gerade Zahlen und auf dem andern durch ungerade Zahlen bezeichnet sind. Wenn man in den Winkel des Maaßes eine Saite bringt, so geben die Puncte, wo sie mit den Schenkeln des Winkels in Berührung kommt, die Nummer der Saite an und ihren Durchmesser haben wir durch folgendes Verfahren bestimmt. Wir wickelten nämlich die zu untersuchende Saite in ungefähr 20 Windungen, welche sich gegenseitig berührten, auf einen hölzernen Cylinder, maßen die Länge, welche diese 20 Windungen auf den Cylinder parallel zu seiner Axe einnahmen und dividirten diese Länge durch die Anzahl der Windungen, so drückte der Quotient den Durchmesser der Saite aus, und auf diese Weise haben wir folgende Resultate erhalten:

Nummern	Durchmesser	Nummern	Durchmesser
11	0 m, 000650	15	0 m, 000875
11 1/2	0, 000700	16	0, 000921
12	0, 000700	17	0, 000975
12 1/2	0, 000714	18	0, 001000
13	0, 000725	19	0, 001071
14	0, 000800		

Der Apparat, womit unsere Versuche angestellt wurden, ist ein Monochord, wovon *ABEF* (Fig. 173) eine Verticalprojection, *GHIK* (Fig. 174) ein Längendurchschnitt mit einer Verticalebene und *ABCD* (Fig. 175) eine Horizontalprojection der obern Fläche oder Tafel ist. Auf dieser Tafel befinden sich zwei Stege *abcd*, *efgh*, wovon der letzte fest ist und der untere Theil des ersten, dessen Profil die Form eines L hat, tritt in eine in der Mitte der Tafel nach ihrer Länge angebrachte Oeffnung. Ihre Ränder sind außerhalb und innerhalb belegt und man kann den Steg in dieser Oeffnung fortschieben und ihn an einem bestimmten Puncte mit einer Druckschraube befestigen.

An das eine Ende der Saite macht man einen Ring, um sie an dem Haken *q* der Federwage *PQ*, welche an dem einen Ende der Tafel des Monochordes befestigt ist, aufzuhängen. Diese Saite stützt sich auf den festen Steg, indem sie zwischen den Puncten *r* und *s* hindurchgeht; ebenso stützt sie sich auf den andern Steg und geht dann endlich durch ein in dem Stifte oder der Spille befindliches Loch, so daß, wenn diese Spille mit einem Schlüssel gedrehet wird, die Saite sich auf dieselbe wickelt und auf die Federwage eine Zugkraft ausgeübt wird und das von dieser Federwage angegebene Gewicht das Maaß der Spannung der Saite ist.

Um nun die Saite des Monochordes mit der eines Pianoforte in Einklang zu bringen, mißt man die Länge der letztern und trägt diese

Länge auf die Tafel des Monochordes zwischen die Stege und befestigt dann den beweglichen Steg mit der Druckschraube, worauf man auf die eben angegebene Weise eine Saite von derselben Nummer, als die des Pianoforte, über die Stege zieht, und wenn man diese Saite in Schwingungen versetzt, so schwingt nur der Theil *st*, welcher der Länge der Saite des Pianoforte gleich ist. Man drehet die Spille, versetzt die Saite des Monochordes in Schwingungen und schlägt die entsprechende Taste des Pianoforte an, welches man so lange fortsetzt, bis beide Saiten mit einander im Einklange sind, und die Spannung der Saite des Monochordes wird durch den Zeiger der Federwage angegeben.

Je mehr die Längen der Saiten abnehmen, desto größer wird der Raum zwischen der Spille und dem beweglichen Stege, und wenn man auf diese Weise fortführe, so müßte man zu viel überflüssige Längen der Saiten anwenden. Zur Vermeidung dieser Unannehmlichkeit hat Klein den in Figur 176 dargestellten kleinen Apparat erfunden, welchen man hinter den beweglichen Steg bringt, um die Stelle der Spille zu vertreten.

Die folgende Tafel enthält die Resultate unserer Versuche für eine der Saiten jeder der 78 Tasten oder der $6\frac{1}{2}$ Octaven des Pianoforte.

No. der Tasten	Noten	Saiten			Spannungen	
		Nummern	Längen	Durchmesser	Gewichte	für den Ton	bei dem Zerreißen
1		41/16	5 6 7	. . . . .	0,05250	15	20
2		39/16	5 6 3	. . . . .	0,04880	15	20
3		38/16	5 5 10	. . . . .	0,04665	14	20
4		36/16	5 5 4	. . . . .	0,04090	16,	22
5		34/15	5 4 10	. . . . .	0,03750	14	22
6		30/15	5 4 4	. . . . .	0,03288	12,5	24
7		28/14	5 3 7	. . . . .	0,02580	12,5	
8		26/14	5 2 9	. . . . .	0,02320	14	
9		26/14	5 1 6	. . . . .	0,02320	14	
10		$27/13\frac{1}{2}$	5 0 2	. . . . .	0,02100	13	
11		25/13	4 10 7	. . . . .	0,01895	15	
12		$24/12\frac{1}{2}$	4 8 4	0,000714	0,01705	15	
13		23/12	4 5 10	0,000700	0,01670	14	
14		22/12	4 3 0	. . . . .	0,01140	10	15
15		19	5 2 7	0,001071	0,01185	22	28
16		18	4 11 11	0,001000	0,01055	22,5	29
17		17	4 8 11	0,000975	0,00925	22	
18		16	4 6 4	0,000921	0,00780	20,5	
19		15	4 3 9	0,000875	0,00665	19,5	
20		$14\frac{1}{2}$	4 1 4	. . . . .	0,00600	19	
21		14	3 11 0	0,000800	0,00490	17	
22		14	3 8 11	. . . . .	0,00470	17,5	
23		13	3 6 10	0,000725	0,00412	17	
24		13	3 4 9	. . . . .	0,00394	17	
25		13	3 2 9	. . . . .	. . . . .	17	
26		13	3 0 11	. . . . .	. . . . .	17	

No. der Tasten	Noten	Saiten: Nummern	Saiten: Längen	Saiten: Spannungen	No. der Tasten	Noten	Saiten: Nummern	Saiten: Längen	Saiten: Spannungen
27		13	2 11 1	17	53		12	0 8 8	20,2
28		13	2 9 1	17	54		12	8 3	20,5
29		12½	2 7 5	19,5	55		12	7 7	20,5
30		12½	2 5 11	20	56		12	7 4	20,5
31		12½	2 4 6	20,2	57		12	7 0	20,5
32		12½	2 3 1	20,5	58		11½	6 7	21
33		12½	2 1 8	20,5	59		11½	6 3	21
34		12½	2 0 5	20,5	60		11½	5 10	21
35		12½	1 11 1	20,5	61		11½	5 7	21
36		12½	1 9 11	20,5	62		11½	5 3	21
37		12½	1 8 10	21	63		11½	5 0	21
38		12½	1 7 8	21,5	64		11½	4 9	21
39		12½	1 6 8	21	65		11½	4 5	21
40		12½	1 5 8	21	66		11½	4 2	21
41		12½	1 4 8	21,5	67		11½	3 11	21
42		12½	1 3 10	21,5	68		11½	3 9	21
43		12½	1 3 0	21,5	69		11	3 6	21
44		12	1 2 2	20	70		11	3 4	20
45		12	1 1 5	20	71		11	3 1	20
46		12	1 0 8	20	72		11	2 11	20
47		12	1 0 0	20	73		11	2 9	20
48		12	0 11 4	20	74		11	2 8	20
49		12	10 9	20	75		11	2 6	20
50		12	10 2	20	76		11	2 4	20
51		12	9 7	20	77		11	2 2	20
52		12	9 2	20	78		11	2 1	21,5

Um nach dieser Tafel die Gesammtzugkraft aller Saiten des Pianoforte zu bestimmen, wollen wir bemerken, daß jeder der ersten fünf Noten oder der fünf ersten Tasten nur zwei Saiten und jeder der 73 übrigen Noten drei Saiten entsprechen. Wenn man die Spannungen der fünf ersten und die der 73 übrigen Saiten besonders zusammenaddirt, die erste Summe mit 2 und die zweite mit 3 multiplicirt, so erhält man:

No. 1 bis 5 . . .	74	× 2 =	148
6 bis 78 . . .	1408,9	× 3 =	4226,7
Zusammen			4374,7.

Der Kasten des Pianoforte muß also einer Zugkraft von 4374,7 Kilogr. widerstehen können, ohne eine Biegung zu erfahren.

Obgleich die Spannungen für die Saiten einiger Nummern bis zum Zerreißen getrieben sind, so darf man daraus doch nicht schließen, daß diese Spannungen die Gewichte ausdrücken, welche die Saiten tragen können, weil diese auf den Stegen des Pianoforte gebrochene Linien bilden, wodurch ihre Stärke geändert wird. Dieses letzte Gewicht ist durch folgende Versuche bestimmt.

Die drei Saiten **No. 41/16, 28/14, 22/12** wurden vermittelst Ringen an Stiften aufgehangen, welche in einem Balken eingeschlagen waren, und die Gewichte wurden an diesen Saiten aufgehangen, welche Saiten in der Nähe der Ringe bei folgenden Belastungen zerrissen:

No. 41/16 . . . bei 64,124 Kilogr.,
28/14 . . . = 48,950 =
22/12 . . . = 39,649 =

Wir wollen nun die Schwingungen einiger Saiten des Pianoforte berechnen, indem wir die Zahlenwerthe aus der vorhergehenden Tafel unserer Versuche nehmen.

Für die erste Saite oder die Note *C* hat man:

$g = 9{,}8089$,
$P = 15$ Kilogr., Gewicht zur Hervorbringung des Tones,
$l = 1^m{,}8024$, Länge der Saite,
$p = 0{,}0525$ Gewicht der Saite,

und wenn man diese Zahlen statt der Buchstaben in die Formel:

$$N = \sqrt{\frac{gP}{lp}}$$

substituirt und mit Logarithmen rechnet, so kommt:

$$\begin{aligned} {}^1/_2 \log. g &= 0{,}4958101 \\ {}^1/_2 \log. P &= 0{,}5880457 \\ \text{dec. Erg. } {}^1/_2 \log. l &= 9{,}8720744 \\ \text{dec. Erg. } {}^1/_2 \log. p &= 10{,}7607168 \\ \log. N &= \overline{21{,}7166470}, \end{aligned}$$

also: $N = 52{,}07$ Schwingungen in der Secunde.

Eine ähnliche Rechnung lehrt, daß die Saite **No. 13** der Note *c* in derselben Zeit $N_1 = 94{,}73$ Schwingungen macht.

Das Gewicht der Saite **No. 25** der Note $\overline{c}$ ist in der obigen Tafel nicht angegeben; aber da man den Halbmesser der Saite kennt, so kann man die Anzahl der Schwingungen, welche sie in der Secunde macht, durch die Formel:

$$N_2 = \frac{1}{r_2 l_2} \sqrt{\frac{gP_2}{\pi k}}$$

berechnen, in welche man statt der Buchstaben die folgenden Zahlen setzt, und die Rechnung mit Logarithmen gibt alsdann folgende Werthe:

$g = 9{,}8089$		${}^1/_2 \log. g$	$= 0{,}4958101$
$P_2 = 17$		${}^1/_2 \log. P_2$	$= 0{,}6152244$
$r_2 = 0{,}0003625$	dec. Erg.	$\log. r_2$	$= 13{,}4406920$
$l_2 = 1{,}0489$	dec. Erg.	$\log. l_2$	$= 9{,}9792659$
$\pi = 3{,}1416$	dec. Erg.	${}^1/_2 \log. \pi$	$= 9{,}7514246$
$k = 7767$	dec. Erg.	${}^1/_2 \log. k$	$= 8{,}0548733$
		$\log. N_2$	$= \overline{42{,}3372903}$,

also: $N_2 = 217{,}41$ Schwingungen.

Wenn man diese Formel auf die folgenden Octaven anwendet, so findet man durch ähnliche Rechnungen:

No. 37 $\overline{\overline{c}}$ $N_3 = 420,05,$

49 $\overline{c}$ $N_4 = 880,36,$

61 c $N_5 = 1736,88,$

73 $\underline{c}$ $N_6 = 3706,23,$

78 $\underline{\underline{f}}$ $N_7 = 5072.$

Die Reihe der Resultate, welche wir eben für die Anzahlen der Schwingungen erhalten haben, welche die Saiten der successiven Octaven während einer Secunde machen, bilden nicht, wie es die Theorie fordert, eine genaue geometrische Progression von dem Exponenten 2; aber wenn man jedes Glied der Reihe der erhaltenen Resultate durch das vorhergehende dividirt, so findet man:

$$\frac{N_1}{N} = 2 - 0,18; \quad \frac{N_4}{N_3} = 2 + 0,09;$$

$$\frac{N_2}{N_1} = 2 + 0,29; \quad \frac{N_5}{N_4} = 2 - 0,03;$$

$$\frac{N_3}{N_2} = 2 - 0,07; \quad \frac{N_6}{N_5} = 2 + 0,13.$$

Alle diese Differenzen sind abwechselnd negativ und positiv und die größte rührt von dem Uebergange von den übersponnenen Saiten zu den einfachen her und für das Gewicht jeder übersponnenen Saite haben wir das Mittel zwischen dem Gewichte der Saite und dem der Einlage genommen.

Um noch einige Beispiele zu geben, wollen wir vermittelst derselben Formel:

$$n = \frac{1}{lr}\sqrt{\frac{gP}{\pi k}}$$

die Schwingungen der Saite No. 46 $\overline{\overline{a}}$ berechnen. Von dieser Note, welche mit der Stimmgabel im Einklange sein muß, gehen die Instrumentenstimmer aus.

Nach der obigen Tafel unserer Versuche haben die in der vorhergehenden Formel vorkommenden Buchstaben folgende Werthe und die logarithmische Rechnung gibt:

$g = 9,8089$		$^1/_2 \log. g$	=	0,4958101
$P = 20$		$^1/_2 \log. P$	=	0,6505150
$\pi = 3,1416$	dec. Erg.	$^1/_2 \log. \pi$	=	9,7514246
$k = 7767$	dec. Erg.	$^1/_2 \log. k$	=	8,0548734
$r = 0,00035$	dec. Erg.	$\log. r$	=	13,4559320
$l = 0,34288$	dec. Erg.	$\log. l$	=	10,4648578
		$\log. n$	=	42,8734129,

also: $n = 747,16.$

Durch Anwendung derselben Formel findet man auf dieselbe Weise für die Saiten der Noten:

No. 34 $\overline{a}$, $n' = 384,72$,

41 $\overline{\overline{e}}$, $n'' = 577,20$.

Das Intervall der beiden ersten Noten bildet eine Octave und das Verhältniß der Anzahlen der Schwingungen ihrer Saiten ist $\frac{n}{n'} = 2 - 0,06$; das Intervall zwischen der zweiten und dritten Note bildet eine Quinte und das Verhältniß der Anzahlen der Schwingungen ihrer Saiten ist $\frac{n''}{n'} = 1,5 = {}^3/_2$. Diese Beispiele sind hinreichend, um zu zeigen, wie die Regeln der Theorie durch das Experiment verificirt werden können.

Das Pianoforte, welches gewöhnlich Flügel genannt wird, ist vor ungefähr 60 Jahren zuerst von Sebastian Erard zu Paris construirt und der Mechanismus eines solchen Instrumentes ist in Fig. 177 in seiner Ruhelage angegeben, woraus man sieht, daß die Theile zwischen der Taste *AB* und dem Hammer *LM* eine Hebelverbindung mit einem Stahldrahte *feh* bilden, welcher eine Feder mit zwei Schenkeln bildet.

Das Stück *DE* heißt der Drucker der Taste; er kann sich um Axen drehen, welche gegen seine Enden senkrecht durch ihn hindurchgehen, und er theilt die ihm durch die Taste ertheilte Bewegung dem Stücke *FG* mit, indem er dasselbe um die Axe drehet, welche im Puncte *G* senkrecht durch dasselbe hindurchgeht. Auf *FG* befinden sich zwei Pfeiler *IK*, *NP*, wovon der erste die Palette *C* trägt, welche der Dampfhammer genannt wird. Einer der Haupttheile dieses Mechanismus besteht in dem winkelförmigen Stücke *RSF*, welches die Hemmung bildet; *FS* ist sein Drucker und *PQ* wird der Hemmungshebel genannt. Wenn man ein Gewicht von 100 Grammen auf das Ende *A* der Taste stellt, so bewegt sie sich niederwärts, indem sie sich um ihren Stützpunct *U* drehet und ihr Drucker *DE* bewirkt das Steigen der Zwischenstücke und des Hammers. Das Ende *R* von *FR* tritt unter die Basis *V* eines kleinen auf dem Rahmen befestigten Cylinders, wo es festgehalten wird. Die übrigen Stücke setzen ihre Bewegung fort, der Drucker *SF*, dessen oberes Ende den Hammer vermittelst der an seinem Stiele befestigten Rolle *o* trug, entweicht und der Stiel des Hammers stützt sich mit einem kleinen metallenen Stücke *S* von der Form eines L auf den Hemmungshebel.

Ein in den Punct *A* gestelltes Gewicht von 50 Gramm bringt die Taste in ihren verschiedenen Lagen ins Gleichgewicht. Es sind 20 Gramm erforderlich, um dem Dämpfer das Gleichgewicht zu halten und 3 Gramm halten dem Hammer das Gleichgewicht, und wenn die Taste zurückgezogen ist, so hält ein Gewicht von 7 Grammen den Zwischenstücken das Gleichgewicht. Das Stück *FGH* ist ein Zwischenhebel, dessen zweiter Arm *GH* mit einem kleinen Stücke Blei belastet ist, um sein Gewicht zu vergrößern und durch seine Mitte *H* geht eine Eisen- oder Stahlstange, wovon der obere winkelförmig gekrümmte Theil sich auf den Absatz der Stange des Dämpfers stützt, so daß vermöge dieser

Einrichtung der Dämpfer herabsinkt, wenn der Hammer steigt, um gegen die Saite zu schlagen.

Wenn man das Gewicht, welches auf die Taste gestellt war, hinwegnimmt, so bewegt ihr Drucker die Zwischenstücke niederwärts, der Dämpfer steigt wieder und der Zweig *eh* der Feder bringt den Drucker *FS* der Hemmung wieder unter die an dem Stiele des Hammers befestigte Rolle *O*. Wenn man die Taste mit dem Finger anschlägt, so schlägt der Hammer gegen die Saite, setzt sie in Schwingungen, so daß sie tönt, und verläßt sie dann wieder, und der Dämpfer unterbricht den Ton, welcher oft mit Schnelligkeit wiederholt werden muß. Diese Wiederholung wird hier erhalten, ohne daß es nöthig ist, den Hammer ganz herabfallen zu lassen. Wenn der Finger die Taste nur um eine sehr kleine Größe wieder aufsteigen läßt, so hält die Platte *C* den Hammer und die Hemmung gibt das Mittel an die Hand, durch sehr kleine Bewegungen des Fingers auf der Taste den Ton nach Belieben zu wiederholen.

Die Fig. 177^a ist die Horizontalprojection der drei Saiten der Note No. 39 *d*. Der Hammer trifft diese Saiten in *X*, ungefähr in dem 8ten Theile der Entfernung des Ringes *Y* von dem Stege *Z* und dieselbe Einrichtung findet bei allen Saiten der übrigen Noten statt.

Man sieht leicht ein, daß der Hammer einen beträchtlichen Winkel beschreibt, wenn die Taste in Folge des Fingerdruckes nur einen sehr kleinen Winkel beschreibt, und wir wollen nun das Verhältniß dieser beiden Winkel zu bestimmen suchen.

Wenn man mit dem Finger auf die Taste drückt, so beschreibt sie einen Raum von 4 Linien oder 9 Millimetern und man kann diesen Raum für die Länge des von dem Puncte *A* der Taste mit dem Halbmesser $r = AU = 0^m,2$ beschriebenen Kreisbogens nehmen, so daß der von der Taste beschriebene Winkel $= \frac{180^\circ \times 0,009}{\pi r} = 2^\circ,5 = 2^\circ 30'$ ist. Während der Punct *A* niederwärts einen Winkel von $2^\circ 30'$ beschreibt, beschreibt der Punct *D* aufwärts mit dem Halbmesser $r' = UD = 0^m,135$ einen Winkel, welcher dem auf der andern Saite des Stützpunctes gleich ist, und die Länge des diesen Winkel messenden Bogens ist gleich $\frac{2,5\pi r'}{180} = 0^m,006$.

Bei diesen Näherungsrechnungen können wir annehmen, daß die Rolle *O* oder der correspondirende Punct des Stieles des Hammers in Folge der dem Drucker der Hemmung durch den Drucker der Taste mitgetheilten Bewegung mit dem Halbmesser $r'' = LO = 0^m,015$ einen Bogen beschreibt, welcher dieselbe Länge hat, als der vorhergehende, und wenn man diesen Bogen mit x bezeichnet, so hat man: $\frac{\pi r'' x}{180} = 0^m,006$.

Diese beiden Gleichungen geben: $\frac{\pi r'' x}{180} = \frac{2,5\pi r'}{180}$,

woraus folgt: $x = \frac{2,5 r'}{r''} = \frac{2,5 \times 0,135}{0,015} = 2,5 \times 9$.

Der von der Taste beschriebene Winkel ist also nur ein Neuntel von dem, welchen der Hammer beschreibt.

Werner.

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Bresson, G.

Mechanik fester Körper Deutsch herausgeg. von C. H. Scheuche. Mit 18 Figuren Tafeln in Folio. (61f in 4??) Auch m. d. Haupttitel. Ausführliches Elementarbuch der Mechanik in ihrer Anwendung auf die Physik, Künste u. Gewerbe za vier Bänden. 1te Bd. Mechanik festen Körper

Darmstadt 1843

Math.a. 49 f
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10080581-1